ESCUELA NORMAL SUPERIOR DEL ESTADO DE MÉXICO

TESIS DE INVESTIGACIÓN

“ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA CON ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA”.

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

P R E S E N T A

JOHAN HAZEL CAMILO GUADARRAMA

A S E S O R

DR. ALFREDO CORTÉS ROBLES

TOLUCA, MÉXICO JULIO DE 2022

Capitulario

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

La enseñanza de las matemáticas cuenta con una gran variedad de metodologías útiles en el proceso de enseñanza – aprendizaje debido a que la educación actual exige ambientes y entornos que propicien la curiosidad, el interés y el gusto por la asignatura, a través de estrategias didácticas y pedagógicas. Las matemáticas forman parte del quehacer diario, es por ello que están involucradas en la formación de los estudiantes y se plasman en los planes de estudio, programas y metodologías, para desarrollar procesos mentales que les permitan construir y aplicar conocimientos, así como para el desarrollo de habilidades, como la mejora del pensamiento lógico y crítico, la intuición, la abstracción y la resolución de problemas.

Existen muchas causas que hacen de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas un proceso tedioso, por ejemplo, no contar con espacios para interactuar, falta de recursos didácticos, seguir el mismo método didáctico que en otras asignaturas, falta de estrategias de aprendizaje, entre otras. Por ello, llevar a cabo las interacciones entre el estudiante y el docente de forma reflexiva puede provocar que el aprendizaje de las matemáticas sea un eje fundamental que propicie habilidades y competencias en los estudiantes, de modo que puedan adquirir saberes y aplicarlos a nivel personal, profesional y laboral.

Uno de los recursos metodológicos para ser aplicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la modelación matemática de situaciones problema, ya que permite la construcción y comprensión de conceptos matemáticos. Se entiende por modelación a la actividad que conforma una estrategia para el uso y representación de ideas abstractas, que permitan la asimilación de conocimientos y su práctica.

El objetivo de esta investigación es mostrar la enseñanza de las matemáticas a través de procesos de modelación. Se hizo uso de la metodología Acodesa debido a que modelar una situación contextualizada en la vida cotidiana de los docentes y alumnos resulta en ocasiones muy complicado por ser un proceso que se desarrolla a partir de fases o etapas. Acodesa, es una metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión, sustentada teóricamente en la teoría del aprendizaje ligada a la construcción de esquemas cognitivos. Esta metodología resalta la importancia de la aportación de ideas y conocimientos de los integrantes de un grupo o comunidad entre sí, de fórmulas comunicativas científicas, así como de la utilización del pensamiento activo, Hitt y Quiroz (2017).

El estudio plantea objetivos específicos sobre conocer el cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social, la identificación de las dificultades del estudiante al resolver tareas de modelación y analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes conforme la metodología Acodesa mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto. El aprendizaje del concepto de función es una parte principal en esta investigación porque supone un intercambio cultural para alcanzar metas de juicio, debido a que este concepto no se limita a adquirir procedimientos algorítmicos formales.

La investigación surge de la necesidad de mostrar la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación matemática, para lo cual se estudia en el marco teórico emplear la modelación matemática como estrategias de enseñanza que permitan cumplir los objetivos planteados y responder a la pregunta: ¿A través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, se potencia el aprendizaje del concepto de función? La metodología de estudio utilizada fue Acodesa desde un enfoque cualitativo.

Los resultados arrojados de la investigación permiten identificar en los alumnos competencias como la comunicación, el razonamiento, la construcción de modelos matemáticos, el aprendizaje colaborativo, uso de lenguaje simbólico, la representación e interpretación, entre otras. Esta investigación sugiere que se ponga atención en el desarrollo de la comunicación de ideas y toma de decisiones de los estudiantes.

1 TITULO

Enseñanza de la modelación matemática con alumnos de educación secundaria.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo trata de la descripción de los antecedentes que dieron origen a la investigación referente a la enseñanza de la modelación matemática para el desarrollo del concepto de función, ya que tiene un papel central en torno al cual se resuelven ideas matemáticas importantes. Esta investigación con el enfoque de modelado, tiene el potencial de abarcar aspectos contextuales y conceptuales del concepto de función, así mismo, se describe la justificación del estudio realizado, los objetivos, las limitaciones y definiciones de conceptos relevantes que se trabajaron durante la elaboración del presente proyecto de investigación.

2.1 MARCO CONTEXTUAL

Una de las principales dificultades que tiene el aprendizaje de las matemáticas es que se ha enseñado de forma tradicional, en donde se parte de un concepto matemático sin previamente hacer un proceso de modelación, y a partir de dicho concepto se van obteniendo otros más. La dificultad se hace presente por no problematizar el contenido utilizando adecuadamente la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje de la matemática, además de ello, con frecuencia los profesores tratan de problematizar los contenidos de forma rutinaria sin establecer vivencias atrayentes que los estudiantes experimenten. Esto es interesante porque cuando se problematiza, se logra que problemas matemáticos no sean planteados únicamente por el profesor, sino también por el alumno conforme a sus intereses.

Tratar con matemáticas, específicamente con el proceso de aprendizaje, siempre incluirá la resolución de problemas, ingeniar, idear, experimentar, demostrar, hallar un sentido a las ideas matemáticas para objetar su relación con otras ideas. Es necesario que el alumno vea a la matemática como una actividad significativa, en donde los valores que la conforman para sentido de justicia o espíritu crítico, como disciplina, se evidencien en la práctica cotidiana.

Al ver a la matemática como un conjunto de conceptos, información, actividades, acotados y estáticos, que el estudiante deba dominar mediante la mecanización, surge una pregunta en relación a la educación matemática, ¿Cómo se puede crear un ambiente de clase que refleje una cultura matemática real? (Schoenfeld, 1988, p. 88).

Tal ambiente, es aquel espacio donde los alumnos interactúan, en conjunto con los docentes, directivos y demás integrantes del espacio activo, en el que enmarco la importancia de poner atención al proceso y sentido que se le da al desarrollo o construcción de ideas, es por ello que previo a la exposición de mis aportaciones, así como la recopilación y experimentación de los conocimientos, inicio a partir de la descripción del contexto escolar donde se llevó a cabo esta investigación referente a la enseñanza de la matemática a través de procesos de modelación utilizando la metodología Acodesa.

2.1.1 Contexto externo

La Escuela Secundaria Oficial No. 0086 “Licenciado Abel C. Salazar”, ubicada en la Calle 29 De marzo No. 5, Colonia La Mota del Municipio Lerma de Villada, es considerada una de las escuelas de nivel básico, más importantes y reconocidas del municipio, cuenta con dos turnos (matutino y vespertino), teniendo, por matricula, aproximadamente a 600 alumnos por turno.

Lerma, es un municipio considerado “Pueblo con encanto” por el gobierno del estado, con clave número 051, con alrededor de 170, 327 habitantes, de los cuales

83,968 son hombres y 86,359 son mujeres, ubicado en la zona central del oeste del Estado de México, entre Toluca y la Ciudad de México. Su fama destaca hidrográficamente debido al Rio Lerma, el cual es considerado una fuente de abastecimiento al ser ocupado como drenaje, donde se descargan aguas residuales, domesticas e industriales. Cuenta con dos lagunas, Chignahuapan, cerca de Sal Pedro Tultepec y Chimiliapan en San Nicolás Peralta.

El municipio tiene un total de 70 localidades y la mayoría de estás opta por tomar como continuidad de la educación primaria, la secundaria Lic. Abel C Salazar, como, por ejemplo. Santa María Atarasquillo, San Pedro Tultepec, San Miguel Ameyalco, San Mateo Atarasquillo, Xochicuautla, Santiago Analco, Colonia Agrícola Analco, entre otras. La economía es relativamente buena debido a las empresas y comercios con los que cuentan algunas localidades, como fábricas textiles, invernaderos, granjas y la Zona Industrial.

El gobierno es electo para un periodo de tres años no reelegibles, mediante el voto universal, directo y secreto. El ayuntamiento está conformado por el presidente municipal, el Síndico Municipal y un cabildo integrado por un total de 10 regidores. Para su régimen interior el municipio se divide en delegaciones y subdelegaciones, sus titulares son electos mediante el voto directo de la comunidad para un periodo de tres años, existiendo un total de 34 delegaciones. Sus fiestas y tradiciones más importantes son el 6 de enero en honor del Señor de la Caña, el 12 de agosto, que corresponde a Santa Clara, su iglesia más importante donde se presentan eventos artísticos y culturales, el 15 de septiembre, el Día de muertos y el 12 de diciembre.

Las principales escuelas que conforman al municipio son la Escuela Secundaria Oficial No. 0086 “Licenciado Abel C. Salazar”, la Escuela Preparatoria Oficial Número 358, la Escuela preparatoria Oficial Numero 23, el colegio privado Mano Amiga Cualcan, con sus niveles educativos primaria, secundaria y preparatoria, la Supervisión de Educación Primaria Zona P12107, la Universidad Autónoma de México, la Universidad Tecnológica del Valle de Toluca, el CONALEP y el CETis número 23 José Vicente Villada.

2.1.2 Contexto interno

La Escuela Secundaria Oficial No. 0086 “Licenciado Abel C. Salazar”, bajo la dirección del profesor Roberto Martínez Ballina, Turno Matutino, pertenece al subsistema Estatal 2, Zona escolar S059, con 15 grupos, una matrícula de 591 alumnos, un horario de 07:00 am a 13:10 pm. Es considerada una Escuela de Educación Secundaria General del Sector Público, con una alta demanda, debido a que en su proceso de admisión aceptan alumnos de las 70 localidades que conforman al municipio, con el propósito de fortalecer la diversidad cultural, la economía y las oportunidades de los estudiantes.

El organigrama de la escuela inicia con el Profesor Porfirio Nicanor Sánchez Supervisor Escolar, el Maestro Roberto Martínez Ballina Director Escolar, el Profesor Rafael Miranda López Subdirector Escolar, la Profesora Marcela C. González Montes de Oca Secretaria Escolar y los orientadores, la Profesora Carolina Benítez Campusano (3° A, B y C, 2° E y 2°D), el Profesor Consuelo Hernández (2° A y 2°B), la profesora María (1° D y E), la Profesora Blanca (3° C, D y E), la Profesora Angelica (2° A y B) y la Profesora Lilia (1° A, B y C y 2° C).

Las características de la escuela conforme a su infraestructura son; aulas de talleres, edificios de Telemática, Dirección y salones de 1°, 2° y 3°, un laboratorio, hay 4 sanitarios (2 para docentes y 2 para alumnos), las aulas son 15 (5 por grado), hay 3 patios recreativos, una tienda escolar, una papelería, tres zonas administrativas (Dirección, Secretaría y Subdirección), dos aulas de tecnología equipadas con un proyector, un computador, sillas y mesas, una amplia zona de áreas verdes, una biblioteca acondicionada, un área de estacionamiento y un auditorio.

2.2 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

2.2.1 Antecedente institucional o de experiencia

Los docentes han estado en constante esfuerzo por mejorar el bajo nivel académico de los estudiantes, debido a los problemas que trajo consigo el confinamiento por Covid 19, haciendo referencia a las consecuencias de la educación a distancia, sobre todo, se observa con claridad en alumnos de primer grado, quienes presentan debilidad en operaciones básicas, comprensión lectora, así como destreza en la resolución de problemas.

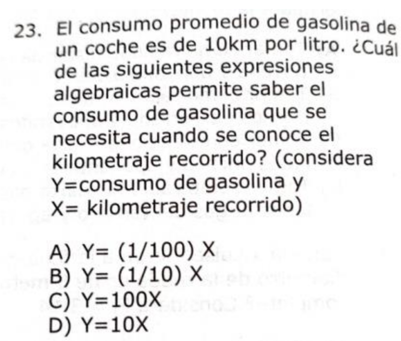
Los docentes, no solamente de la academia de matemáticas, buscan estrategias que permitan mejorar el desempeño de los alumnos, como la modalidad de educación tecnológica y el aprendizaje fuera del aula, en primer lugar porque el estudiante ha ido desarrollando sus habilidades digitales a lo largo de su vida, y en segundo lugar, por la necesidad constante del alumno por tomar clase fuera de salón, ya que expresan fuera del aula se sienten menos estresados, se comunican mejor con sus compañeros al debatir ideas y toman mejores decisiones.

Aunque actualmente el taller de tecnologías no está en funcionamiento, se hizo uso de las aulas telemáticas, aulas que cuentan con mobiliario en buen estado como butacas, pizarrón, proyector y un escritorio. A pesar de que el uso de esas aulas es únicamente para la reproducción de videos, pareciera que los docentes olvidan que el uso de la tecnología es un medio que favorece el aprendizaje de los alumnos si se usa de manera adecuada. En dichas aulas, se desarrolló el tema de simetría axial, en donde el uso de Apps fue crucial, como Geogebra, Power Point y algunas páginas web que proyectaban juegos con el plano cartesiano como temática inicial, con la finalidad de recordar conceptos como el de coordenada, ordenada, abscisa, ejes, punto, etc.

A finales del segundo trimestre, decidí en conjunto con el titular de grado, realizar un segundo examen diagnóstico, el cual constaría de 2 preguntas o ejercicios de la prueba nacional ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico de los Centros

Escolares), con el objetivo de medir objetivamente y estandarizada los conocimientos y habilidades con los que contaban los estudiantes, adquiridos desde el nivel básico primaria y durante los dos primeros trimestres de educación secundaria. Esto fue conveniente para la identificación de las debilidades tanto en el área de español, como en la de matemáticas, puntualmente en aspectos como el dominio de operaciones básicas y la comprensión lectora, para así posteriormente buscar áreas de oportunidad para la mejora de la calidad educativa.

Dicho examen diagnóstico arrojó que los alumnos tienen un bajo dominio en los temas de manejo de información, así como en la significación, el uso de literales, el análisis de problemas de proporcionalidad directa y la ecuación lineal. El ejercicio que a continuación se muestra, en la figura 1, es evidencia de cómo los estudiantes demuestran tener obstáculos con la resolución de problemas, específicamente en establecer la relación funcional entre los datos o la información proporcionada. El ejercicio fue parte de la evaluación de ENLACE 2009, con el propósito de que el alumno relacionara las variables para obtener el consumo de gasolina conforme al kilometraje recorrido.



23. El consumo promedio de gasolina de un coche es de 10km por litro. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite saber el consumo de gasolina que se necesita cuando se conoce el kilometraje recorrido? (considera Y=consumo de gasolina y X= kilometraje recorrido)

A) Y= (1/100) X
B) Y= (1/10) X
C) Y=100X
D) Y=10X

Figura 1. Ejercicio 23 de la prueba ENLACE 2009.

A partir del análisis de los datos, específicamente de este ejercicio, se mostró que 16 de los 40 alumnos tuvieron dificultades para calcular valores en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal. Para un segundo ejercicio, igualmente propuesto en la evaluación de ENLACE 2009, con la idea de que el alumno recordara cómo obtener la regla general a partir de una sucesión numérica, como se muestra en la figura 2.

87. Dada la siguiente sucesión numérica 11, 14, 17,... ¿Con cuál de las siguientes expresiones se obtiene la sucesión?

A) 8n+3
B) 6n + 5
C) 8+3n
D) 2n+9

Figura 2. Ejercicio 87 de la prueba ENLACE 2009.

Resultó que este problema fue resuelto de forma adecuada por 24 de los 40 alumnos, pudiendo recordar la formulación de expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones. El número de buenos resultados aumentó ya que lograron un reconocimiento rápido de la situación, recordando dónde aplicar patrones, como una forma de razonamiento que fue del reconocimiento directo a la solución, ya que previo al diagnóstico, se trabajó con regla general a partir de sucesiones, lo que significó un trabajo con patrones. Esto también mostró que los 16 alumnos que no respondieron correctamente no observaron patrones relevantes, lo que significaba dos cosas, no saber el contenido o bien, no haber identificado que era un ejemplo como los ya resueltos en clase con anterioridad.

2.2.2 Antecedentes curriculares

El tema de funciones, del eje temático, número álgebra y variación, es uno de los temas más complejos a comprender para los estudiantes de educación secundaria, incluso, en otros niveles educativos como el de media superior y superior. Este tema, que en educación secundaria se ve incluido, bajo el eje antes mencionado, que, conforme al currículo de primer grado, es vinculado a la actividad cognitiva del pensamiento funcional, actividad que se refiere a cuando un alumno establece relaciones entre dos o más variables, esto como proceso que tiene a las funciones como fundamento principal.

Uno de los mayores conflictos que tienen los alumnos es la identificación y relación entre variables que se les presenta en determinadas situaciones o problemas. Uno de los objetivos principales, referente al pensamiento funcional, es:

Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación (Cetina D. y Jiménez V. 2018, p. 132).

Una de las formas para hacer que el estudiante comience a comprender el tema de función es partiendo de la relación funcional, haciendo énfasis en el desarrollo del tema de proporcionalidad, específicamente en el cálculo de valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, ya sea con constante natural, fracción o decimal, debido a que es antecedente de la función.

Funciones parte del tema ecuaciones, en donde se espera el estudiante aprenda a resolver problemas mediante la formulación y solución de ecuaciones lineales. Posteriormente se da continuidad con el tema de patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes, tema donde nuevamente se espera que el estudiante formule expresiones algebraicas de primer grado, pero ahora, a partir de sucesiones, con el propósito de que analicen las propiedades que caracterizan a una sucesión. En penúltimo lugar, el tema de proporcionalidad, mencionado en el párrafo anterior, cuya importancia recae, aunado a los dos anteriores, al cálculo de valores faltantes, la relación entre variables, para finalmente dar pie a la interpretación y resolución de situaciones modeladas a partir de los tipos de variación, patrones, ecuaciones, representaciones, etc.

2.2.3 Antecedentes teóricos

Para este subcapítulo, incluí algunos de los estudios relacionados a la modelación matemática como metodología o estrategia de enseñanza de la función lineal, tema correspondiente al primer grado de educación secundaria.

La idea principal que alude a esta investigación es la enseñanza de la modelación matemática, con énfasis en el aprendizaje del concepto de función, por el hecho de ser una herramienta que confiere atribuir varias ciencias al uso de la matemática, por ello, resulta relevante en primera instancia, hacer ver la aplicación de los modelos matemáticos en la vida real, como una forma inédita de lograr y medrar el conocimiento matemático a través de la construcción de modelos, para después dar continuidad con el aleccionar de la construcción de modelos.

La enseñanza de la función lineal debe ser organizada de forma ecuánime, desde la representación, la expresión, en conjunto con la contextualización, así mismo, considero, a manera de introducción, retomar la evolución que ha tenido la noción de problema matemático hasta su consideración como situación problema, para posteriormente poder hablar de los modelos, como ese avance de la didáctica de las matemáticas resultado de cavilar los procesos de enseñanza de otras maneras.

A partir de estas ideas, se han propuesto diversas investigaciones en donde la idea principal es el uso de la modelación matemática en el aula de clases, no solo como estrategia de enseñanza, sino también como estrategia de aprendizaje para que los alumnos puedan comprender los contenidos de la asignatura, construir nuevos aprendizajes y desarrollar competencias.

El enseñar matemáticas ha pasado por diversos cambios a lo largo de la historia, como los trabajos en psicología del siglo XX, dirigidos al análisis de la inteligencia conforme al estudio de individuos frente a la resolución de problemas, con el propósito de crear cambios en los contenidos temáticos, así como en la forma de enseñanza. Alrededor de los años sesenta, surgiría el movimiento de las matemáticas modernas al pensarse que la unificación de las ideas de psicólogos, educadores y matemáticos proporcionarían bases para nuevos currículos, donde el énfasis que se le daba a las matemáticas estaba en su estructura y lenguaje formal, por ejemplo, en los métodos de demostración, ya que esto representaba uno de sus componentes esenciales.

Otro de los movimientos más populares fue el del regreso a lo básico, que representaba una contraparte al movimiento de las matemáticas modernas, por el hecho de que su tendencia estaba en darle mucha importancia al manejo de las operaciones fundamentales y procedimientos algorítmicos, surgiendo como respuesta a las deficiencias que la corriente anterior había dejado en los estudiantes. Este movimiento también resultó un fracaso, porque a pesar de que los estudiantes resolvieran operaciones, había carencia de sentido en las respuestas.

A partir de los resultados obtenidos de ambos movimientos, surge la propuesta de relacionar el aprendizaje de las matemáticas con la resolución de problemas, (Santos, 2014, p. 29), en otras palabras, la didáctica de las matemáticas. Es por ello que hago mención de Graham Wallas, como uno de los primeros personajes en tratar de caracterizar estrategias de la resolución de problemas, posteriormente a Brownell de los años cuarenta, por sus trabajos de análisis de la inteligencia relacionada con la resolución de problemas aritméticos, así como a Hadamard, quien escribió acerca de sus reflexiones sobre la resolución de problemas, mezclando las ideas principales de los trabajos de Poincaré y las fases del proceso creativo de Wallas, en específico la segunda etapa llamada incubación, la cual hace referencia al momento en que una persona genera posibles soluciones tentativas a un determinado problema. La importancia en esta fase radica en la conciencia del sujeto, quien puede ser capaz de apartar su mente del problema y realizar una búsqueda consiente de la solución.

Los trabajos de Polya también representan investigaciones importantes para la época, sobre todo con su libro “How to solve it”, acerca de cómo plantear y resolver problemas, libro donde propone un modelo para la resolución de problemas, con ideas interesantes como los tipos de problemas que incluyen los libros de texto, la heurística moderna como aquella que trata de comprender el método que conduce a la solución de un planteamiento y el diálogo que debemos tener con uno mismo para resolver una incógnita acerca de una cierta entidad matemática.

Distintas corrientes surgieron a partir de la matemática moderna y el regreso a lo básico, así como del surgimiento de la didáctica moderna, con relación a la resolución de problemas en contexto, dando pie a la matemática realista, con Brousseau como protagonista, con sus trabajos sobre los obstáculos epistemológicos, que, en conjunto, dieron origen a un nuevo concepto, la situación problema.

Existe una diversidad de investigaciones que han surgido a partir de la necesidad de aplicar las matemáticas a la realidad, como una forma de establecer una relación de conceptos con modelos matemáticos o con problemas en contextos, no necesariamente matemáticos o viceversa. Esta denominada extra-matemática (Erbas, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakiroglu, E., Alacaci, C., & Bas, S. (2014), incluye conexiones entre varios contenidos matemáticos con otras disciplinas y situaciones de la vida diaria.

Bajo este análisis, surgieron las nociones de ver la aplicación de modelos matemáticos en la vida real, como una forma innovadora de adquirir y desarrollar el conocimiento matemático a través de la composición de modelos para la representación de situaciones conforme a contextos reales.

Campeón (2016), en su investigación del *aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación*, para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática en la Facultad de Ciencias Básicas de Pereira, tuvo por objetivo general potenciar el aprendizaje del concepto de función en los estudiantes de octavo grado a partir de un proceso de modelación, con objetivos específicos como el de conocer los aspectos históricos – epistemológicos, didácticos cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de función, así como la identificación de dificultades al resolver tareas de modelación de situaciones problema cotidianos.

Se trató de un estudio aplicado, que desarrolló una propuesta de investigación didáctica que permitiera comprender las concepciones de los estudiantes posteriores al estudio del concepto de función, así como la propuesta didáctica que permita aproximar al estudiante al concepto de función, partiendo de la modelación de situaciones obtenidas del contexto de los estudiantes. Las conclusiones del proyecto de estudio referente a la identificación de las competencias matemáticas que desarrollan los alumnos de primer grado de secundaria durante la enseñanza de la relación funcional mediante procesos de modelación matemática fue que es necesario otorgar importancia al concepto de función dentro del currículo de matemáticas, dejar de considerarlo un objeto inerte para que sea parte de una visión dinámica y ejerza como herramienta de acceso al conocimiento, por otra parte, se enfatiza la necesidad de que el docente conozca elementos tanto históricos como epistemológicos, asociados al concepto de función, previo a la enseñanza del mismo, en otras palabras, la forma de sustento para dar significado al concepto.

Asimismo, generar ambientes significativos para el estudiante, que den pie a la necesidad de solucionar problemas a partir de situaciones que el alumno comprenda, para que esto no signifique una imposición por parte del docente en una tarea sin sentido o contexto. También es relevante que se incorporen a las clases situaciones que sean no complejas de comprender, para que puedan ser relacionadas con el contexto de los estudiantes, esto debido a que generalmente se usan las que marcan los libros de texto, siendo estas descontextualizadas y orientadas a definir de manera tradicional, dejando de lado el estudio y análisis de otros puntos importantes como lo es el de la variación, restándole significación al pensamiento variacional, como al funcional.

Cañas (2011), en su tesis de maestría de *la modelación matemática como estrategia de enseñanza para el desarrollo de competencias matemáticas en el tema relación funcional en la Universidad Virtual Escuela de Graduados en Educación*, con el objetivo general de identificar aquellas competencias que los alumnos de primer grado de secundaria desarrollan durante el proceso de modelación matemática, investigación que surgió a partir de la necesidad de desarrollar competencias matemáticas. La metodología de estudio aplicada fue la ingeniería didáctica con enfoque cualitativo, con el método de estudio de tipo exploratorio. Los resultados de la tesis de investigación exteriorizaron competencias como el razonamiento, la interpretación, representación y comunicación, pero también, haciendo énfasis en la matemática, el uso de lenguaje simbólico y la construcción de modelos matemáticos.

Hitt, F y Quiroz, S, (2017), en su artículo de investigación de la modelación matemática, muestran la importancia de esta estrategia de enseñanza en el proceso de comunicación entre los estudiantes para la realización de tareas complejas. Dicho estudio tuvo como propósito entender los procesos de comunicación que ayudan al aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas. Los resultados evidenciaron que las representaciones iniciales a las que llega el estudiante tienen un carácter funcional y espontaneo, y estas se ven modificada a través de su interacción con otros estudiantes a partir del dialogo. Pasar por alto dichas representaciones, conlleva a ignorar las concepciones de los estudiantes en su proceso de construcción de conceptos.

Así mismo, la investigación muestra el uso de la metodología Acodesa (Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión), que permitió a través de un ambiente sociocultural, que los estudiantes plasmaran sus representaciones de forma individual y posteriormente en equipos, lo que dio lugar al reconocimiento de la importancia de la comunicación entre los estudiantes. Cabe señalar, que un punto esencial de la investigación, la teoría de la actividad mostró como punto clave, el proceso de comunicación para la evolución de representaciones y construcción de conceptos. Otro aspecto relevante es que las características de cada individuo y sus formas personales de trabajo influyen en el desarrollo del proceso de diálogo, y con ello en el beneficio del trabajo en colaboración, por ello, resulta conveniente, realizar una previa caracterización de los estudiantes con la intención de obtener equipos heterogéneos respecto a las características identificadas. En conclusión, este estudio autoriza mediante ejemplos las nociones de representación funcional – espontánea y su alcance en la construcción de conceptos.

Comentado [Hh1]: Qué es

López, C y González S, (2014), en su trabajo *Reflexiones docentes a partir de actividades de modelación matemática*, para optar al tirulo de Licenciado en

Educación Básica con énfasis en Matemáticas, de la Universidad de Antioquia, tuvo por objetivo centrarse en las reflexiones emergentes de los docentes cuando participan en actividades de modelación matemática, ilustrando como esta estrategia de enseñanza invita a estudiar matemáticamente situaciones de la vida diaria para darle sentido a la matemática como tal, desde la dirección de la realidad de quien modela, potenciándola como una herramienta para concientizar, responsabilizas y razonar la vida cotidiana.

Roldán (2013), en su trabajo de investigación *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*, para obtener el grado de maestro, en la Universidad Nacional de Colombia, tuvo como objetivo la realización de una propuesta de intervención para el manejo del concepto de función lineal aplicable en situaciones de la cotidianeidad. El trabajo representó un diseño no experimental de enfoque cualitativo a partir de una revisión documental, concluyendo que el aprendizaje de dicho concepto es una herramienta capaz de emplear una gran variedad de ciencias mediante el uso de las matemáticas. Esto también representó un medio para el estudio y análisis de la modelación matemática, con problemas relacionados al desarrollo del pensamiento variacional.

García (2004), en la investigación *La modelación matemática en el proceso de enseñanza – aprendizaje del cálculo diferencial*, para obtener el grado de maestría en la Enseñanza de las Ciencia con especialidad en Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Nuevo León en la Facultad de Filosofía y Letras y de ciencias Físico – Matemáticas, tuvo por objetivo determinar una estrategia metodológica que le permita a los profesores utilizar la modelación matemática para el estudio de conceptos, operadores y ecuaciones diferenciales en el nivel universitario. La investigación evidencio que una estrategia requiere de un cambio de mentalidad por parte del profesor para que utilice procedimientos de forma creativa y se logre pasar de una enseñanza de conocimientos particulares al desarrollo de un proceso de enseñanza aprendizaje, así como de la guía a los alumnos para que comprendan la variedad de facetas del entorno y esto contribuya al desarrollo de la curiosidad intelectual, el sentido crítico y favorezca la autonomía.

Por otra parte, concluyó que, al utilizar a la modelación matemática como estrategia metodológica, el profesor debe guiar al estudiante a que descubra relaciones y propiedades matemáticas por sí mismo, que asegure adquiera experiencia con las entidades y relaciones matemáticas para avanzar con el razonamiento deductivo y enseñe a plantear problemas, establecer datos y reflexionar resultados.

2.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Aun cuando en el campo de la pedagogía y la didáctica hay una gran variedad de metodologías que guían la labor docente, es complejo adaptar alguna que permita el cumplimiento de objetivos o competencias. Específicamente en la enseñanza de las matemáticas, a pesar de las herramientas tecnológicas disponibles actualmente, las nuevas reformas y orientaciones didácticas que promueven los programas de estudio, todavía no se ha logrado desarrollar de la mejor manera las competencias matemáticas básicas en los alumnos, lo cual queda evidenciado en las evaluaciones trimestrales y evaluaciones nacionales.

Son diversas las metodologías que existen para la enseñanza de las matemáticas, metodologías que presumen de ser nuevas e innovadoras, que prometen buenos resultados y pretenden facilitar la labor docente contraponiéndose a la enseñanza tradicional. Tras la mayoría de estos métodos innovadores o novedosos, hay metodologías que comparten una característica en común y es la resolución de problemas, Schoenfeld (2016) usa el término problema para hacer referencia a una tarea compleja, tarea que el individuo trata de hacer. También hace la afirmación de que virtualmente todos los problemas que se les plantean a los estudiantes en sus estudios de las matemáticas no son realmente problemas, sino ejercicios que pueden ser resueltos en corto tiempo.

Una de las causas del bajo rendimiento escolar es precisamente la separación o la no relación entre la escuela y el entorno del estudiante, es por ello que resulta una problemática no aplicar un enfoque resolutivo funcional adecuado, porque entonces se está dejando que el alumno resuelva problemas que no tienen relación contextual con su entorno. Sobre todo, al estudiar conceptos complejos como lo es el de función, no se debería continuar con prácticas educativas que hagan del aprendizaje de la matemática una actividad alejada del entorno.

Ante este análisis, López, C. y González S. (2014) consideran que una forma de potenciar a la matemática como herramienta para que el estudiante se desenvuelva en forma efectiva, consciente, responsable, razonada y critica en su diario vivir, es llevar a cabo el proceso de modelación matemática como método de enseñanza, debido a que estudiar matemáticamente situaciones de la vida real no solo se trata de darle sentido a las matemáticas desde aspectos de la realidad o entorno de los estudiantes que modelan.

A pesar de que existen investigaciones que tratan acerca del uso de la modelación matemática en el aula, se desconoce alguna que muestre cómo potenciar el aprendizaje del proceso de modelación a partir del desarrollo del concepto de función, por esta razón, a partir de la pregunta: ¿A través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, se potencia el aprendizaje del concepto de función?, direccionó este proceso investigativo.

2.4 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este estudio es mostrar la enseñanza de la matemática a través de proceso de modelación utilizando la metodología Acodesa, con estudiantes de primer grado de educación secundaria.

Específicamente este proyecto de investigación pretendió:

a) Conocer cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social.
b) Identificar las dificultades del estudiante al resolver tareas de modelación.

c) Analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes conforme a la metodología Acodesa, mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto.

.

2.5 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se realizó después de haber observado que la mayoría de los docentes de la academia de matemáticas de los distintos grados en la institución no tuvieron la oportunidad de acercarse a la modelación matemática desde procesos de formación, como con la primera generación de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. El tomar a la modelación como una invitación a los docentes, a estudiar matemáticamente situaciones de la vida real, contribuye a que su práctica sea reflexiva, además de dar sentido a las matemáticas desde aspectos de la vida de los estudiantes.

Tanto la enseñanza, como el aprendizaje de las matemáticas, no deben solo basarse en que el alumno aprenda contenidos matemáticos conceptuales y procedimentales, también debe haber estrategias que permitan la construcción de valoraciones desde un determinado caso, problema o situación, que tenga un contexto apoyado en la realidad en la que viven los estudiantes, por estrategias se hace referencia al proceso de modelación matemática.

Se ha considerado el concepto de función para la potenciación del aprendizaje del proceso de modelación debido a que esta idea está inmersa en toda la matemática, tanto en la teórica como en la aplicada, como aquella ciencia que describe fenómenos y acciones de la cotidianeidad. Con esta investigación se pretende demostrar la eficiencia del empleo de una metodología como lo es Acodesa, que permita el desarrollo del pensamiento funcional, o bien, el aprendizaje y construcción del concepto de función, a partir de la modelación de situaciones con situaciones del contexto de los estudiantes.

Los últimos resultados arrojaos del segundo trimestre, confirmaron que los estudiantes de la escuela secundaria Lic. Abel Salazar, del primer grado, donde se llevó a cabo el estudio, necesitan la adquisición de contenidos básicos en dos de los tres ejes del currículo, tanto en *Número, álgebra y variación*, como en el de *Forma, espacio y medida*, sobre todo en el primero, el cual es parte del bloque dos con los temas de Ecuaciones, Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes, proporcionalidad y funciones.

3 MARCO TEÓRICO

Distintas investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la modelación matemática como metodología de enseñanza, la resolución de problemas, la enseñanza del concepto de función, el aprendizaje en colaboración, la metodología Acodesa, conforman este apartado del marco teórico, con la finalidad de mostrar una perspectiva general de lo existente al tema de investigación, así como la función de referente bibliográfico.

Como fue indicado en el planteamiento del problema, el aprendizaje del concepto de función abarca muchos aspectos, por lo que en los últimos años ha sido el centro de varias investigaciones de la didáctica de la matemática, como lo es el trabajo de Campeón (2016), titulado "Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica", en el cual muestra la forma en como los estudiantes de octavo grado aprenden el concepto de función gracias a la modelación de situaciones problema del contexto, identificando que la problemática inicial es que no se generan ambientes significativos para el alumno que le permitan aprenderá través de diferentes registros semióticos que el concepto brinda. Le investigación permitió concluir que, para hacer frente a estas dificultades, el docente debe incorporar situaciones que el estudiante pueda comprender y relacionar con su contexto, evitando la recreación tradicional de la definición del concepto de función, omitiendo el estudio de la variación, como factor importante del desarrollo del pensamiento variacional.

A pesar de la diversidad de las poblaciones con la que se realizan las investigaciones referentes al tema de interés, se evidencia que hay una marcada preocupación por cómo enseñar y lograr el aprendizaje de este objeto matemático, debido a que de este concepto en específico derivan otros temas de relevancia de esta asignatura.

Las investigaciones sobre modelación matemática muestran que, como proceso o metodología, potencia tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, son pocos los estudios, ya que a veces, el método a seguir para su desarrollo no es el adecuado. Por ello, la metodología Acodesa se eligió para ser un vehículo dinamizador del proceso, que, conforme a sus etapas, trabajo individual, trabajo en equipo de discusión y validación, discusión científica, el trabajo individual de reconstrucción y validación y la institucionalización, se analice la enseñanza de la matemática a través de procesos de modelación en un ambiente de interacción social.

Para la investigación, el problema se relaciona con el aprendizaje del concepto de función con estudiantes de primer grado de educación secundaria, a través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, analizado desde la teoría de la actividad en el proceso del aprendizaje en colaboración de Leontiev (1975). Por ello, a continuación, hago una revisión bibliográfica de las siete grandes categorías conceptuales en las que se enmarca la presente investigación:

Función, Metodología Acodesa, Modelación matemática como estrategia didáctica, Representación, Proceso de aprendizaje, Aprendizaje en colaboración, Proceso de aprendizaje equitativo.

3.1 Concepto de Función

Determinar aquellos elementos que componen al concepto de función implica hacer énfasis en primer lugar en las dificultades que presentan los alumnos al abordarlo, así como aquellos conocimientos previos o contenidos necesarios para su estudio.

3.1.1 Dificultades asociadas al concepto de función

Diversas investigaciones muestran que hay distintos obstáculos que se le atribuyen al aprendizaje del concepto de función y una de las principales tiene que ver con la diversidad de formas en la que es representado el concepto. La contrariedad se presenta por el hecho de que las representaciones no siempre se dirigen a una relación de correspondencia entre dos variables.

Otras de las dificultades a las que suelen enfrentarse los alumnos son:

- El tratamiento que se le da al concepto en el aula suele ser de manera rápida y sencilla.
- El docente se limita a caracterizar el concepto, dar a conocer sus representaciones y considerar el proceso evolutivo que sufre.
- La transición entre las formas de representación no es clara.
- La diferencia entre una ecuación y una función.
- Distinción entre variables e incógnitas.
- Identificación del cuándo y porqué un problema debe ser resuelto o descrito con ecuaciones o funciones.
- El tratamiento de ejercicios de funciones es similar al de ecuaciones, lo que dificulta la apropiación y definición del concepto de función.
- La variedad de representaciones del concepto de función, como el algebraico y el gráfico, mismos utilizados para la ecuación.
- Por último, la carencia de análisis y tratamiento de situaciones significativas durante su aprendizaje, que impliquen el pensamiento variacional, como aquella forma de correspondencia entre dos variables.

3.1.2 Antecedentes para el aprendizaje del concepto de función

Hablar de los antecedentes del concepto, eje de esta investigación, es hacer referencia a los conocimientos previos, conocimientos que el alumno ya posee respecto al contenido concreto que se propone aprender, conocimientos que abarcan información de manera directa e indirecta y se relacionan con él.

El aprendizaje de un nuevo contenido es, en palabra simples, el producto de una actividad mental constructiva que lleva a cabo el alumno, actividad mediante la cual surge un proceso subjetivo de retención y uso de información. Esta actividad mental no puede iniciar de la nada, construir un nuevo significado, la comprensión de un nuevo tema, en concreto, el hecho de aprender, tiene que atravesar necesariamente por distintos aspectos, de los cuales se hace énfasis en dos, la disposición del alumno hacia el aprendizaje, y las capacidades y estrategias como facultades que posea.

Los elementos necesarios para la apropiación del concepto de función han sido abordados a lo largo del primer año de educación secundaria, los cuales son el manejo del plano cartesiano, el uso de representaciones, como el verbal, la recta numérica, etc. Los conocimientos previos para el concepto de función; par ordenado, escala, variables, letra evaluada, etc., se abordan bajo el eje de Número, álgebra y variación, con los temas de ecuaciones, Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes, y Proporcionalidad, que, en conjunto, forman parte de la construcción del concepto.

En general, se requiere del conocimiento de las propiedades básicas de los números, así como de sus distintas clases, para llegar a la premisa de que una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real. Spivak (1992), en el libro Calculus, menciona que una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que pueda ser expresada mediante una formula algebraica ni siquiera mediante una condición uniforme aplicable a todo número; ni es tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica.

3.2 Conjunto de elementos de la función

3.2.1 Pares ordenados

Un par ordenado (a, b) debe quedar determinado por a y b y por el orden en que $a\ y\ b$ vienen dados:

$$si\ (a, b) = (c, d), entonces\ a = c\ y\ b = d.$$

No es realmente preocupante saber acerca de lo que es un par ordenado, ya que se pueden tratar introduciendo simplemente (a, b) como un término sin definir y adoptando como axioma la propiedad básica, axioma refiriéndolo como un enunciado matemático para marcar pauta a otros de manera lógica. Por consiguiente, un par ordenado lo podemos ver como una pareja (a, b) que establece un criterio de orden, donde su primer elemento a es denominado abscisa y el segundo b ordenada. Los pares ordenados pueden ser representados simbólicamente tanto tabular como gráficamente.

3.2.2 Escala

Uno de los elementos importantes con relación a funciones y en específico a su representación gráfica, es la de escala, característica que usualmente no se tiene en cuenta a la hora de graficar. La escala se utiliza para la representación de unidades de medida, como por ejemplo la distancia en metros o el tiempo en minutos. Cada parte puede tener un valor determinado y cada eje del plano cartesiano puede tomar escalas diferentes.

3.2.3 Las letras y las ecuaciones

Al trabajar con ecuaciones su enseñanza se basa generalmente en el cambio de lugar de términos o bien, la aplicación de modelos como lo es el de la balanza, operar a ambos miembros de la igualdad. Antes de presentar a las ecuaciones en un problema, usualmente se realizan actividades cuyo objetivo es el de la traducción de expresiones de lenguaje común al lenguaje simbólico o algebraico, que es lo que se necesita saber para modelar matemáticamente una situación.

Desde un enfoque didáctico, la enseñanza de esta trasposición de lo común o coloquial a lo algebraico, representa un problema, ya que se enseña antes de que el alumno identifique que dicha acción la necesita, lo que resulta una dificultad para reconocer o identificar las oportunidades de uso de esta estrategia o herramienta.

En una investigación del año 2012, por la Universidad Estatal Paulista, dirigida al uso de las letras en álgebra y los errores manifestados por los estudiantes de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas, citan a Dietrich Küchemann, ingeniero que habla del uso de las letras como fuentes de errores, para caracterizar la forma en la que los estudiantes traducen las representaciones literales en diferentes contextos algebraicos, a partir de un instrumento diseñado, donde la evaluación de la prueba se organiza de acuerdo a los niveles de entendimiento en el empleo de las letras.

Letra evaluada. A la letra se le determina un valor numérico.

Letra ignorada. Se reconoce la validez de la letra sin darle un significado.

Letra como objeto. Objeto con valor.

Letra como incógnita de valor específico. Letra como cifra única con la que se puede operar a pesar de ser desconocida.

Letra como número generalizado. Incógnita que puede tomar diversos valores.

Letra como variable. Representación de un rango de valores con relación entre sus conjuntos de valores.

3.3 Construcción del concepto de función

Sin duda, el concepto más importante de la matemática es el de función, y al hablar de ello, es mencionar que el concepto de función es de una gran generalidad, por tal no se puede iniciar de lleno a la definición o construcción propia de lo que es función. Una definición provisional es lo apropiado para ilustrar una noción intuitiva, por lo tanto, se definirá provisionalmente a una función como una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real.

A partir de ejemplos debería poderse definir lo que es una función, como una forma de ilustrar y ampliar la definición, por ejemplo: La regla que asigna a todo número su cuadrado, la regla que asigna a todo número x su mitad, o bien, la regla que asigna a todo número t su tercera parte más t. Con estos y otros ejemplos debe quedar claro al alumno que una función es una regla cualquiera que hace corresponder número a ciertos otros números, además de que una regla no necesariamente será expresada mediante una expresión algebraica y mucho menos como una condición general aplicable a todo número. Además de lo anterior, se debe hacer énfasis en que no es necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica, y que esta puede prescindir de algunos números y que incluso no puede quedar del todo claro a que números es aplicable la función.

Comúnmente en la práctica una función se designa mediante una letra "f", lo cual hace que se siga un orden, con las letras "g" y "h", pero en fin se puede ocupar cualquier letra. Si f es la función, entonces el número que f asocia con x se designa por $f(x)$, leído como valor de f en x. Si se designa una función por x, es preciso elegir alguna otra letra para designar el número. Es importante dejar en claro que el símbolo $f(x)$ tienen sentido únicamente cuando x pertenece al dominio de f ya que para otros x el símbolo $f(x)$ no estará definido.

Una función puede ser definida como una regla, pero también como una asociación entre números, sin embargo, al definirla como una regla demostrará la falta de comprensión del concepto y al tomarla como una asociación, dará paso a objeciones hechas contra “regla”, por el hecho de que la definición sigue siendo muy general. A partir de lo anterior se puede cuestionar de una función si es una regla o una asociación, pero independientemente de ello resulta más importante responder a qué es aquello que falta saber de una función para conocer todo al respecto, y es el hecho de que para todo número x hace falta saber cuál es el número $f(x)$.

3.4 Adquisición o apropiación del concepto de función

Adquirir un concepto matemático tiene que ver con un mecanismo de construcción e identificación a través de ejemplos, por ello, se sugiere que al estudio de un concepto tan amplio como lo es el de función se debe iniciar con varios ejemplos y contraejemplos con el fin de que el alumno identifique características importantes, así como aquellas que no.

Jerome Bruner, habla de un modelo para aprender conceptos, el cual implica un proceso estratégico inductivo de formulación sucesiva de hipótesis sobre los atributos que componen una categoría. Dichas hipótesis hacen referencia a planteamientos a los que se les atribuye contraejemplos para una reformulación de la hipótesis inicial. En palabras simples, esto quiere decir que en cuanto el alumno vaya construyendo hipótesis irá definiendo un concepto de forma cada vez más precisa.

Desde el punto de vista, el aprendizaje o apropiación de un concepto no es repentino o súbito, al contrario, se trata de un proceso cognitivo analizable que lleva a nuevos procesos que impulsan la actividad.

Para estudiar un concepto se debe iniciar con una variedad de ejemplos y contraejemplos, por ende, construir la definición de este. Entonces, en el caso del concepto de función, se puede decir que su construcción, así como su aprendizaje, se logra cuando se logra definir el concepto en sí, se modelan situaciones mediante expresiones algebraicas, tablas o gráficas y la identificación de variaciones de la situación o problema a partir de la gráfica construida, en donde se identifique el hecho de que cada punto de la función en el plano cartesiano representa la relación de dependencia entre los elementos del conjunto de todos los a para los que existe b.

El aprendizaje del concepto de función también se identifica cuando se generalizan procesos para la simplificación de la construcción de las gráficas de una función, como el reconocimiento de los puntos donde cortan los ejes, así como cuando se llega a la comprensión de que el dominio de una función es el conjunto de valores a los que la función asigna valores y, además, que el rango es el conjunto de valores obtenidos.

3.5 Definición matemática de función

Función es un concepto muy importante en casi todas las ramas de la matemática moderna, ya que permite la modelación de distintos fenómenos como el crecimiento de una planta, los costos en el mercado, compras, cálculos de áreas y perímetros, en general, se habla de contestos no únicamente matemáticos, sino también de las ciencias. Para el objeto de esta investigación se tomaran las funciones de la forma $f(x) = ax \ y \ f(x) = ax + b$ como modelos lineales simples, ya que representan uno de los primeros acercamientos al concepto de función.

Definir “función”, es referir que se trata de una colección de pares de números con la propiedad de que si $(a, b) \ y \ (a, c)$ pertenecen ambos a la colección, entonces $b =$

c; que en palabras más simples se dice o establece que la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento. A propósito de esta investigación se contemplará el concepto de función definido por Spivak (1992):

Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.

(pág., 60)

A partir de la definición con rigor anteriormente escrita se hace énfasis en que lo importante de una función f es que $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio. Además, aunque una función haya sido definida como una colección de pares, esto no implica tomar a la función como una regla.

3.6 Elementos de una función

Conforme a la definición anterior, una función la componen los siguientes elementos:

Dominio: conjunto de todos los a para los que existe b tal que (a, b) está en f.

Contradominio: conjunto de b, recorrido o contradominio de f.

Rango: conjunto de los elementos del contradominio, o bien, de todos los valores dependientes posibles que la relación produzca.

Grafo: estructura matemática de representación. Conjunto de parejas ordenadas pertenecientes a f.

Formas de representar una función

Toda colección o conjunto de pares de números o función f, puede ser representada en una expresión algebraica, una tabla de valores, una gráfica y lenguaje común.

Expresión algebraica: coeficientes y variables relacionadas mediante operaciones aritméticas.

Tabla de valores: tabla que establece pares ordenados entre los elementos del dominio y contradominio.

Gráfica: El trazado de una función se reduce a trazar cada uno de los pares de números de una colección. El dibujo obtenido recibe el nombre de gráfica.

Lenguaje común: descripción de una regla con una definición en palabras simples.

3.7 Pensamiento funcional y/o variacional

Investigaciones sobre la dependencia entre variables con relación al análisis histórico-epistemológico y didáctico del concepto de función señalan que estimular el pensamiento funcional en estudiantes de educación secundaria debe iniciar del análisis de situaciones que manejen relaciones de dependencia entre variables y mantengan cambios frecuentes.

Dentro de las investigaciones, se hace mención de ciertos obstáculos de aprendizaje con relación a la apropiación o construcción del concepto de función, respecto a la dependencia entre variables y su identificación, como lo es la falta de identificación de propiedades generales de la función a partir de su gráfico.

La importancia del pensamiento variacional se centra debido a su relación con el pensamiento numérico, espacial y métrico, así como con procesos de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana o situaciones en contexto, por ejemplo, con el salario de un comerciante respecto de lo que vende, el taxímetro de una unidad de transporte público, etc.

Lasalvia y Piquet (1996) tratan la idea de función como aquella que surge a partir del estudio o fenómenos de cambio, expresadas a partir de las distintas representaciones de función, como el algebraico, el de una tabla de valores y el gráfico, para el análisis de las características de una función. El tema de funciones guarda gran relación con la actividad cognitiva de establecer relaciones entre cantidades que varían, el desarrollo de este pensamiento no debería enfocarse en saber de memoria la definición formal del concepto de función, se debe hacer explicita la relación entre variables y conjuntos con los que se esté trabajado para que el alumno llegue a la abstracción de razonamiento hacia la generalización de una expresión hallando una regla que explique o describa la relación funcional entre las variables o conjuntos estudiados.

3.8 Aprendizaje de las matemáticas

Schoenfeld proponía que aprender a pensar matemáticamente, como una forma de ser matemáticamente competente, tenía que ver con el dominio de una gran variedad de conocimientos y estrategias, así como el hecho de poseer un pensamiento flexible donde una persona pueda ser capaz de usar de manera eficiente sus conocimientos. Trigo cita a Schoenfeld (1994), quién indica que aprender a pensar matemáticamente significa el desarrollo de un punto de vista matemático que valore el proceso de matematización, abstracción y de la predilección de su aplicación, así como del desarrollo de competencias con las herramientas de trabajo para usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras del sentido matemático (p, 60).

El objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas es que el alumno pueda llegar a responsabilizarse de su propio aprendizaje, bajo esta idea, es muy común asociar el aprendizaje con la enseñanza, o viceversa, sin embargo, se tiene que dejar en claro que no todo proceso de enseñanza genera un proceso de aprendizaje, por ejemplo, en matemáticas, un área donde el estudiante aborda objetos de forma abstracta y los docentes asumen que a quien se enseña tiene la estructura mental requerida para cumplir con el objetivo de una determinada tarea, como el manejo de los distintos tipos de representación de un objeto matemático, como lo es el concepto de función con sus representaciones algebraica, tabular, gráfica y común.

Cuando se habla de aprendizaje se piensa en la adquisición de conocimientos, se desea que el alumno adquiera gustosa y fácilmente conocimientos duraderos.

Según Piaget, (1971) el aprendizaje ocurre cuando se construyen esquemas mentales de asimilación para abordar la realidad, por ende, el concepto de aprendizaje es muy general ya que puede significar funciones diversas, como referirse al aprendizaje de “memoria”, al adquirir habilidades, adquirir formas externas de conducta, etc. El aprendizaje no se limita a una etapa determinada del desarrollo humano, y decimos que hemos aprendido cuando la experiencia que se adquiere determina nuestra conducta, así mismo, se puede decir que se puede concebir el aprendizaje como la modificación de la conducta condicionada por la experiencia.

Según lo que se aprende, se pueden señalar dos formas distintas de aprendizaje, la adquisición de conocimientos y la adquisición de habilidades, ya que el aprendizaje tiene un aspecto cognoscitivo, teórico, y otro práctico, que mantiene relación con la acción, sin embargo, es el maestro quien debe hacer comprender al alumno que el aprendizaje inteligente es superior al mecánico porque muchas veces lo aprendido por habilidad, como lo mecánico, se aplica mal o no se puede aplicar en lo absoluto.

La matemática, en conjunto con su enseñanza, hacen necesaria una reflexión en torno a aprendizaje, Cobb (1988) citado por Trigo en los fundamentos cognitivos de la resolución de problemas, sugiere que una meta importante de la instrucción matemática es proveer las condiciones que ayuden a los estudiantes a desarrollar una estructura más poderosa. A partir de esto, se puede hacer referencia a un cambio en la educación matemática, cambio donde exista la necesidad de cuestionar las suposiciones acerca de la naturaleza de las matemáticas.

La propuesta de aprender matemáticas que identifica la resolución de problemas, el análisis de situaciones, e incluso la modelación, debe reconocer a las matemáticas como un conjunto de conocimientos no terminado ya que se está tratando con una disciplina en constante extensión, tanto de resultados como de métodos y principios. El estudiante en el aprendizaje de esta asignatura debe discutir, debatir estrategias, proponer y emplear ejemplos y contraejemplos, criticar, valorar, compartir y divulgar resultados, en general, hacer crecer ideas matemáticas a través de especulaciones, discusiones y criticas de diversos argumentos. El aprendizaje de las matemáticas bajo este sentido debe incorporar elementos que describan la práctica real de desarrollar matemáticas.

3.9 Aprendizaje en colaboración

Ha quedado claro que en la mayoría de las ocasiones el estudiante limita el desarrollo de sus estrategias de aprendizaje a lo memorístico, a lo descriptivo de conceptos, logrando su apropiación o aproximación desde sus características externas, conforme a un poco manejo de lo explicativo e interpretativo. Un elemento a destacar en el desarrollo de estrategias de aprendizaje, es el del establecimiento de la relación entre la actividad y la comunicación como un proceso de socialización, que son ideas para propiciar la interacción, el intercambio de ideas entre alumnos y profesores, de la discusión nace el pensamiento, Leontiev (1975).

Guiar a los estudiantes a un proceso de socialización permite y facilita la interiorización de sus acciones, un tránsito de lo colectivo a lo individual, de lo externo a lo interno, ya que, en el aprendizaje, el lenguaje, la comunicación, el intercambio social, representan un mediador en el desarrollo de lo intelectual, guardando así una gran relación entre el contexto del alumno y la actividad a desarrollar. Cuando el estudiante explica su conocimiento aprende a operar con él, logrando una mejora en sus recursos para comunicarse, por ello se debe propiciar, como un acto consciente e intencional, que el alumno verbalice, describa y explique sus ideas.

El aprendizaje en colaboración forma parte del marco teórico, por el hecho de que es parte fundamental de la evolución de ideas y representaciones que propongan los estudiantes al analizar una situación o problema matemático, Leontiev (1975), sobre la actividad en el proceso de aprendizaje en colaboración, menciona en su teoría como elementos importantes, la orientación y la ejecución. En primer lugar, la orientación incluye necesidades, motivos y tareas, en donde al sujeto, estudiante, se le presenta una actividad, cuyo objeto radica como una forma de satisfacer una necesidad y dicha necesidad estimula la actividad del sujeto y la dirigen, por ser una condición interna. Por ello, la necesidad se ve como objeto del conocimiento psicológico en su función orientadora, el objeto o fin de la acción por sí misma no origina un actuar del sujeto, entonces, para que una acción surja y se realice, es necesario un objeto frente al sujeto, un propósito, en su relación de dicha actividad con el motivo.

Dado que la asimilación de conocimientos nuevos y de habilidades provoca cambios al desarrollo cognitivo y modificaciones, en este eslabón de orientación, la tarea se debe manifestar por la unidad entre el objetivo de la actividad y las condiciones de su logro. Las acciones de la actividad responden a una tarea, la tarea es la finalidad dada en determinadas condiciones. Por medio de la tarea, se transforman las cosas con las que actúa el sujeto o se transforma el propio sujeto actuante (Montealegre, 2005). En conclusión, necesidades, tareas y fundamentos propuestos a conseguir, corresponden a la orientación, como elemento de la teoría de la actividad.

En cuanto a la ejecución, como segundo elemento de la teoría, que está constituido por acciones y operaciones, se dice que la acción, tiene estrecha relación con la finalidad, donde el sujeto acota y se concientiza de las finalidades, así las operaciones se relacionan con las condiciones, como aquellos procedimientos que permiten efectuar una determinada acción, por ello, se establece que la operación no puede ser separada de la acción, ni la acción de la actividad.

Hitt y Quiroz, (2017) ponen de manifiesto que un proceso de aprendizaje pasa por dos etapas, una nueva en la que mente y sentidos encuentran nuevas acciones, y otra en la que dichas acciones son asimiladas y se es capaz de reproducirlas. En esta idea, ambos intentan hacer una diferencia entre acciones y operaciones conforme a lo establecido por Leontiev, concluyendo en que las acciones enlazan la actividad mental y física según sea el contexto, y que cuando dichas acciones se comprenden con el cuerpo y la mente estas se convierten en operaciones.

Bajo la idea de que el lenguaje es un medio para asimilar objetos, reconocerlos y recordarlos, así como para planificar y regular acciones, desde una perspectiva sociocultural, Leontiev refería que la evolución de una acción a una operación se veía limitada al no causar comunicación entre los estudiantes, por ello, cuando producen representaciones espontaneas, naciente de sus acciones, podía no convertirse en una operación si no estaba enlazada al conjunto de acciones para transmitir de manera eficiente un mensaje, información u opiniones.

3.10 Representaciones desde una perspectiva sociocultural

Al tratarse de una investigación que se basa en el análisis de la construcción social del conocimiento matemático surgen dos puntos importantes, los procesos de modelación matemática y la noción de representación, esto debido a que al plantear situaciones problema, cuando se trabaja en colaboración, ambos elementos surgen evidenciando su importancia de ser analizados.

Una representación, en términos generales es un signo, un símbolo, una imagen e incluso una palaba, que permite pensar en una determinada cosa. Sin embargo, para el marco teórico de esta investigación, se tomarán en específico, el tipo de representaciones que los estudiantes producen cuando se les plantea una situación problema en un marco de modelación matemática. Los conceptos matemáticos, al no ser objetos reales, se debe recurrir al uso de distintas representaciones para su estudio, que no vean el objeto matemático en sí, sino que ayude a su comprensión.

Por una parte, se habla de las representaciones semióticas, que, en la matemática, son importantes para fines de comunicación, así como para el desarrollo de la actividad matemática. Distinguir un objeto matemático como lo es el concepto de función, de sus representaciones, graficas, expresiones algebraicas, etc., permite la comprensión del objeto mismo, pero, además, debe tenerse en cuenta que las representaciones semióticas deben distinguirse de las representaciones mentales.

Para esta investigación se tomarán las representaciones espontaneas, como aquellas que emergen en procesos de modelación y resolución de situaciones no rutinarias, como aquellos problemas matemáticos con varios métodos de solución o que requieren más que solamente la aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos para resolverlos, ya que estos pueden constituir un recurso para la discusión de actividades que muestren el uso de conjeturas, contraejemplos y estrategias. Este tipo de problemas también son conocidos como mal estructurados y por lo general están planteados con situaciones que se encuentran en la vida diaria, algunos poseen demasiada información y algunos otros incluso carecen de ella, por ello, quien intente resolverlos deberá reformularlos o replantearlos, para así proveer o eliminar información necesaria para el desarrollo de estrategias para su resolución.

Hitt y Quiroz (2017) reconocen la importancia de profundizar en teorías que consideren como fundamentales en el proceso de aprendizaje equitativo las representaciones no institucionales que emergen de manera intuitiva cuando se transita por procesos de modelación matemática y de resolución de problemas, y de su evolución durante los procesos de comunicación.

La importancia de tomar en cuenta las representaciones de carácter funcional y espontaneo, es que evolucionan en procesos de comunicación, y en este documento será de utilidad analizarlas ya que emergen de manera natural en los procesos de modelación a través de procesos de comunicación, lo cual favorece una trasposición mediante un proceso equitativo, hacia representaciones de carácter institucional.

3.11 Metodología Acodesa

La enseñanza a través de procesos de modelación matemática, como propuesta, considera importante la noción de representación funcional espontanea, así como su evolución durante el trabajo en colaboración en el aula, para responder a la pregunta, ¿a través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, se potencia el aprendizaje del concepto de función?

Esta metodología de Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión (Acodesa), resalta la importancia de la aportación de ideas y conocimientos de los integrantes de un grupo o comunidad entre sí, de fórmulas comunicativas científicas, así como de la utilización del pensamiento activo, aquello que permite pensar y debatir de forma interna, además, esta estrategia se soporta teóricamente en la teoría del aprendizaje ligada a la construcción de esquemas cognitivos.

Hitt y Quiroz, (2017) organizan la práctica en el aula en cinco etapas que constituyen la metodología Acodesa, el trabajo individual, trabajo en equipo, la discusión como debate científico, el trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión y la institucionalización del conocimiento, como se muestran en la siguiente figura (ver figura 3.

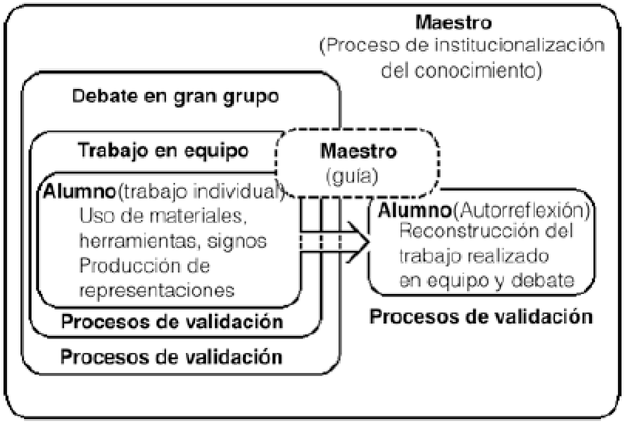


Figura 3. Metodología de enseñanza Acodesa

En la figura anterior se observan las cinco etapas que constituye la metodología de enseñanza Acodesa, la cuales refieren lo siguiente:

Etapa 1. Trabajo individual. Producción de representaciones funcionales espontaneas para comprender la tarea o actividad. Que el alumno trabaje o desarrolle ideas de forma individual al analizar un problema o situación en contexto permite que prepare argumentos para una discusión donde sus ideas tengan un impacto importante. Cabe decir que, en esta etapa, las representaciones surgen de manera espontánea y natural, gracias a sus creencias o conocimientos previos.

Etapa 2. Trabajo en equipo sobre la misma tarea. Procesos de discusión y validación. Refinamiento de las representaciones funcionales espontaneas. Bajo el marco teórico de la actividad, como se mencionó con anterioridad, Leontiev refería que la evolución de una acción a una operación se veía limitada al no causar comunicación entre los estudiantes, por ello, comunicación y practica deben considerarse como inseparables para permitir la evolución de las representaciones funcionales espontaneas que surgieron durante la primera etapa de trabajo individual. En esta segunda etapa, el proceso de validación, así como el refinamiento y evolución de las representaciones, surgen en el momento que los estudiantes intercambian ideas. Prusak, Hershkowits y Schwartz, (2013) citados por Hitt y Quiroz (2017), indican que es importante que los estudiantes trabajen en equipos de tres personas y, además, que haya distribución del trabajo, el uso de tecnología por una persona, el uso de materiales por otra y la escritura del resumen de las acciones realizadas durante el intercambio de ideas por otra.

Etapa 3. Discusión (podría provocar un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). En esta etapa el docente debe propiciar un ambiente de discusión científica, en donde la validación sea un elemento esencial que favorezca el aprendizaje colaborativo. Los equipos deberán exponer y defender sus resultados ante la clase. Las representaciones funcionales espontaneas pasan por una segunda etapa de refinamiento y por ello es importante que se llegue a un acuerdo en grupo sobre las ideas más importantes y válidas. Debido a que las discusiones en plenaria son complicadas de orientar, se debe procurar a aquellos estudiantes que consideren una compresión total de la situación en contexto sin que haya interiorizado en sus resultados y, por ende, en las recientes representaciones.

Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual (trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión). La metodología Acodesa cobra importancia en esta etapa porque el trabajo individual realizado al inicio y el elaborado en equipo puede ser omitido por el estudiante, así que, estabilizar el conocimiento de las etapas anteriores, se alcanzará siempre y cuando haya un periodo de reconstrucción, como una forma de autorreflexión de lo que se ha realizado hasta el momento.

Etapa 5. Institucionalización del conocimiento. Procesos de institucionalización y uso de representaciones institucionales. El profesor tiene la tarea de resumir los resultados a los que llegaron los equipos, mostrando la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discutir su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160).

3.12 Institucionalización del conocimiento

La institucionalización del conocimiento, última etapa de la metodología Acodesa, es una parte fundamental de esta investigación por que representa una síntesis de las producciones de los estudiantes, como una forma de generalización de las actividades realizadas. Brousseau explica que la institucionalización en términos generales, se trata de establecer y dar oficialidad al conocimiento referido en una actividad didáctica, este término refiere a la preservación del conocimiento, donde se observan reglas y procedimientos para organizar y garantizar saberes a través del tiempo.

Suele creerse que la institucionalización es un momento de la clase, asociado comúnmente al cierre de esta, sin embargo, se sostiene que acontece por periodos breves de intervención del profesor y los estudiantes durante el desarrollo de la clase, de manera cíclica mediante la verbalización para la orientación de la clase. Un punto importante argumentado por Ávila, A. (2001), en el maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana, es que las situaciones de enseñanza tradicional son situaciones de institucionalización, pero sin que el maestro se ocupe de la creación de sentido, bajo esta premisa, se dice que lo que se quiera dar a conocer, se explica y se verifica que se haya comprendido.

Si la institucionalización surge siempre y cuando en una situación se reconozca el valor de un procedimiento, es importante mencionar que también debe existir la búsqueda del establecimiento de relaciones entre los productos de los estudiantes con el saber científico esencial y permanente al objeto matemático, presentado siempre y cuando haya una relación entre el saber científico y el trabajo desarrollado.

Durante la institucionalización se debe estructurar, sistematizar y ligar las representaciones o productos que el alumno genere, con las situaciones desarrolladas en la clase, con el propósito de dirigir los resultados al saber cultural.

3.13 Modelación matemática como estrategia didáctica

A través del planteamiento de una situación problema donde surja la necesidad de la búsqueda de una solución, se generará un pensamiento diversificado con miras a su resolución, por el hecho de que dicha búsqueda proporcionara un objetivo para direccionar acciones. Las matemáticas con su relación de ser aplicables a situaciones o problemas de la vida real o del contexto de los estudiantes, ha sido un tema de interés a lo largo de los últimos años en la educación matemática, debido a esto, se ha venido investigando los procesos de modelación como estrategia didáctica, como una herramienta que posibilita el diseño de situaciones que permiten la reflexión, observación, discusión y construcción de conceptos matemáticos de manera significativa.

Biembengut y Hein, (2004), establecen que la matemática, con su arquitectura, permite la elaboración de modelos matemáticos, lo que posibilita una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno estudiado, (p.4). A partir de esta idea, se puede decir que un modelo matemático permite la comprensión y explicación del comportamiento de una determinada situación, el hecho de poder construir un modelo significa tener la capacidad de analizar, criticar y comunicar conocimiento, por esta razón, distintos investigadores en didáctica de la matemática han centrado sus esfuerzos por estudiar la construcción de modelos como una competencia matemática a adquirir.

Un modelo matemático además de ser un conjunto de representaciones numéricas, formulas, gráficos, ecuaciones algebraicas, tablas o diagramas, y relaciones matemáticas que explican un determinado problema o situación, se le conoce como un proceso cognoscitivo, por el hecho de usar operaciones mentales para procesar información, como una serie de sub-procesos o secuencia cíclica que traduzcan un determinado fenómeno.

Para Padilla (2021), la modelación matemática es un recurso para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En otras palabras, la modelación representa una actividad que forma parte de una estrategia para el manejo y representación de ideas abstractas, que permite la asimilación de conocimientos y a la vez los pone en práctica. La modelación como herramienta didáctica o mecanismo de construcción social de conocimiento, debe ser utilizada para que el aprendizaje se oriente a la realidad del estudiante y se apunte hacia la cognición matemática.

De este modo, se logra entender que la modelación matemática más que una herramienta o un proceso, es una metodología tanto de enseñanza, como de aprendizaje, que permite la construcción y comprensión de conceptos matemáticos.

En los últimos años, la modelación matemática ha generado importantes investigaciones que toman su proceso como una estrategia de enseñanza de las matemáticas, demostrando que su aplicación fuera del aula enriquece el papel de la asignatura, dando significado a las actividades curriculares, e influyendo en las creencias del estudiante, provocando interés por el estudio la misma.

Según Hitt y Quiroz (2017) la modelación matemática al ser un proceso que se desarrolla a partir de fases o etapas, es importante mencionar que el paso entre acciones y operaciones está determinado por un medio sociocultural del aprendizaje como por la promoción de tratamiento entre representaciones que llevarán a la evolución las representaciones funcionales espontaneas hacia las representaciones institucionales, como lo muestran en el siguiente esquema (*ver* figura 4), que representa un esquema propuesto para el estudio de un proceso de modelación con elementos de la teoría de la actividad.

El esquema parte de una situación problema (1), que será analizada para su comprensión y obtención de información, esto corresponde a la orientación, la cual promueve un pensamiento diversificado, provocando acciones (2a) como las representaciones funcionales espontaneas y las institucionales. El tratamiento y conversión de las representaciones pasa a un pensamiento dirigido a una meta u objetivo, operaciones (2b), que provoca la articulación entre representaciones y finalmente estimula la construcción de un concepto matemático.

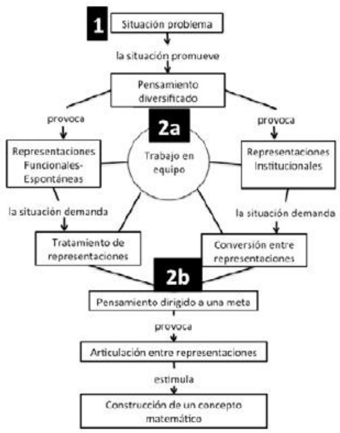


Figura 4. Proceso de modelación. Hitt y Quiroz (2017).

En la construcción de un modelo se generan análisis constantemente, se utilizan herramientas matemáticas para el desarrollo de una solución teórica a un problema o bien, para la construcción de un objeto o concepto matemático, de la cual se generan conclusiones respecto al modelo. De acuerdo con Villa y Mesa (2007), citado por Campeón (2016), mencionan que el proceso de modelación es un sistema cíclico, donde a partir de algún sistema del mundo real se obtiene información necesaria para construir un modelo (p. 70). Al construir el modelo, lo que continua es la interpretación de la evolución de ciertas representaciones, ideas y conclusiones, para que desarrolle en el estudiante nuevas formas de ver la actividad matemática.

4 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Tipo de estudio

El estudio a realizar con esta investigación de tipo cualitativo se enmarca en un estudio de caso, que pretende mostrar la enseñanza de la matemática a través de procesos de modelación, conforme a la metodología Acodesa. La investigación tuvo lugar en la Escuela Secundaria Oficial Núm. 0086 Lic. Abel C. Salazar, turno matutino, ubicada en el Estado de México en el municipio de Lerma de Villada. La población elegida fueron estudiantes de primer grado (la escuela secundaria consta de tres grados con cinco grupos cada uno) que cursaban la asignatura de matemáticas.

La actividad diseñada consta de una serie de tres situaciones problema que se aplicaron a lo largo de cuatro semanas para promover una evolución de significados que originaran interacción entre los estudiantes sobre el análisis del concepto de función. Las actividades se implementaron en un grupo de 40 estudiantes, con una edad entre 12 y 13 años. Una de las metas en común a partir de las actividades propuestas, era el desarrollo de representaciones algebraicas, tabulares y graficas de una función lineal, a través de la noción del pensamiento funcional, como aquella actividad focalizada en expresar relaciones entre dos o más cantidades que varían, (*ver tabla 1).*

Las tres actividades en sus primeras etapas promovieron la producción de representaciones funcionales espontaneas, solicitadas a los estudiantes como representaciones externas que permitieran explicar o entender el problema. Una forma de reconocer las representaciones iniciales de los estudiantes, como funcionales espontaneas, es observando sus diagramas, dibujos y representaciones verbales, ya que son una manera más en que el alumno externa sus ideas.

Tabla 1. Organización de las actividades y el tipo de representación requerida.

Actividad / Representación	Diagrama o representación verbal	Gráfica	Tabular	Algebraica
El crecimiento de una planta	✓	✓	✓	✓
Retratos	✓	✓	✓	✓
Clases de regularización	×	✓	✓	✓

Se hizo uso de la metodología de enseñanza Acodesa para la aplicación de las actividades descritas anteriormente, metodología que combina el proceso social de aprendizaje colaborativo, el debate científico y el autorreflexión. En esta metodología se motiva a los estudiantes a la aplicación de diferentes procedimientos para la resolución de un problema o situación en contexto, se propicia el uso del pensamiento diversificado y la producción de representaciones.

4.2 Preguntas de investigación

Con la presente investigación, además del interés por conocer las representaciones funcionales espontaneas que plantean los estudiantes al plantearles una situación basada en la modelación matemática, se busca conocer cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social, un análisis dela comprensión que alcanzan los estudiantes de un determinado concepto bajo la metodología Acodesa mediante el proceso de modelación de situaciones en contexto y la identificación de las dificultades al resolver tareas de modelación. La pregunta de investigación que se pretende resolver es la siguiente:

- ¿A través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, se potencia el aprendizaje del concepto de función?

Para en análisis de los resultados se tomarán en cuenta las producciones de dos equipos de trabajo en un salón de clases donde se aplicó el método de enseñanza Acodesa. Las actividades tituladas “El crecimiento de una planta”, “Retratos” y

“Clases de regularización”, se dirigieron al aprendizaje del concepto de función, para el desarrollo del pensamiento funcional como actividad cognitiva que permite establecer relaciones de dependencia funcional y como proceso de construcción, razonamiento y descripción de situaciones en contexto.

En el siguiente apartado se hace una descripción de la metodología y actividades empleadas, para posteriormente analizar las acciones realizadas por los estudiantes durante las primeras tareas. Las actividades seleccionadas para este estudio permitirán mostrar las distintas ideas iniciales que pueden tener y desarrollar los estudiantes al enfrentarlos a un determinado problema matemático o situación en contexto respecto al desarrollo del pensamiento funcional, permitiendo observar y analizar sus representaciones funcionales espontaneas.

4.3 Diseño de las actividades

La primera actividad se titula “El crecimiento de una planta”, y se diseñó como actividad introductoria para que el estudiante llegase a representar mediante una gráfica el comportamiento del crecimiento de una planta a través del tiempo. La actividad (ver figura #) se encuentra planteada en el libro de Matemáticas 1 de la serie Aprender a Ser, en la sección de Interconecta, en esta cápsula se establecen vínculos con otras asignaturas, como biología, además de que se formula una pregunta que lleva a reflexionar en torno al aprendizaje (Cetina D y Jiménez E, 2018).

En el primer acercamiento a la situación problema, se le solicita al estudiante represente a través de un dibujo o diagrama el fenómeno estudiando, de forma que sea explícito y entendible. Así mismo, se les dice que lo expliquen verbalmente de manera individual. Como segundo momento, los estudiantes trabajaran en colaboración en equipos de tres y hasta cuatro estudiantes, con el propósito de que comparen, compartan y construyan sus ideas, expresen una representación general como una construcción social de conocimientos que explique el problema.

El tercer momento corresponde a una discusión en plenaria en donde los equipos presenten al resto del grupo las representaciones a las que han llegado. Finalmente, una vez que cada equipo ha observado y escuchado la explicación de las respuestas del resto del grupo, pueden mantener o cambiar sus esquemas propuestos, conforme a lo que todos los integrantes decidan. El papel del maestro se vio reflejado en el diseño, elección o adaptación de la situación problema, en organizar y dirigir la interacción social de los equipos de trabajo a través de planteamientos, preguntas e información que guie el proceso de aprendizaje desde la perspectiva sociocultural. La siguiente figura *(ver figura 5),* muestra las tareas propuestas a los estudiantes en la actividad “El crecimiento de una planta”.

Página 1 Algunas plantas crecen extremadamente rápido y alcanzan a medir 40 cm en tan solo unas semanas. Con base en la siguiente información, modela el crecimiento de las plantas con: a) una tabla, b) una gráfica, c) una ecuación algebraica.
Página 2 Explica que utilidad tiene para la biología poder modelar el crecimiento de una planta o animal.
Página 3 A partir de la situación se pueden plantear dos preguntas: ¿En qué semana la planta alcanzó a medir 40 cm? ¿Cuánto crece la planta cada semana? ¿La situación plateada se centró en establecer relaciones entre dos o más cantidades que varían?

Figura 5. Actividad “El crecimiento de una planta”

La segunda actividad tiene el nombre de “Retratos”. La situación se diseñó con la finalidad de dar seguimiento al desarrollo del pensamiento funcional para el aprendizaje del concepto de función. Los objetivos de la actividad son llegar a una representación algebraica de la situación para que a partir de ella se pueda hacer una representación gráfica. La etapa o memento número uno corresponde al trabajo individual donde cada estudiante produzca sus propias representaciones funcionales espontaneas para atender la tarea. En la etapa dos, trabajo en equipo sobre la misma tarea, los estudiantes discutirán y validarán sus representaciones o ideas iniciales de la situación. Para la etapa tres se propondrán los resultados y se llegará a un acuerdo en el grupo.

La etapa cuatro, el regreso a la tarea en forma individual, permitirá al estudiante reconstruir sus ideas y reflexionar. Finalmente, como última etapa, el docente resumirá resultados y explicará a la clase lo relevante. La figura # muestra las tareas propuestas a los estudiantes en la actividad "Retratos".

Página 1

Un fotógrafo fue contratado para retratar a una familia de seis integrantes, dos hijos, los padres y los abuelos. La familia solicitó el paquete que incluía un retrato por persona, retratos que variaban de tamaño, además de que estos incluían marcos los cuales eran fabricados a partir de trozos de espejo como se muestra en la siguiente ilustración.

Página 2

La fotografía más pequeña correspondía al hijo menor, era un retrato a color de 20 cm de ancho por 25 cm de largo. La fotografía del padre tiene por medidas 35 x 40 cm.

1. ¿Cuáles serán las medidas del retrato del ultimo integrante de la familia?
2. Si los trozos de espejo tienen un área de 25 cm^2, ¿cuántos trozos conformara el marco del retrato del quinto integrante de la familia?

Página 3

El fotógrafo ofrece un paquete aún más amplio en donde se pueden incluir más integrantes de la familia e incluso hasta mascotas.

Encuentra la forma más adecuada para representar la relación entre las medidas de los marcos y los trozos de vidrio que se requieren para su elaboración.

Figura 6. Actividad "Retratos"

La última actividad seleccionada lleva por nombre "Clases de regularización". Esta situación problema se diseñó con la finalidad de que los estudiantes modelaran una solución matemáticamente y se analizara como el trabajo en colaboración, el debate científico y autorreflexión ayudan en la enseñanza, construcción y apropiación del concepto de función. Como en las situaciones anteriores, en primer lugar, se pide a los estudiantes elaboren una primera representación a través de un dibujo, diagrama o representación verbal en el que expliquen la situación a estudiar.

En la segunda etapa, los estudiantes trabajaran con sus mismos equipos de las situaciones pasadas, para comparar ideas y expresar una idea, diagrama o dibujo en general como resultado de la construcción social de sus conocimientos que explique el problema. Para el tercer momento, cada equipo propone sus resultados y se llega a un acuerdo en grupo. Posteriormente los estudiantes regresan a la tarea de forma individual, como parte de un periodo de reconstrucción, autorreflexión de lo realizado.

La parte o etapa final de la modelación de la situación problema corresponde a la institucionalización del conocimiento, el profesor resume los resultados de los equipos y muestra como evolucionaron las representaciones y discute su eficacia. La siguiente figura *(ver figura 7),* muestra las tareas propuestas a los estudiantes en la actividad “Clases de regularización”.

Página 1 Aldo está por terminar su licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y necesita ahorrar dinero para su graduación, así que decide dar clases de regularización. Su idea implica la renta de un local que cobra $1 200 mensuales y cobrará $80 por hora a cada estudiante.
Página 2 Calcula las ganancias por mes si da clase a 13 estudiantes una hora por semana. ¿Hay pérdidas si no se da ninguna clase? Para no tener pérdidas ni ganancias, ¿hay un punto de equilibrio? Si más tarde, uno de sus compañeros de la carrera decide asociarse con él en el proyecto, ¿cuáles serían las ganancias al mes si ambos imparten 17 clases por semana?
Página 3 Explica la relación que existe entre una tabla de valores, una gráfica y una ecuación algebraica. ¿Cómo puedes determinar la pendiente y la ordenada al origen en una tabla de valores, en una gráfica y en una ecuación?

Figura 7. Tareas propuestas a los estudiantes.

4.4 La evaluación

La resolución de situaciones problema o situaciones en contexto, son una forma de pensar en la que los estudiantes exhiben diversas estrategias de resolución, como el uso de diagramas, tablas o gráficas para la representación de información y entendimiento de la situación. El seguimiento de una metodología, como lo es Acodesa, o del diseño de un plan y su implementación, puede incluir el uso de métodos algebraicos, el traslado del problema a un contexto conocido, o la descomposición de la situación en otra más simple.

Santos (2014) menciona que, en la fase de revisión, es importante analizar el significado de la solución, verificar las operaciones y pensar en conexiones o extensiones del problema. Además, la presencia de estrategias metacognitivas ayuda a que el estudiante explore algunos caminos más escientemente (Santos, 2014, p. 180).

En este sentido, la metodología Acodesa, al estar dividida por etapas, proporciona información de las diversas actividades que desarrolla el estudiante al darle solución a lo que pide la situación. El primer momento, que corresponde al trabajo individual, se centra en lo relacionado al entendimiento de la situación, por ejemplo, siendo representada con palabras propias. En esta etapa, el estudiante juzgara cuándo las condiciones dadas de la situación problema son razonables, y, por ende, si es posible llegar a soluciones coherentes.

Un segundo momento se relaciona con el trabajo en equipo sobre la misma actividad, y se centra con la habilidad de los estudiantes reunidos por equipos de tres a cuatro personas, en seleccionar y usar estrategias, así como la presentación de sus representaciones funcionales, ideas, y planes de resolución. Finalmente, en la etapa cuatro de la metodología, se revisan los aspectos relacionados al trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión a la que llego cada estudiante, etapa donde también se revisan los aspectos relacionados a la solución y extensión de la situación problema.

Al ser una investigación de tipo cualitativo, el reporte de las cualidades debe discutirse alrededor del nivel de desarrollo y fases de entendimiento, el diseño de planes y su implementación, el tipo de estrategias utilizadas en la resolución de la situación, el tipo de representaciones, dibujos o esquemas, elaborados al inicio del proceso, así como su evolución, la presencia de conceptos y procedimientos matemáticos, así como la participación y efecto de la intervención del profesor durante el implemento de la metodología.

En el proceso de evaluación se pueden identificar algunos indicadores asociados con la solución del problema, el desarrollo de la solución y la identificación de las estrategias principales empleadas en cada solución *(ver figura 8),* (Santos, 2014).

Solución	Desarrollo	Estrategias usadas
Correcta Incorrecta Indeterminada En blanco	Completo Incompleto No requerido Sin unidades Sin conteo Sin desarrollo	Operaciones numéricas Uso del álgebra Lista sistemática, tabla o un diagrama Ensayo y error Búsqueda de patrones Casos simples Indeterminada

Figura 8. Instrumento de identificación de componentes del proceso de solución (Santos, 2014, p. 184).

El instrumento ayuda a la identificación de componentes para tener una idea general del proceso de solución de una determinada situación problema, lo que permite analizar la información con relación a las dificultades que se puedan mostrar en cada etapa de la metodología, como lo es el entendimiento, argumentos del debate científico, y el proceso de autorreflexión.

4.5 Aspectos éticos

Al realizar esta investigación se pidió el consentimiento informado a los estudiantes en ambos grupos, se dio a conocer que los datos recabados durante el desarrollo de la investigación se usarían única y exclusivamente en la investigación y se respetaría la confidencialidad de los datos obtenidos.

4.6 Análisis de resultados

Para analizar la eficiencia de las etapas de la metodología ACODESA, se muestra un análisis cualitativo del trabajo individual de cuatro estudiantes, así como la discusión con todo el grupo. La presentación final de los resultados será siguiendo las cinco etapas de la metodología Acodesa: El trabajo individual, Trabajo en equipo sobre la misma tarea, El debate científico, Regreso a la tarea en forma individual y La institucionalización del conocimiento.

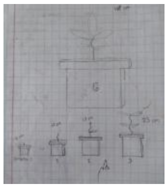
El análisis de los datos pone énfasis en el proceso más que en los resultados esperados. Ya que el análisis busca la organización y categorización de los datos en unidades que faciliten la interpretación se categorizó en dos clases. Para la primera etapa, la categoría corresponde al tipo de representación, de las cuales se obtuvieron cuatro, siendo las más comunes elaboradas en el grupo.

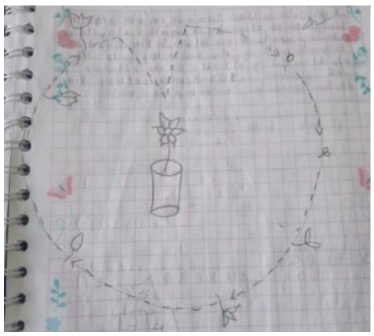
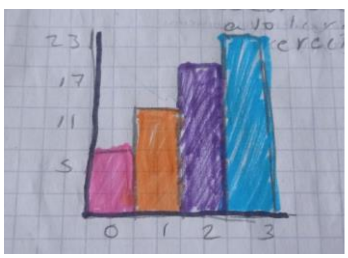
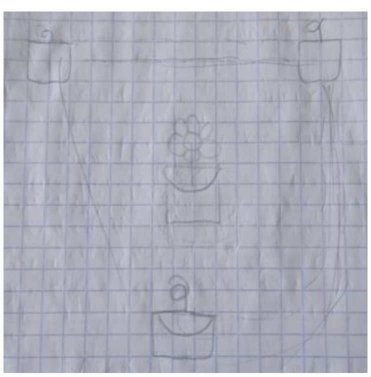
4.6.1 Situación 1. "El crecimiento de una planta"

Etapa 1. Trabajo individual

Una vez que los estudiantes estuvieron al tanto de la situación problema, se les dio la indicación de representarla de manera individual mediante una representación externa y una explicación con sus propias palabras. Se apreciaron cuatro diferentes representaciones funcionales espontaneas generadas por los estudiantes del primer grado grupo B, representaciones que conforman las categorías para el análisis de datos, de cuatro alumnos del total de 40, a quienes denominamos $A_1, A_2, A_3\ y\ A_4$. A continuación se presentan las representaciones funcionales espontaneas y sus explicaciones.

Tabla 2. Representaciones funcionales espontaneas en el trabajo individual.

Estudiante	Representación funcional espontanea	Explicación del estudiante
A_1		El crecimiento de una planta es progresivo y observando continuamente su desarrollo podemos ir registrando cuanto

		crece al día. Al registrar la información podemos relacionarlo con cosas de matemáticas.
A_2		Al analizar la situación me recordó al ciclo del agua, pero también a una gráfica circular. Incluso me hace pensar cuando construimos polígonos regulares a partir de un circulo porque un cierto punto de la figura representaría una etapa del crecimiento de la planta.
A_3		Es como una gráfica porque a lo largo de las semanas va creciendo hasta llegar a cuarenta centímetros.
A_4		Puedo representar el crecimiento con los números cero, uno, dos y tres. Cada número puede representar cierta medida. Al final, el punto es que la planta llegue a medir 40 centímetros.

Se puede distinguir entre las respuestas de los estudiantes varios puntos importantes. En primer lugar, los cuatro intentaron representar con un dibujo o diagrama lo que entendieron de la situación problema, analizaron los datos que se daban y explicaron con sus propias palabras lo que comprendieron del fenómeno estudiado. A pesar de las diferentes representaciones, se logra observar que las variables que los estudiantes consideran son similares, como relacionar la situación con una sucesión numérica, el comportamiento de una gráfica o el comportamiento de un ciclo en la naturaleza, es por ello que se organizó en cuatro categorías correspondiente a los cuatro alumnos que representan la muestra.

Esta situación enmarcada en la vida cotidiana desencadena la actividad de los estudiantes en sus estudios sobre modelación matemática. Las cuatro ideas iniciales, tienen relación con ideas relativas a sucesiones numéricas y el pensamiento funcional. La representación A_1 expresa una sucesión tanto numérica, como geométrica, aunque el estudiante no se haya percatado de este hecho, es decir, el alumno relaciona un número a un determinado tamaño de maceta de la planta, o bien, el tamaño de la planta a cierta medida en centímetros. Esta representación también podría denominarse como un pictograma, por representar magnitudes con figuras.

El estudiante A_2 relaciona la situación problema a otro tema de biología diferente al del crecimiento de una planta, el ciclo del agua. Hace mostrar que el crecimiento de la planta es un ciclo, empieza midiendo cero centímetros hasta llegar a cuarenta, la planta muere, deja semillas y el ciclo inicia nuevamente. También es importante señalar que relacionó el fenómeno con la construcción de un polígono, donde los grados dentro de la circunferencia corresponden a cierta etapa del crecimiento de la planta.

El tercer estudiante indicó que la evolución de la planta se comporta como una gráfica de barras, el desarrollo es progresivo hasta llegar a los centímetros que indica la situación. A diferencia de las representaciones anteriores, se puede identificar que el estudiante logra representar gráficamente un conjunto de valores o datos. A partir de esto, la representación funcional espontanea tienen más elementos por analizar, por ejemplo, además de representar la situación con un histograma, lo relacionó con una sucesión numérica que va en aumento, porque se trata del crecimiento de una cosa, pero, además, es capaz de relacionar dos conjuntos de datos, uno referente al tiempo, y el otro a magnitudes de medida.

El estudiante A_4 expresa el fenómeno como una sucesión numérica, asignando una determinada medida por semana, es decir, atribuyendo la evolución de la planta respecto al tiempo que transcurre.

Hasta este punto, con respecto a las características de las representaciones elaboradas en esta primera etapa de trabajo individual de Acodesa, se identificaron algunas ideas relevantes:

- Una representación como lo es un diagrama o un dibujo, simboliza lo que el estudiante ha comprendido de la situación problema.
- Las representaciones funcionales espontaneas tienen que ver con las creencias, aprendizajes previos, el contexto y el tipo de pensamiento del alumno.
- El proceso de modelación puede surgir de inmediato ya que a partir de sus ideas iniciales se puede observar que son capaces de relacionar la situación problema con otros temas de la asignatura.
- Las cuatro categorías corresponden a las nociones más refinadas o que menos contradicciones tienen.
-

Etapa 2. Trabajo en equipo

Los cuatro alumnos de quienes se analizaron y describieron sus representaciones anteriormente, corresponden a estudiantes que podían expresar de forma verbal, clara y concisa la situación problema presentada, son líderes dentro del aula y sus formas de trabajo e ideales son diferentes.

En esta segunda etapa de proceso de discusión es posible observar características particulares de los cuatro estudiantes:

A_1: Es un estudiante que opina frecuentemente, impone en el trabajo en equipo, sin embargo, siempre está abierto a las ideas de sus compañeros.

A_2: Es una estudiante que sabe trabajar en equipo, sin embargo, le gusta intervenir poco en la conversación con sus compañeros. Tiende a registrar todas las ideas relevantes que observa o escucha y a partir de ello, elabora sus propias ideas.

A_3: En un estudiante que interviene con poca frecuencia, no parece modificar sus ideas iniciales, regularmente trabaja solo, aunque al final comparte sus reflexiones, es atento a las opiniones de sus compañeros y no le gusta llevar una secuencia u orden en lo que realiza.

A_4: Es una estudiante que interviene poco, parece estar la mayor parte del tiempo distraída, pero, al contrario, en todo momento está atenta a la discusión entre sus compañeros e interviene con ideas claras y concisas.

Dadas las características anteriores, se describirá lo acontecido durante el trabajo en colaboración. Al equipo en cuestión, se le solicitó la elaboración de una sola representación externa que explicase de mejor manera la situación problema, por lo que iniciaron su proceso de comunicación. La primera en iniciar el diálogo fue A_3, seguido de A_1, quienes indicaron que sus representaciones mostraban el crecimiento de la planta conforme transcurría el tiempo, lo que les recordaba a una sucesión numérica o geométrica en donde se observaba el progreso de algo.

A_2 estaba atenta a estas ideas, por lo que constantemente registraba las opiniones más importantes. Aunque ella no intervenía, en su apunte iba elaborando su propia opinión. A_4 intervino diciendo que la sucesión se podría conformar observando y registrando el crecimiento de la planta conforme a los días que pasarán e incluso por semanas.

Inmediatamente que A_1 comprendió las ideas que sus compañeras estaban proponiendo, el sugirió considerar registrar el crecimiento de la planta por semana. Indicó que del día uno donde se siembra la semilla de equis planta, hasta el día siete, corresponde a la semana cero porque aún no se observa que la planta haya brotado, el día ocho, hasta el día 14, corresponde a la primera semana, ya que, hasta este punto, la planta ya debería notarse brotar de la tierra.

A_4 concuerda con las aportaciones de A_1, y agrega que las siguientes semanas el desarrollo de la plata es más notable y que por ende, en algún punto se podrá identificar que en determinada semana la planta alcanza a medir los 40 centímetros indicados en la situación. A_2 acepta e incorpora estás ideas a su apunte, modifica su representación inicial *(ver figura 9)* y plasma una nueva representación en una hoja nueva que involucre todas las ideas propuestas por sus compañeros.

Figura 9. Modificación de la representación de A_2.

La *figura 10* muestra la representación de los estudiantes.

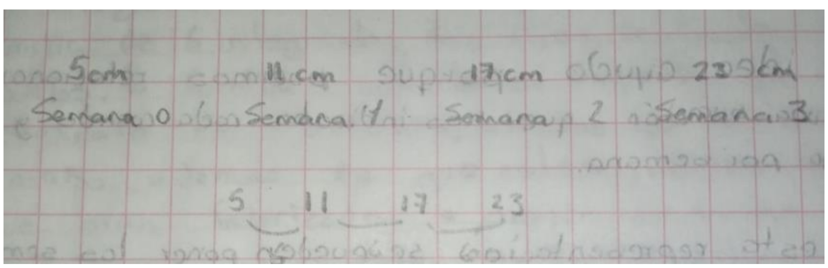


Figura 10. Trabajo en equipo del grupo A_1, A_2, A_3 y A_4.

En esta segunda representación, A_2 escribe de una forma sencilla lo que refería A_1, que la evolución de la planta respecto al tiempo, en semanas, referían a una sucesión numérica. En la representación es posible apreciar conceptos como conjunto ordenado de números, término y longitud de la sucesión. Es posible identificar que, a comparación de las representaciones iniciales, a partir de un proceso de validación y discusión, intercambio de ideas y distribución del trabajo, se generó una representación general, más refinada.

A_4 está de acuerdo con la representación y solicita a A_2 que agregue en la hoja de trabajo que la situación problema debería especificar más características, como el tipo de planta, ya que no todas las plantas se desarrollan de la misma manera, si el clima y tipo de suelo debería ser considerados, porque son factores que intervienen en el crecimiento de cualquier planta.

Hasta este punto se muestra que los estudiantes lograron ir modificando sus representaciones funcionales espontaneas iniciales, por ende, se puede decir que el trabajo en colaboración fue de ayuda para refinar las representaciones iniciales y mejorar los procesos de modelación. Se evidenció que, a partir de un proceso de modelación, donde se plantea una situación matemática, es posible la generación de representaciones no institucionales por parte de los estudiantes (Hitt y Quiroz, 2017).

Por el hecho de ser la primera situación planteada, y por la naturaleza de la actividad, no se pidió a los estudiantes que llegaran al tipo de representación algebraica o tabular. Esta situación tenía por propósito analizar cómo se desarrollaba la interacción social conforme a las primeas etapas de la metodología Acodesa, se dejó de lado las representaciones institucionales y se priorizo que los estudiantes mostraran sus representaciones funcionales espontaneas.

En la etapa número 3, debate científico, los demás equipos propusieron sus resultados, poniéndolos a consideración de la clase, llegando al acuerdo en el grupo de que la situación se comportaba como una sucesión numérica. Durante la etapa número cuatro, el regreso a la tarea en forma individual, en un trabajo de reconstrucción y autorreflexión, se observó que el estudiante A_3, quien inicialmente representó la situación mediante una gráfica de barras, modificó su idea conforme a los acuerdos llegados en la etapa anterior, por lo que elaboró una gráfica lineal, ubicando en el eje x el transcurso de las semanas, respecto al eje y, que representó el crecimiento de la planta en centímetros. La *figura 11* muestra la representación de A_3 después de la discusión científica.

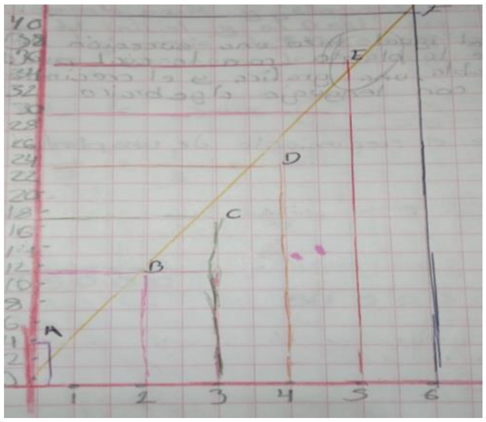


Figura 11. Representación de A_3.

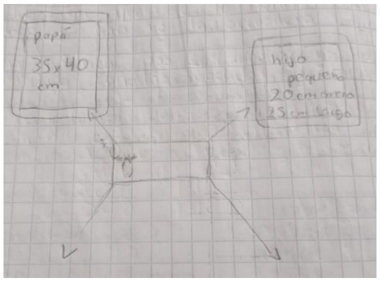
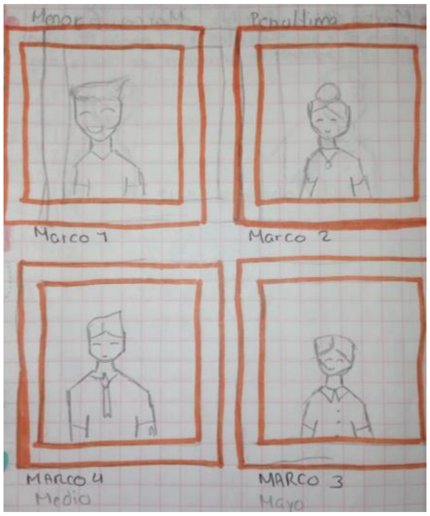
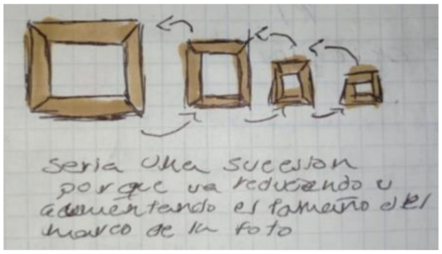
4.6.2 Situación 2. "Retratos"

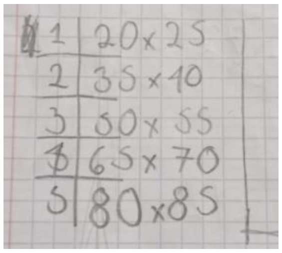
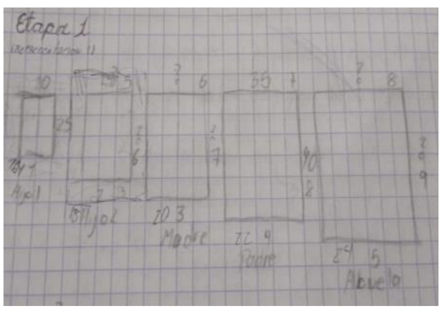
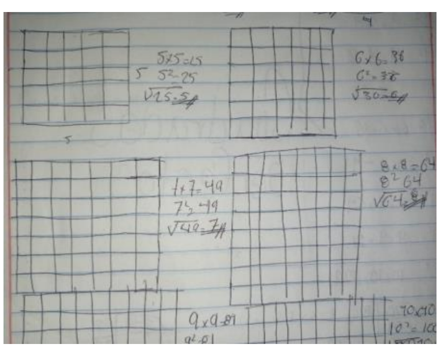
Etapa 1. Trabajo individual

Se solicitó a los estudiantes representaran la situación problema de manera similar a la anterior, con un dibujo o un diagrama y además de ello, se les pidió lo expresaran por escrito. Se eligieron seis tipos diferentes de representaciones para su análisis, las cuales corresponden a las representaciones más comunes hechas por los alumnos de primer grado grupo B.

Las seis representaciones elegidas, a quienes se denominan $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\ y\ E_6$, no corresponden a un solo equipo, cada estudiante elegido representa a un equipo distinto, conformados de entre 3 y 5 integrantes. A continuación, se muestran las seis representaciones funcionales espontaneas y sus explicaciones.

Tabla 3. Representaciones funcionales espontaneas en el trabajo individual.

Estudiante	Representación funcional espontanea	Explicación del estudiante
E_1		Como el problema habla de retratar a una familia, hice un mapa en donde ubico las medidas y los retratos de las dos personas que indica. Coloqué más flechas porque se supone que son seis integrantes.
E_2		Son seis integrantes y el problema nos da la medida del primer cuadro, pero también de otra fotografía. Yo hice dibujos colocando en primer lugar al hijo menor, después al hijo mayor, después a la mamá, después al papá y finalmente a los abuelos. Eso quiere decir que la segunda medida que nos da el problema puede ser de la foto del hijo mayor o del papá.
E_3		Los marcos de las fotografías iban del más pequeño al más grande porque el problema dice que los retratos variaban de tamaño. Esto me hace recordar a las sucesiones de figuras.

E_4		Escribí las medidas que da el problema y me di cuenta que su diferencia de tamaño era de 15 centímetros. Con esta idea decidí construir una tabla y obtener las medidas de los otros cuatro retratos.
E_5		Dibuje rectángulos que representaban las fotografías. Al rectángulo más pequeño le puse la medida de 20 x 25. Antes de escribir las demás medidas me di cuenta que entre la segunda medida que da el problema y la primera, hay más medidas y que aumentaban o disminuían de tamaño por cinco centímetros, así que las acomodé en orden de la más pequeña a la más grande.
E_6		Una de las cosas que decía el problema era que los marcos estaban hechos de trozos de vidrio de 25 centímetros cuadrados. Como los pedazos de vidrio son cuadrados supe que se trataba del área de un cuadrado así que encontré que uno de los lados de ese vidrio media cinco centímetros. Con esta idea hice rectángulos de diferente tamaño y los dividí en cuadros.

De las seis respuestas diferentes elaboradas por los estudiantes, se pudieron distinguir varias ideas interesantes. Cinco de los seis estudiantes únicamente se enfocaron en las medidas de los retratos, pero el estudiante E_6 decidió retomar la idea de que los retratos incluían marcos los cuales eran fabricados a partir de trozos de espejo, mostrando que llamó más su atención la segunda pregunta de la situación problema. En la tabla anterior queda demostrado que los estudiantes están orientados a la actividad que realizan, tienen una meta clara y entendible.

Las seis representaciones iniciales muestran ideas relativas al pensamiento funcional, actividad cognitiva que se refiere a establecer relaciones entre dos o más cantidades que varían. La representación de E_1 fue la más sencilla, sin embargo, se puede observar que el estudiante intenta hacer un diagrama que le permita organizar la información que la situación problema da. El estudiante E_2 considera que el tamaño de los retratos se relaciona con la edad o jerarquía de los familiares, indicando que si fuera su caso, en su casa la fotografía más grande pertenecería a su padre, por ser el jefe de familia. El estudiante E_3 menciona que el tamaño de los marcos corresponde a una sucesión porque va reduciendo el tamaño del marco de la foto, esto le hizo recordar a las sucesiones geométricas vistas meses atrás en clase.

Las tres representaciones anteriores no tienen muchos elementos por estudiar ya que los tres coinciden en que los marcos varían de tamaño, hay seis medidas diferentes y la situación se comporta como una sucesión. Las siguientes representaciones iniciales de $E_4, E_5\ y\ E_6$ tienen más elementos por estudiar, estás corresponden a los alumnos más sobresalientes en la asignatura o aquellos que tomaron más tiempo para analizar la situación que se les presentaba.

La representación de E_4 expresa la tabulación de las medidas de los retratos, que aunque parezca que están mal ubicadas, su razonamiento no es erróneo, ya que este tipo de situaciones problema no agregan información suficiente. Con esta representación funcional espontanea se puede analizar que el estudiante es capaz de establecer una relación entre el número de integrante de familia, respecto a la medida del retrato, así mismo, identifica que las medidas siguen una secuencia, variando sus medidas por quince centímetros.

La estudiante E_5, dibujó cinco rectángulos de diferentes tamaños, a los cuales les colocó medidas. Es posible apreciar que dadas las medidas supo que una correspondía al ancho y otra al largo del marco, pero también identificó que las medidas variaban, y en total debía haber seis medidas diferentes, tanto para el largo como para el ancho. Este tipo de razonamiento es interesante porque demuestra que la alumna es capaz de recordar otros temas de matemáticas, como lo es el área de figuras planas.

Finalmente, la representación funcional espontanea de la estudiante E_6, manifestó un razonamiento aún más complejo. Fue capaz de abordar la situación o fenómeno desde otra perspectiva, ella decidió partir de los trozos de espejo que rodeaban los marcos. Expresó que fue sencillo hallar las medidas de los trozos de espejo, ya que se trataba del área de un cuadrado, por lo que simplemente tuvo que encontrar dos números iguales que multiplicados dieran 25. Al descubrir que los trozos median cinco centímetros por lado, decidió hacer un boceto del número de trozos de vidrio que rodearía el primer marco de 20 cm x 25 cm. Es posible apreciar en la representación de E_6 *(ver tabla 3)* que dibujó los retratos como si estuvieran cubiertos por completo de los trozos de vidrio, contó cuantos los conformaban en total y realizó una raíz cuadrada para obtener el número de trozos que rodeaban las fotografías.

El razonamiento de la estudiante E_1 fue muy cercano a la solución, sin embargo, no consideró que las fotografías se conformaban de dos magnitudes diferentes, una respecto al ancho y otra al largo. Las fotografías no eran cuadradas, por ende, el número de trozos de vidrio por lado en los retratos que ella indicó, no fue el correcto.

Características de las representaciones en la primera etapa de Acodesa:

- Las representaciones funcionales espontaneas que construyeron los estudiantes estuvieron ligadas a lo que los individuos comprendieron de la situación.

- La mayoría de las representaciones relacionaron dos o más temas de la asignatura.
- El proceso de modelación fue inmediato, ya que buscaron describir la situación en términos matemáticos, tomando elementos del cálculo, el álgebra y la geometría.

Etapa 2. Trabajo en equipo

Las discusiones que $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\ y\ E_6$ tuvieron en sus equipos de trabajo produjeron cambios sustanciales. Para analizar lo producido por los estudiantes, se hará referencia a los equipos por su representante, por ejemplo, "el equipo de E_1", "el equipo de E_2", etc.

Algunas de las características particulares de los seis estudiantes $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\ y\ E_6$, representantes de cada equipo, son las siguientes:

E_1: Es un estudiante introvertido que interviene poco en las conversaciones, sus apuntes siempre están en limpio y procura tomar nota de lo importante todo el tiempo.

E_2: Es un estudiante que en todo momento propone ideas, promueve discusiones con sus compañeros y muestra los avances de su trabajo constantemente. Busca llevar un registro de las ideas que aportan sus compañeros.

E_3: Es un estudiante dedicado al trabajo en clase, usualmente sus representaciones son buenas, sin embargo, si no comprende el trabajo no se interesa en aclarar sus dudas.

E_4: Es un estudiante que interviene poco, sus aportaciones las comparte por escrito o mediante diagramas, sin embargo, carece de orden y limpieza.

E_5: Es una estudiante extrovertida que impone en el trabajo con sus compañeros de equipo, propone ideas, opina con frecuencia y muestra seguridad sobre sus argumentos.

E_6: La estudiante interviene con poca frecuencia, sus ideas están bien argumentadas y siempre busca analizar las cosas desde una segunda perspectiva. Tiende a trabajar sola, pero es muy analítica y reflexiva.

Ante estas características se describirá lo acontecido en el trabajo en colaboración. Los equipos al verse en la necesidad de crear una sola representación externa que explicase mejor la situación, iniciaron su proceso de comunicación sin la necesidad de copiar ideas de otros equipos.

El equipo de E_1, se conformó de 4 estudiantes, todos aportaban ideas, pero solo uno llevó el registro de las ideas debatidas. Las ideas que se aportaron concluyeron en que son 6 medidas distintas correspondientes al largo y ancho de los marcos. Con dicha información obtuvieron el perímetro de los retratos, así identificando que los marcos variaban de tamaño por veinte centímetros. Retomando el tema de la regla general, obtuvieron una ecuación que les permitiera obtener cualquier perímetro de un determinado retrato. Intentaron experimentar con el área de los retratos, sin embargo, opinaron era más complicado realizar una ecuación porque la sucesión no llevaba un orden *(ver figura 12).*

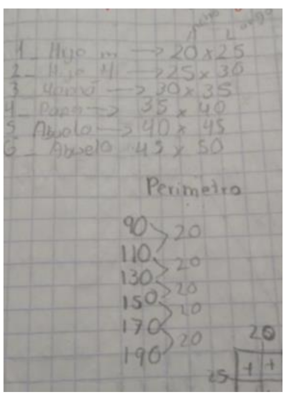


Figura 12. Representación.

El equipo de E_2, identificó que los marcos tenían dos medidas, una correspondiente al largo y otra al ancho. La medida del largo y de ancho aumenta 5 cm, y el perímetro variaba 20 centímetros conforme aumentaba su tamaño. Elaboraron una ecuación y tabularon los datos, no llegaron a una representación gráfica, pero lograron organizar la información y precisar que se podían elaborar dos tablas que organizaran las medidas, una del ancho y otra del largo *(ver figura 13.)*

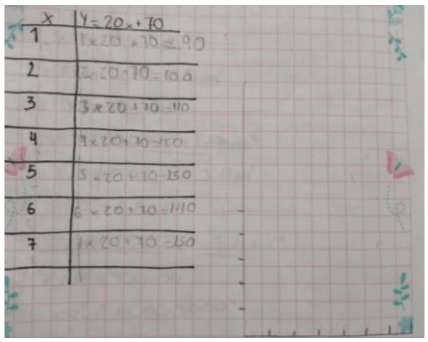


Figura 13. Tabla de valores.

El equipo de E_3, a partir de las ideas discutidas, elaboró dos gráficas, una que mostraba una relación entre el número de integrante de la familia con respecto a la medida del ancho de su retrato y otra conforme al largo. Reconocieron que ambas medidas variaban por cinco centímetros y determinaron que la expresión $5x$ les ayudaría a obtener cierta medida ya sea del largo o del ancho de los marcos *(ver figura 14).*

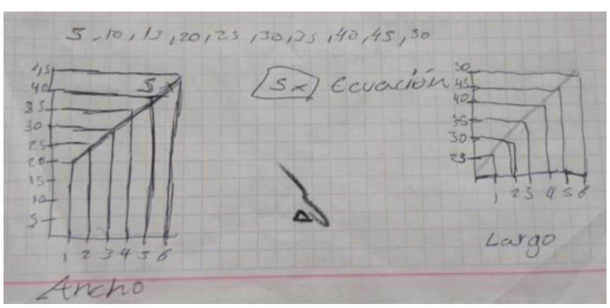


Figura 14. Graficas.

El equipo de E_4, optó por responder la segunda pregunta de la situación, así que elaboró una tabla que organizara el número de cristales que rodeaban una fotografía, desde la más pequeña correspondiente al integrante menor de la familia, hasta la más grande, aquella que perteneciera a uno de los abuelos. Aunque su razonamiento no era del todo erróneo, y lograran una representación tabular y gráfica, los datos estaban mal, por lo que, con las representaciones obtenidas en equipo, no darían respuesta a la pregunta *(ver figura 15).*

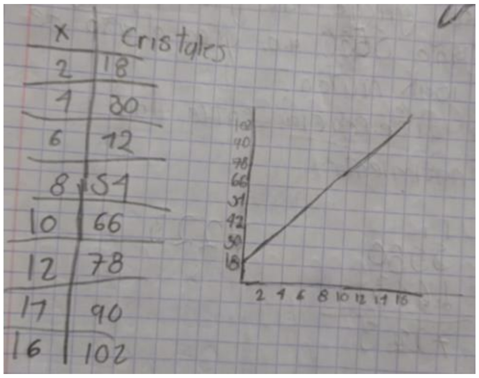


Figura 15. Representación de E4.

El equipo de E_5, llegó a las siguientes conclusiones*. (ver figura 16)*

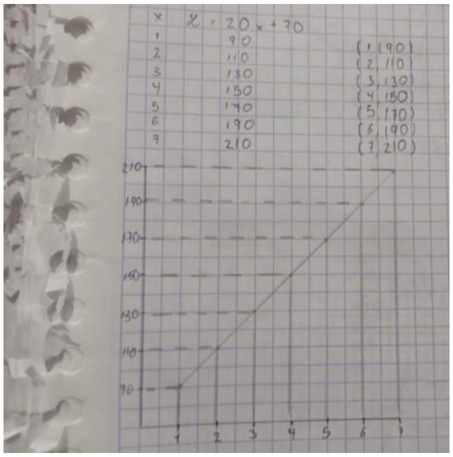


Figura 16. Representación de E5.

- La medida de lo largo y de lo ancho aumenta cada 5 cm por cada marco.
- El perímetro forma una sucesión de 20 cm y el área no.
- La distancia del hijo menor y el padre es de 15 cm.
- Para la cantidad de pedacitos de espejo se le aumentan dos por cada marco.

Es posible analizar que el equipo distinguió de cada fotografía, dos medidas, con dichas medidas obtuvieron el perímetro de cada retrato. Dado que con los perímetros se formaba una sucesión, elaboraron una expresión algebraica. La estudiante E_5 propuso graficar la información, explicando a sus compañeros que recordaran el tema de coordenadas en el plano cartesiano y que con la tabla que acababan de realizar, era posible obtener los dos valores que conformaban una coordenada, una correspondiente al x y otra a y. En la gráfica se puede observar que el eje x corresponde al número de integrante de la familia y el eje y, a la medida del perímetro del retrato.

Finalmente, el equipo de la estudiante E_6, continuó con la idea de buscar una solución a la segunda pregunta de la situación problema. Precisaron que los marcos tenían dos medidas, una respecto al ancho y otra a la medida del largo. Como cada trozo de espejo tenía por lado cinco centímetros, encontraron que para el primer retrato se necesitaban 22 pedazos de espejo. Para el segundo retrato, hallaron que este necesitaba 26 trozos de espejo.

Las ideas a las que llegó este equipo fueron muy interesantes, realizaron los primeros dos dibujos de los trozos de espejo que rodeaban los dos primeros marcos y se percataron que por cada retrato aumentaban 4 trozos y que estos correspondían a los de las esquinas. Ordenaron los datos como una sucesión, formularon una ecuación y tabularon los datos *(Ver figura 17).*

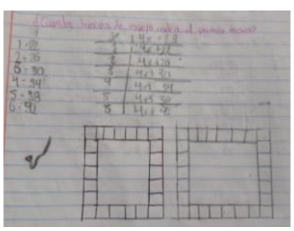


Figura 17. Ideas de equipo.

El trabajo en colaboración fue funcional para refinar nuevos elementos de las representaciones funciones espontaneas y se observó que mejoraron los procesos de modelación matemática, esto porque fueron capaces de construir graficas mediante la apropiación de datos y representar la realidad desde la abstracción. En esta situación se observó que aquellos alumnos que no generaron representaciones funcionales espontaneas, en el trabajo en equipo les fue posible comprender el fenómeno que estaban estudiando. Con el intercambio de ideas y la distribución de trabajo, fueron capaces de aportar ideas y apropiarse de conceptos para dar solución a la situación en la etapa de regreso a la tarea de forma individual.

Etapa 3. Discusión

Debate científico

En esta etapa, cada equipo propuso sus resultados y las pusieron a consideración de toda la clase. Posteriormente se llegó a un acuerdo en grupo.

El equipo E_1 aportó que para hallar cualquier medida de un marco, se podía abordar el problema desde el perímetro de los retratos. A partir de ello, graficar los resultados y así determinar cualquier medida.

El equipo E_2 mencionó que se podían hacer dos gráficas, en donde se visualizara la medida del ancho o del largo y el integrante de la familia *(ver figura 18).*

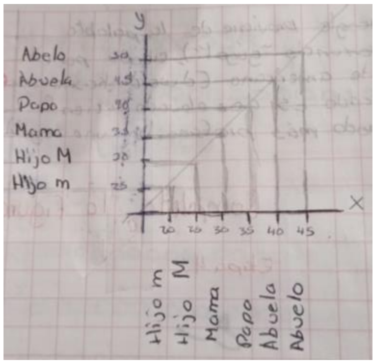


Figura 18. Gráfica de E2.

El equipo E_3 agregó de la misma manera que era posible elaborar dos gráficas, una que mostrara una relación entre el número de integrante de la familia con respecto a la medida del ancho de su retrato y otra conforme al largo.

El equipo de E_4 aportó que respondiendo a la segunda pregunta se podía dar solución a la situación problema en general. Aunque su aporte fue bueno, los datos o información que manejaron era errónea.

El equipo E_5 indicó que con la ecuación $y = 4x + 18$ era posible obtener el número exacto de trozos de vidrio que rodeaba cualquier retrato de la familia. Por lo que sugirieron que al graficar dicha ecuación era posible determinar el número de trozos de vidrio para los marcos si es que se realzaban más retratos.

Por último, el equipo E_6 compartió la misma idea que el equipo E_5, Determinaron la misma expresión algebraica y graficaron los resultados. Incluso aportaron que la misma grafica nos podía indicar el número de trozos de espejo que rodearía dos retratos más *(ver figura 19).*

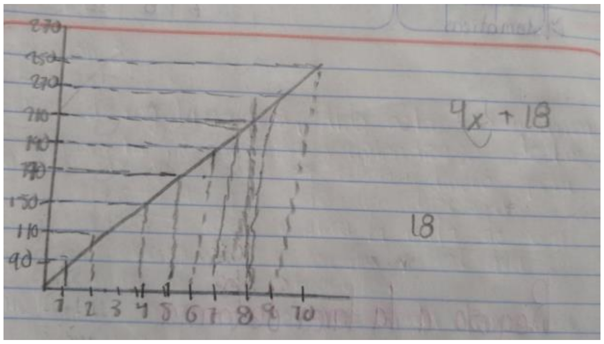


Figura 19. Trozos de espejo.

A partir de las ideas que se aportaron en grupo, las etapas *4. Regreso a la tarea en forma individual* y la etapa *5. Institucionalización del conocimiento*, se abordaron al mismo tiempo. Las ideas que se retomaron en general fueron las siguientes:

- Son seis integrantes (hijo menor, hijo mayor, madre, padre, abuela y abuelo). Las medidas que se dan corresponden al hijo menor y al padre.
- Existe una relación entre el número de integrante con el largo o bien el ancho del retrato.
- Si se relaciona el número de integrante con una de las medidas del retrato y se toman como coordenadas, no es necesario tabular todo o realizar una ecuación.
- Realizar una gráfica que relacione el número de integrante con el ancho del retrato da como resultado una recta y por ende una función lineal ($f(x) = 5x + 15$).
- Realizar una gráfica que relacione el número de integrante con el largo del retrato da como resultado una recta y por ende una función lineal ($f(x) = 5x + 20$).
- Hay una relación conforme el largo y el ancho de la fotografía o retrato, porque conforme aumenta la medida del ancho, aumenta el largo.
- Hacer el diagrama o dibujo de los primeros tres marcos permite observar el número de trozos de espejo que los rodea.
  Marco de trozos de espejo.
- Al eje x se le puede atribuir el número de integrante de la familia (ejemplo: Hijo menor=1, Padre=4).
- Al eje y se le puede atribuir los trozos de espejo.
- Dado que con la información se genera una sucesión, la ecuación que permite obtener el número de trozos de espejo es $4x + 18$.

En la siguiente figura *(ver figura 20),* se muestra el resumen que la estudiante E_6 realizó durante las etapas de trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión.

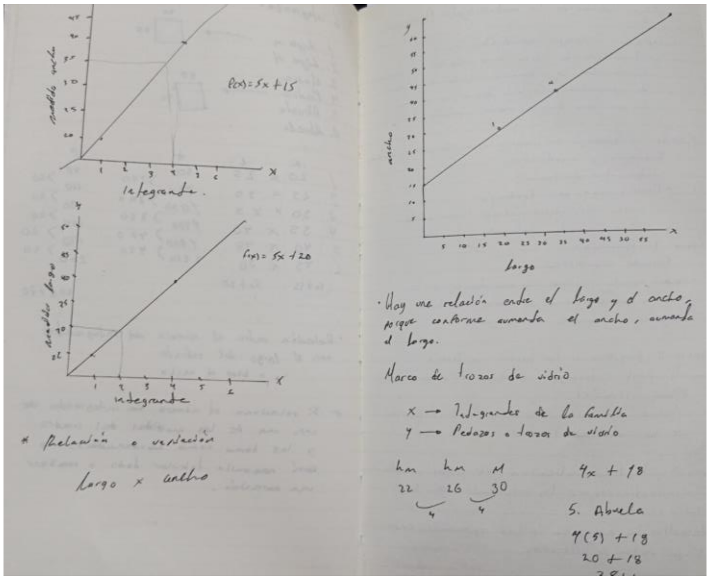


Figura 20. Resumen de E_6.

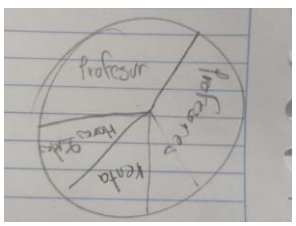
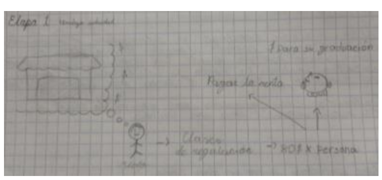
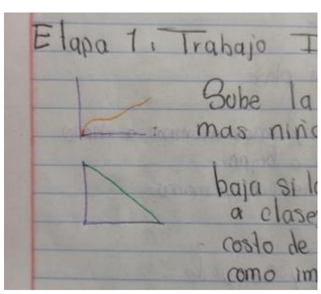
La finalidad de la *situación 2. “Retratos”,* fue la de explorar las nociones previas del alumnado y el modo en que este asimila la teoría, además de observar como al implementar la metodología Acodesa se requiere de un ambiente adecuado que permita a los estudiantes escuchar y participar activamente para llegar a un proceso de modelación matemática que les permita representar, manipular y comunicar objetos de un contexto real, con fórmulas y contenidos matemáticos.

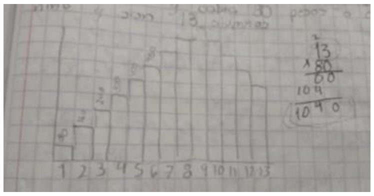
4.6.3 Situación 3. “Clases de regularización”

Etapa 1. Trabajo individual

Para esta tercer y ultima situación, se consideraron las representaciones funcionales espontaneas de los estudiantes de la primera situación, los cuales nuevamente denominaremos $A_1, A_2, A_3\ y\ A_4$. Se ha elegido este equipo por segunda ocasión para el análisis de resultados con la finalidad de observar la evolución de las representaciones y discutir su eficacia, mostrar como la metodología Acodesa favorece la construcción social del conocimiento, conocer cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social, analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes conforme la metodología Acodesa, mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto, e identificar las dificultades de los estudiantes al resolver tareas de modelación sobre el concepto de función. Se presentan a continuación las cuatro representaciones funcionales espontaneas y sus explicaciones.

Tabla 3. Representaciones funcionales espontaneas de los estudiantes en el trabajo individual.

Estudiante	Representación funcional espontanea	Explicación de estudiante
A_1		Representé la situación como una gráfica circular, el cien por ciento representa todo el dinero que se puede juntar. Una parte es de los profesores, con otra parte se paga la renta y otra más podría ser de horas extras.
A_2		El problema nos da mucha información, una persona que se llama Aldo, que debe rentar un local y pagar la renta, ahorrar para su graduación y cobrar ochenta pesos a cada alumno que tenga por una clase.
A_3		La situación la represente con dos graficas como las que aparecen en internet. Si sube la gráfica es porque se inscribieron niños. Baja si los alumnos no asisten a clases y baja si sube el costo de la renta o en utensilios como impresora, hojas y más.

A_4		Bueno, mi primera idea es rentar un local para dar clases de regularización y cobrar 80 pesos a cada niño y son 13 alumnos. La grafica llega hasta el número ya que supongo que después faltarán niños.

De entre las respuestas de los estudiantes se distingue que los cuatro muestran ideas sobre la situación problema que se les presentó. Son capaces de analizar las variables que el enunciado les indicaba y expresaron a través de dibujos o diagramas lo que comprendieron de la situación problema. Esta primera etapa de la metodología es clave para encender la actividad cognitiva de los estudiantes, ya que se espera que el análisis a conciencia de la situación problema provoque representaciones mentales de manera espontánea y que puedan ser materializadas.

La representación de A_1 expresa en un gráfico circular la distribución de los ingresos de haber dado clases de regularización en un mes. Es decir, el estudiante considera que las ganancias se repartirán entre dos profesores, se debe descontar lo de la renta y agrega ingresos extras.

El estudiante A_2 elaboró un mapa mental en donde representa los elementos importantes que da la situación problema, por ejemplo, el costo por clase por una sola persona, el pago de la reta y que la meta es que ahorre para su graduación.

El tercer estudiante fue capaz de ejemplificar la situación problema con dos gráficas, una que no es lineal porque representa a los alumnos que se inscriben a las clases y a aquellos que desertan. La segunda grafica es lineal, y significa los gastos o perdidas que se tienen durante un mes de impartir clases. Con la representación de A_3 se observa que es capaz de graficar datos o facilitar la comprensión de hechos.

El cuarto estudiante, A_4, expresó con una gráfica de barras las ganancias con respecto al número de estudiantes que se inscriben. El estudiante refiere un pico en la gráfica, para referirse al punto más alto, en donde ya no se incorporen más alumnos a las clases. Para él, existe una covariación entre el costo por clase y el número de estudiantes que se incorporen.

Las cuatro representaciones expresan lo que los estudiantes comprendieron de la situación. Hasta esta primera etapa identificaron la información relevante de aquella que no aporta nada a la solución.

Etapa 2. Trabajo en equipo

Tras el primer acercamiento a la situación, se procede al debate en equipos, de tres a cinco integrantes, en los que las ideas para la solución de la actividad habrán de intercambiarse y discutirse. Cada estudiante registró los refinamientos a las ideas surgidas en esta discusión en sus propios apuntes y, en una hoja de trabajo de equipo, se estructura el procedimiento colectivo de solución.

Con el fin de promover la colaboración, cada estudiante asumió un rol diferente, por ejemplo, redacción de la hoja de trabajo en grupo donde se establecen las propuestas en conjunto cuando se llegan a acuerdos, u otro a comunicar las ideas ante el resto de los equipos, etc. La finalidad de esta etapa no fue crear equipos, sino propiciar que cada estudiante participe, defienda sus ideas y se apoye de los argumentos de sus compañeros para ajustar o cambiar sus concepciones. Esta etapa representa el momento de pulir las representaciones funciónales espontaneas a través del ambiente colaborativo.

La integración de los equipos consideró los conocimientos iniciales del alumnado en relación con el concepto matemático en construcción. Esto se logró observando el comportamiento y destreza de los estudiantes en las dos situaciones anteriores. Se distribuyó a los estudiantes que mejor dominaran el tema de manera balanceada en los equipos, sin embargo, este equipo de $A_1, A_2, A_3 \ y \ A_4$ no se modificó con el propósito de analizar los alcances de la metodología.

Ya que el equipo en cuestión se vio en la necesidad de crear una sola representación externa que explicara mejor la situación problema, inició su proceso de comunicación. A_1 inició diciendo que se debía aclarar cuantos días del mes se considerarían, ya que algunos tienen 28 días, otros 30 y algunos más 31 días. Consideró que el aumento de la renta del local y el aumento de maestros, podría significar menos ganancias para Aldo.

A_2 agregó que era importante considerar la semana en la que se incorporaría el segundo profesor, pero también se cuestionó que sucedería si los alumnos faltan. Ante esto, A_1 opinó que si había perdidas si los alumnos faltan, ya que si no hay clases no se paga la renta. Ante la estas nuevas variables a la discusión, A_4 empezó a integrar por escrito las nuevas ideas.

A_3 analizó las ideas que sus compañeros aportaban y dijo que, entre más renta, mayor debería ser el costo de una clase. También agregó, que en su representación ella quiso ejemplificar con las gráficas que las ganancias suben, pero también pueden bajar, y que los factores que determinen eso podrían analizarse llevando las cuentas de todo. Ante estas ideas, A_4, mencionó que las gráficas de su compañera podían mostrar o indicar si hay más o menos alumnos, así como observar las ganancias a lo largo de una semana, si suben o bajan.

A_1 y A_3 aportaron otras ideas relevantes. Ambos discutieron que se podía hacer una ecuación que les permitiera calcular las ganancias de Aldo, para ello la información más importante era el costo de una clase y el pago de la renta del local. Ante estas ideas A_4 agregó que la renta del local podría considerarse una resta a las ganancias, ya que es un monto de dinero que se debe separar de lo que se obtenga al final de mes. A_3 opinó que lo que decía su compañera era cierto, ya que independientemente del número de estudiantes que asistieran, o clases que se impartieran, se debía pagar la renta mensualmente.

A_1 finalizó diciendo que, si los costos de las clases eran de ochenta pesos, podían considerar a una letra como el número de clases, por ejemplo x, que es la letra que más se usa para las ecuaciones. De nuevo, A_4 aceptó e incorporó estas nuevas ideas a su hoja de trabajo.

Etapa 3. Debate científico

El equipo de los estudiantes A_1, A_2, A_3 y A_4, aportó al grupo las ideas antes descritas. Los demás equipos las reflexionaron y aportaron lo siguiente:

- La ecuación que propone el equipo queda de la siguiente manera: $80x - 1200$
- La letra x representa las clases que se pueden dar al día, por semana e incluso al mes, entonces si $x = 0$ es porque no se ha dado ninguna clase.
- No dar ninguna clase significa que hay perdidas porque se debe pagar la renta.
- Para no tener pérdidas ni ganancias se podría hacer una tabla con la ecuación, para identificar cuantas clases se deben dar que pueda ayudar a pagar la renta.
- La tabla que se construya debe considerar el número de clases por semana o por día, y esos valores son los que se dan a la letra x y las ganancias, que corresponde a lo que nos dé aplicando la ecuación.

Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual. (Trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión)

El estudiante A_1, construyó una tabla de valores en la que calculó las ganancias al dar cero, trece, quince, veinte, treinta, y cuarenta y cinco clases. Además, tuvo la idea de organizar la información con una gráfica, sin embargo, en la tabla, aunque agregó coordenadas, no supo identificar las variables x, y, y por ende no graficó (*ver figura 21).*

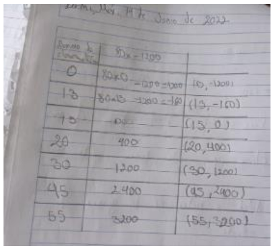


Figura 21. Representación de A_1.

El estudiante A_2, organizó la información de la siguiente manera:

- Denominó a x como el número de horas que se dan por clase al mes,
- La variable y la consideró como las ganancias.
- El pago por la renta lo consideró como un número negativo.
- Se cuestionó si la gráfica que resultaría de las coordenadas que halló sería lineal o curveada.
- Tabuló. *(ver figura 22)*

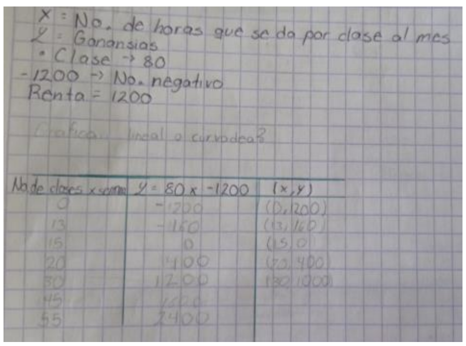


Figura 22. Tabla de A_2.

Con estas ideas se logra identificar que hubo una evolución en su representación inicial a partir de las ideas debatidas en equipo y en grupo. Al graficar, se dio cuenta que se trataba de una función lineal *(ver figura 23).*

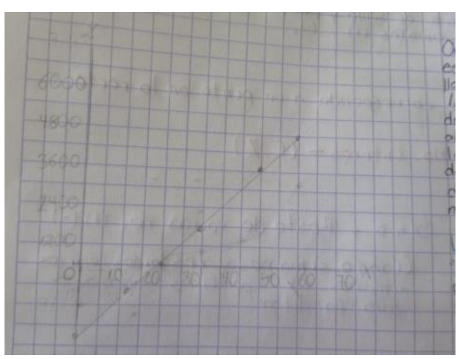


Figura 23. Función lineal.

A_3 realizó una tabla respecto al número de clases y las ganancias, sin embargo, no llegó a graficar los datos *(ver figura 24).*

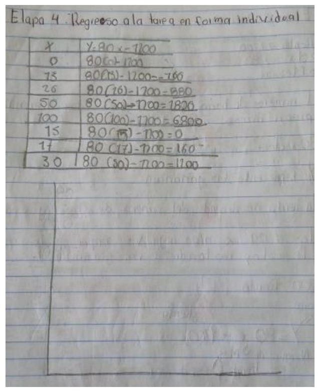


Figura 24. Tabla de A_3.

Por último, la estudiante A_4, construyó una tabla en donde los valores de x significaban las clases por semana, la expresión $y = 80x - 1200$ las ganancias y entre ambas variables daban coordenadas. *(ver figura 25)*

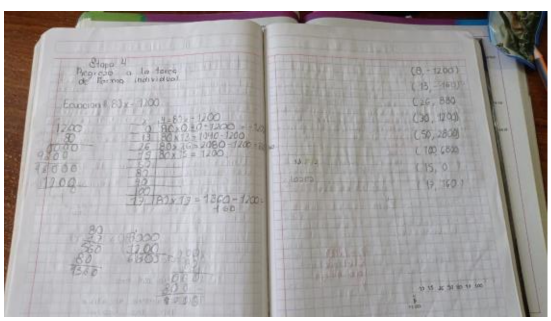


Figura 25. Representaciones de A_4.

A partir de las coordenadas, graficó, pero indicó que el punto (0, -1200) correspondía al pago de renta, o bien, a las pérdidas que se tenían si no se daba ninguna clase *(ver figura 26).*

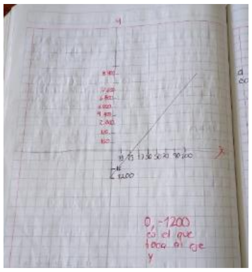


Figura 26. Grafica de A_4.

En este periodo de reconstrucción como autorreflexión de lo realizado se observó que:

El profesor mostró la intención de que los alumnos realizaran una reconstrucción reflexiva de lo hecho en las fases anteriores, aportó algunas instrucciones e hizo énfasis en que el trabajo era individual. Los estudiantes intercambiaron ideas, adaptaron sus representaciones, llegaron a acuerdos e identificaron el propósito de la actividad.

Etapa 5. Institucionalización del conocimiento

Se mostró el resumen de los resultados de los equipos puntualizando lo más importante para dar respuesta a las preguntas, así como algunos aportes que ayudasen a modificar respuestas o ideas.

- Para obtener la ecuación se debe traducir la información que se obtuvo en las representaciones funcionales espontaneas a lenguaje algebraico.
- El número de horas clase que dan al mes lo representamos con la letra x.
- Cada clase cuesta $80, por lo tanto, el incremento es 80.
- Las ganancias las representamos con y.
- Independientemente del número de clases que se den, se debe pagar la renta mensual, por lo que la constante es -80.
- La ecuación que representa lo que se gana al mes es: $y = 80x - 1200$
- Como el incremento es constante (80), entonces se trata de una ecuación lineal.

- Para encontrar la tabla de valores se debe sustituir x con diferentes valores (número de clases por semana).
- El punto de equilibrio se encuentra al calcular las ganancias por 15 clases, ya que es la misma cantidad a pagar por la renta.
- Si no se da ninguna clase si hay perdidas porque se debe pagar renta del local.

Después del resumen de las ideas y resultados de los equipos se prosiguió a dar otros conceptos importantes referentes al tema de funciones:

- Hay tres formas de representar un problema (ecuación algebraica, gráfica y tabla) y a partir de una de ellas se pueden obtener las otras dos representaciones.
- Una ecuación lineal consta de los siguientes elementos: variable dependiente, pendiente o razón de cambio, variable independiente y la ordenada al origen.
  Ordenada a origen: Constante.
  Variable independiente x: Se llama así porque toma cualquier valor.
  Variable dependiente y: Su valor depende del valor que demos a x.
  Pendiente: Es el número que multiplica a x y es la inclinación de la recta.

Aunque faltó mostrar cómo obtener el valor de la pendiente, con esta información y los resultados de los equipos, se observó una evolución considerable en las representaciones de los estudiantes.

El estudiante A_1 después de representar la información en una gráfica circular, lo hizo mediante una ecuación lineal *(ver figura 27).*

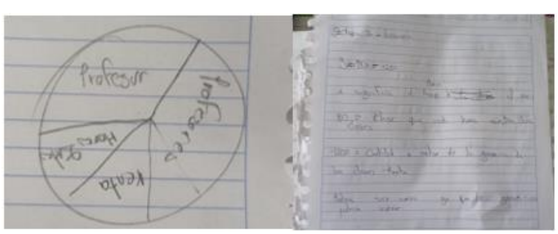


Figura 27. Rep. de A_1.

A_2 al representar la situación con un mapa metal, al final fue capaz de graficar y aportar al grupo, que la ordenada al origen forma parte de la coordenada que corta al eje y en la gráfica *(ver figura 28).*

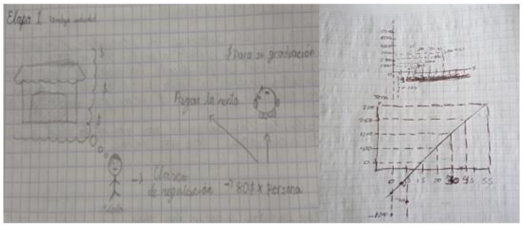


Figura 28. Rep. De A_2.

La representación del estudiante A_3 evolucionó aun cuando su idea inicial no era tan alejada de la realidad. Después del aprendizaje en un ambiente social, refinó conceptos, ideas y saberes previos *(ver figura 29).*

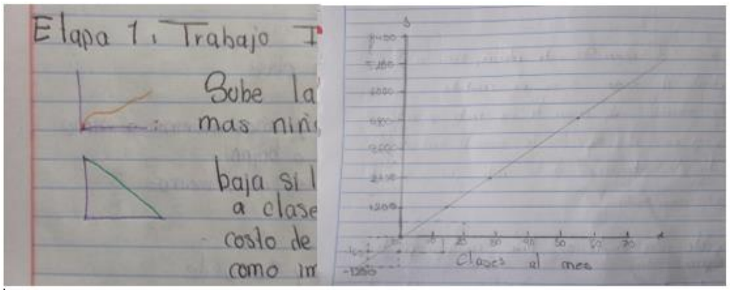


Figura 29. Rep. De A_3.

Finalmente, la estudiante A_4, concluyó en que su grafica de barras que elaboró al inicio no era tan funcional como la que construyó a partir de generar una ecuación y una tabla de valores (*ver figura 30).*

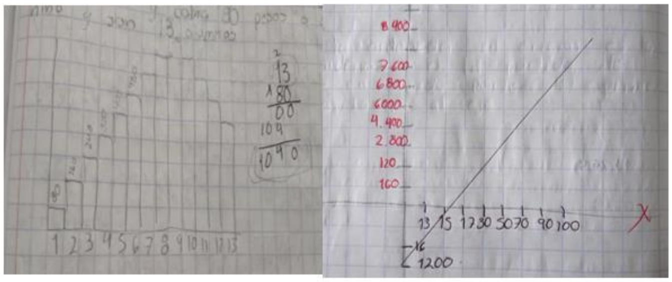


Figura 30. Rep. De A_4.

4.7 Reflexiones

Como resultado de analizar los procesos de construcción llevados a cabo durante la implementación de la metodología Acodesa en situaciones en contexto, se presentan las siguientes reflexiones:

- Los estudiantes presentaron dificultades con relación a la metodología Acodesa, por las practicas a las que están acostumbrados a trabajar en la clase de matemáticas.
- Aun cuando declaran que las situaciones planteadas les parecieron interesantes y se mostraron entusiasmados ante las actividades, demostraron poca capacidad para construir ideas pertinentes a una situación problema, como se observa en la primera situación planteada.
- En la mayoría de los estudiantes se pudo observar dificultades para estructurar los registros de representación, evidenciando que tienen poca experiencia con este tipo de tareas matemáticas.
- Se logró dotar de sentidos y significados de la función lineal en cuanto iban estableciendo constantes y variables en las situaciones.
- Muy pocas veces se presentó la necesidad de intervenir para estimular el trabajo en equipo.
- Conforme se iban desarrollando las actividades, surgían las necesidades de establecer propósitos y sugerencias para cada una de las etapas de la metodología Acodesa.

- Los contextos que se utilizaron fueron atractivos para los estudiantes.
- Después de las discusiones científicas, los estudiantes presentaron pocas dificultades para modelar algebraicamente las situaciones.
- En la etapa de trabajo individual, fue interesante observar las representaciones funcionales espontaneas sobre las situaciones, como hubo alumnos que identificaban las variables de interés de manera inmediata para los fenómenos en cuestión. Por otra parte, también se observó cómo alumnos proponían variables que no estaban relacionadas con lo que pretendía la situación.
- En la etapa de trabajo en equipo, se cumplió el objetivo de refinar las representaciones funcionales espontaneas en las tres situaciones problema.
- La etapa de discusión, debate científico, fue funcional, ya que sirvió para que los estudiantes discutieran sus resultados. En esta etapa se pudo observar en la mayoría de los casos la tendencia a la construcción de representaciones institucionales, como sucedió en la situación de Clases de regularización.
- En algunos estudiantes fue notable la dificultad para discutir sus resultados correctamente, así como para defender sus argumentos.

5 CONCLUSIONES

Los resultados y reflexiones evidenciaron que, a través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, en donde se les planteara una situación problema a los estudiantes, era posible generar representaciones funcionales espontaneas y hacerlas evolucionar a representaciones institucionales. Las representaciones que generaron los estudiantes surgieron de manera natural y eran útiles para explicar los fenómenos estudiados. Las tres situaciones planteadas, contenían ideas y conceptos matemáticos diversos como: magnitudes y medidas, variables, proporcionalidad, sucesiones numéricas y geométricas, raíz cuadrada, entre otros.

Se pudo notar que el aprendizaje del concepto de función es una herramienta útil para aplicar diversas ciencias con el uso de las matemáticas, ya que forma parte de un medio para la modelación de problemas, con cantidades, datos o información que varía, identificando patrones, que permiten el desarrollo del pensamiento funcional. Cabe mencionar que, para el fortalecimiento de la enseñanza de la función lineal, debe organizarse su representación con su expresión verbal, en conjunto con el contexto.

Este estudio concluye en que el uso de situaciones permite la intervención en la construcción y análisis de modelos, esto además exigiendo en quien guía el proceso de aprendizaje al uso de la modelación matemática y el dominio de investigaciones en didáctica y educación matemática. Las representaciones iniciales que un estudiante genera ante la necesidad de dar respuesta a una situación problema son importantes en el proceso de aprendizaje ya que contribuye a la construcción de conceptos matemáticos, su estudio permite la comprensión del proceso de aprendizaje, así que es necesario profundizar más el estudio de las representaciones funcionales espontaneas, la modelación matemática y conocer cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social.

Con relación a la pregunta de investigación, ¿a través de procesos de modelación matemática, utilizando la metodología Acodesa, se potencia el aprendizaje del concepto de función?, menciono que la metodología Acodesa permitió potenciar el aprendizaje del concepto de función, ya que, a través del trabajo colaborativo, el proceso de comunicación fue vital para la evolución de representaciones, ideas y conceptos, que los estudiantes poseen, los significados que cada uno de ellos exponía al inicio de las situaciones cambiaron después del aprendizaje equitativo. Por ello, con respecto al concepto, se observó su construcción, evolución y apropiación gracias al trabajo en colaboración.

Esta investigación reconoce que no se tuvieron los mismos resultados en todos los alumnos del grupo, en otras palabras, que la comunicación no tuvo el mismo impacto en los equipos de trabajo. Se agrega que es importante considerar las características individuales de cada estudiante, ya que sus formas personales de trabajo influyen directamente en las metas del trabajo en colaboración. La metodología Acodesa favoreció la construcción social del conocimiento, a partir de un cercamiento individual se pudo observar las nociones previas del alumnado y el modo en que asimilaban la teoría, y por ende, la evolución de estas.

Respecto a uno de los objetivos específicos, el de identificar las dificultades del estudiante al resolver tareas de modelación sobre el concepto de función, se logra decir que tienen relación con abordar problemas matemáticos donde se les planteen situaciones divergentes, es decir, tareas o actividades que los obliguen a la búsqueda de alternativas de solución. La dificultad de comunicar ideas al inicio fue notoria, y más aún cuando la metodología Acodesa sugiere una constante comunicación de resultados, es decir, se observó la dificultad del estudiante para pasar de ser receptor a integrante activo que propone ideas y las argumenta.

A estas dificultades, se suman otros aspectos como el diseño de las actividades, o situaciones, el rol del docente durante el trabajo en colaboración, la organización de los discursos durante las etapas del debate científico, y la formalización del conocimiento. En algunos estudiantes se pudo identificar dificultades en la toma de decisiones sobre aspectos matemáticos que intervienen en las situaciones, así como su capacidad para generalizar patrones algebraicos que los guiaran a la producción de modelos.

De acuerdo con los objetivos planteados y las actividades realizadas en este estudio se tiene que:

- El estudiante adquirió habilidades para modelar situaciones en contexto. Es capaz de identificar variables y presentar soluciones.
- Desarrollo el concepto de función haciendo uso de las representaciones tabular, gráfica y algebraica.
- La investigación abordó el estudio de las acciones y operaciones dentro de la formación de un concepto matemático.
- El docente debe orientar a los estudiantes a la construcción de conceptos, ayudándolos a considerar los conocimientos previos que poseen para la producción de nuevos conocimientos.

A partir de los resultados obtenidos, es posible decir que el estudio de situaciones en contexto o de la vida real, no solo se basa en dar sentido a la asignatura de matemáticas desde el entorno de los estudiantes, sino, como López, C. y González S. (2014) lo indican, una forma de potenciar a la matemática como herramienta para que el estudiante se desenvuelva en forma efectiva, consciente, responsable, razonada y critica en su diario vivir, es llevar a cabo el proceso de modelación matemática como método de enseñanza.

6 REFERENCIAS

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación matemática*.

Campeón Becerra, M. C. (2016). Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica.

Cañas, D. P. M. (2011). " La Modelación Matemática como Estrategia de Enseñanza para el Desarrollo de Competencias Matemáticas en el Tema Relación Funcional"-Edición Única.

Cetina, D. y Jiménez V. (2018). Matemáticas 1 (pp. 84 – 148). México: SEP.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational psychologist*, *23*(2), 87-103.

Erbas, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakiroglu, E., Alacaci, C., & Bas, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics education: basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *14*(4), 1621-1627.

García Quiroga, L., Vázquez Cedeño, R. A., & Hinojosa Rivera, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, *7*(24), 27-34.

González Sánchez, S. A., & López Zapata, C. C. (2014). Reflexiones docentes a partir de actividades de modelación matemática.

Hein, N., & Biembengut, M. S. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, *16*(2), 105-125.

Hitt, F., & Rivera, S. Q. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 151-175.

Lasalvia, M. F., & Piquet, J. D. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *3*(2), 207-230.

Mesa, Y. M., & Villa Ochoa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática.

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología histórico-cultural. *Avances en Psicología latinoamericana*, *23*(1), 33-42.

Padilla Sanchez, M. I. (2021). La modelación matemática como metodología de enseñanza para el aprendizaje de la función lineal de los estudiantes del segundo ciclo de la Universidad ESAN.

Piaget, J. (1971). *El nacimiento de la inteligencia en la crianza.* Río de Janeiro: Zahar Editores.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266-285.

Roldán Cruz, E. O. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica. *Facultad de Ciencias*.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, *196*(2), 1-38.

Spivak, M. (1992). *Calculus*. Reverté.

Trigo, L. M. S. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas.