

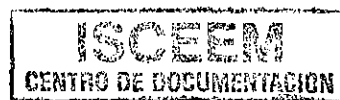
**INSTITUTO SUPERIOR DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DEL ESTADO DE
MÉXICO**

“La resolución de problemas y el aprendizaje significativo de las matemáticas”

Reporte Final de Investigación Educativa

Mtro. Alberto Reyes Esquivel Vallejo.

Toluca, Méx. Noviembre del 2010



ÍNDICE

I INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes.....	3
1.2. Planteamiento del Problema.....	6
1.3. Objeto de Estudio.....	12
1.4. Objetivo.....	13

II MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamento Epistemológico.....	14
2.2. El Constructivismo.....	23
2.2.1. La teoría Psicogenética.....	25
2.2.1.2. El Equilibrio Cognitivo.....	30
2.2.1.2. El Desequilibrio y el Conflicto Cognitivo.....	33
2.2.1.3. El Conflicto Cognitivo y el Planteamiento de Problemas ..	35
2.2.2. La Teoría Sociocultural.....	37
2.2.3. El Aprendizaje Significativo.....	42
2.2.4. El Constructivismo en el Proceso Enseñanza y Aprendizaje. ...	46
2.2.4.1. Principios Constructivistas.....	49

III PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. El Planteamiento y Resolución de Problemas.....	53
3.2. Desarrollo de Situaciones Didácticas.....	61

CONSIDERACIONES FINALES.....	96
------------------------------	----

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	99
---------------------------------	----

INFORME DE INVESTIGACIÓN

I INTRODUCCIÓN



1.1. Antecedentes:

La decisión de implementar esta investigación con el título: "La resolución de problemas y el aprendizaje significativo de las matemáticas", la cual plantea como objeto de estudio la elaboración de problemas que propicien el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos con la intención de apoyar al docente en la realización de su enseñanza no es producto de la casualidad, sino es resultado de dos investigaciones previas, que con ésta, consideramos conforman una serie de investigaciones con una estructura lógica y secuenciada; esto es: la primera se tituló "El conocimiento del número fraccionario en el docente de primaria y sus efectos en el proceso enseñanza aprendizaje", la cual consistió en realizar una investigación de campo, específicamente sobre los procesos áulicos, con la intención de dar cuenta del dominio del saber matemático del docente con respecto al contenido del número fraccionario, para lo cual se definió la categoría denominada "episteme del concepto", y cómo este saber se ve impactado en el proceso de enseñanza y aprendizaje; la interpretación de este objeto de estudio se hizo a partir del paradigma "Constructivista", llegando a la construcción, fundamentalmente, de las siguientes tesis:

- 1.- El dominio del contenido matemático del docente es necesario pero no suficiente para propiciar aprendizaje.
- 2.- El docente no sólo debe de saber qué enseñar, sino cómo enseñarlo. Por consiguiente el docente debe conocer la episteme del concepto matemático a enseñar, además de conocer cómo aprende el alumno para estar en posibilidades de diseñar estrategias de enseñanza que propicien aprendizajes significativos.
- 3.- El docente de escuela primaria no tiene el dominio pleno del número fraccionario, ni ha logrado una adecuada interpretación del paradigma constructivista, lo cual redundará en la imposibilidad de lograr la transposición didáctica esperada.

Las tesis anteriores construidas a partir de los referentes empíricos, nos llevaron a establecer consideraciones como decir que las prácticas de los maestros de escuela primaria se caracterizan, en la mayoría de los casos, por seguir estando arraigadas en los paradigmas tradicionales de enseñanza en donde, por una parte, está de por medio una enseñanza del contenido matemático en su nivel más elemental, sin ir más allá de lo que plantean los libros de texto gratuitos, y en casos, con lamentables errores de interpretación; quedando muy lejos de incursionar en la episteme del concepto; esto es: conocer la razón

de ser del concepto, el origen, su desarrollo constructivo, su aplicación y su sentido lógico. Y por la otra, poco se desarrolla la reflexión, el análisis y la construcción, sino más bien se sigue contribuyendo con la mecanización y el saber acabado. Cabe hacer notar que en esta investigación excepcionalmente se presentó un caso en donde el docente enseñaba con tintes constructivistas, manifestando a la vez, tener un buen dominio del contenido, lo cual se reflejó en aprendizajes más óptimos; lo que fortaleció, aún más las tesis planteadas.

A partir de esta investigación y sus hallazgos, se planteó desarrollar una segunda investigación titulada: "La enseñanza del número fraccionario y su aprendizaje significativo", investigación de corte teórico- documental que tuvo el propósito de fundamentar cómo enseñar las matemáticas, en particular a partir del caso de los números fraccionarios y cómo propiciar el aprendizaje significativo de éstos. Lo anterior nos llevó a desarrollar, por una parte, la episteme del concepto del número fraccionario; y por la otra, consolidar un marco teórico donde se destacan posturas teóricas desde el punto de vista epistemológico, psicológico y pedagógico, como son el Apriorismo Kantiano, La Equilibración Cognitiva y El Constructivismo., estableciendo una estrecha relación entre ellas, destacando principios fundamentales como el de **construcción, equilibración, conflicto cognitivo y aprendizaje significativo**; todo en la intención de argumentar cómo enseñar el concepto matemático, de tal manera, que propicie su aprendizaje significativo.

Así como resultado de esta investigación se concluye que la estrategia didáctica, por antonomasia apropiada, es a partir del **planteamiento y resolución de problemas**, como ya está considerado por el currículo actual, sólo que el problema planteado, no es cualquier problema, sino el problema debe de ser "**adecuado**"; esto es, el problema debe reunir ciertas características como el ser un problema para **aprender**, o sea debe de contener en sí mismo el concepto matemático por aprender; además debe de ser capaz, dicho problema, de propiciar el **conflicto cognitivo** y ser potencialmente **significativo**, entre otras.

A partir de estas aseveraciones y con los elementos teóricos trabajados, es como se da ahora la necesidad de incursionar en las prácticas de los docentes, planteando propuestas o sugerencias concretas que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje, como puede ser, en este caso, el diseño o elaboración de problemas matemáticos que propicien el

aprendizaje significativo de los alumnos. Por tal razón se plantea la realización de esta investigación.

Cabe hacer notar que la enseñanza a partir de la solución de problemas sigue siendo pertinente en el contexto curricular actual, pues aunque recientemente se acaba de implementar una reforma más al currículo escolar del sistema educativo nacional; como toda reforma en la intención de impactar, ahora se anuncia con énfasis y como una gran innovación "**la enseñanza en competencias**"; sin embargo debo decir, que esto no altera el fundamento psicopedagógico actual del constructivismo que como paradigma, según la definición Kuhniana, sigue estando presente en el currículo escolar.

1.2. Planteamiento del Problema.

Aprender matemáticas cada vez se hace más un conocimiento fundamental y necesario, debido a que el desarrollo científico y tecnológico en los últimos años, y seguramente en el futuro, ha sido y será objeto de un acelerado crecimiento en todos los ámbitos de las especialidades, lo cual está exigiendo cada vez más individuos con desarrollo de competencias, bien preparados, con conocimientos sólidos, habilidades creativas, que sepan resolver problemas en lo individual y colectivamente, entre otras.

Al respecto resulta ineludible reconocer que uno de los saberes exigibles por este desarrollo es el *saber matemático* que se inicia en el contexto escolar; el cual tendrá que aprenderse, no memorística o mecánicamente como tradicionalmente se ha hecho en la mayoría de los casos, sino significativamente para que el aprendiz le encuentre sentido y aplicación a su conocimiento, en su caso; cuestión que puede implicar en el alumno descubrir la razón del

ser del concepto matemático(episteme del concepto)¹ y la posibilidad de desarrollarse como un sujeto capaz de enfrentarse a problemas y saberlos resolver.

Para tal fin, se han realizado una variedad de acciones por el Sistema Educativo Mexicano para enseñar significativamente bajo un paradigma constructivista implementado en el currículo escolar actual, como lo es, por una parte, la elaboración de libros de texto, ficheros, guías para el docente y la misma enciclomedia desde esta perspectiva teórica, y por la otra, la actualización y capacitación del magisterio.

Sin embargo, no podemos decir que el problema del bajo nivel de comprensión y aprendizaje de los saberes matemáticos de los alumnos, en su mayoría, es ni medianamente aceptable; pues así lo muestran las últimas evaluaciones a nivel nacional (Excale 2005 y Enlace a partir del 2006) y a nivel internacional los resultados emitidos por el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes, en inglés: Programme for International Student Assessment (PISA); evaluación aplicada a los países pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), donde nos ubicamos entre los últimos lugares de los países participantes en conocimiento y habilidades matemáticas de los alumnos de tercer grado de secundaria.

Al respecto, de manera más específica, a nivel nacional la prueba EXCALE² aplicada en el 2005 a estudiantes de 6º grado de primaria y a 3º grado de secundaria en lo que se

¹ Cuando se habla de conocimiento, se alude al saber "episteme" en oposición al saber doxa. Para Platón la doxa es apariencia que se contrapone a la ciencia, por lo tanto es indemostrable e irrefutable; por el contrario, el saber episteme, sus verdades deben ser válidas en la realidad y en la praxis, lo que constituye un sistema cognoscitivo. En otras palabras, conocer un fenómeno o cosa en el plano de la episteme es conocerlo en su origen, en su esencia y en conexión con otros fenómenos.

² Excale.- exámenes de calidad y el logro educativos, plantea para su valoración cuatro niveles de logro, siendo éstos los siguientes:

- Por debajo del nivel básico.- que indica carencias importantes en el dominio curricular de los conocimientos, habilidades y destrezas que limitan la continuidad en la materia.
- Básico.- Indica un dominio elemental y necesario del conocimiento, habilidades y destrezas para continuar con la materia.
- Medio.- Indica el dominio sustancial y adecuado de conocimiento, habilidades y destrezas que ponen en manifiesto el buen aprovechamiento escolar.
- Avanzado.- Indica un dominio intenso, óptimo y superior de los escolares que manifiestan un aprovechamiento excelente del currículo escolar.

refiere al aprendizaje de las matemáticas (INEE, 2003), encontramos lo siguiente: para el caso de Primaria, el 17.4 % de los estudiantes se encuentran por “debajo del nivel básico”; el 52.3 % ¡más de la mitad! se ubica en el “nivel básico”; el 23.5 % corresponde al “nivel medio” y sólo siete de cada cien estudiantes (6.9 %) se ubica en un nivel avanzado; según lo plantea y lo exige el plan de estudios correspondiente.

Para el caso de la evaluación a los alumnos de Secundaria a nivel nacional, los resultados se presentan aún más desastrosos, pues ¡más de la mitad! De los estudiantes evaluados (51.1 %) se encuentra por “debajo del nivel básico”; una tercera parte (29.5 %) se encuentra en el “nivel básico”; casi dos de cada diez alumnos (18 %) se ubica en el “nivel medio”; y sólo el (1.4 %) se ubica en el “nivel avanzado”. Lo preocupante de este caso es que la mayoría de los alumnos no logra adquirir las competencias establecidas por el currículo escolar actual (INEE).

Por su parte la prueba ENLACE (2008), arroja que casi el 80 % de los niños de educación primaria obtuvieron una calificación **insuficiente y elemental** en las operaciones aritméticas elementales, pues se manifiesta un conocimiento mínimo en la realización algorítmica de la suma, resta y multiplicación, amén de la división, sin tomar en cuenta, su significado y la aplicación en la solución de problemas (Santibáñez, 2008).

A nivel internacional, los resultados arrojados por la prueba PISA, resultan deficientes según la evaluación realizada en el 2003 a 41 países pertenecientes a la OCDE; para el caso de México, de manera concisa, se puede decir que los puntajes promedio alcanzados por los jóvenes de 15 años evaluados, sitúan a nuestro país detrás de todos los países y sólo por delante de Brasil, pero además es importante destacar que la distancia que separa a México del resto de los países participantes es muy significativa³.

Por otra parte, al referirnos a la relación Maestro-Alumno en el proceso enseñanza-aprendizaje mediada por los contenidos, encontramos que involucra de manera directa y

³ .- Resultados de las pruebas PISA 2003 en México; México, INEE. www.inee.edu.mx.

con mayor responsabilidad al “docente”, pues de él más que de nadie, depende el éxito o fracaso del aprendizaje escolar, en este caso matemático (Flay, 1987), ya que en una interacción dinámica entre los alumnos, los contenidos y el docente (triángulo interactivo), el maestro es el responsable de la planeación, del diseño y de la iniciativa para crear situaciones apropiadas de aprendizaje (Coll, 1997).

Lo anterior implica necesariamente, contar con un docente éticamente responsable de su práctica escolar y bien preparado, no sólo en lo que va a enseñar, sino en cómo enseñarlo; lo cual exige a un maestro que conozca y maneje estrategias de enseñanza en matemáticas, no a nivel general, sino con la habilidad para crear situaciones de aprendizaje específicas para casos de enseñanza específicos; pero además con el conocimiento pleno de los saberes escolares a enseñar (episteme del concepto), con toda la intención y posibilidades de desarrollar alumnos pensantes, creativos que solucionen problemas de la vida real. Para lo cual desde la misma planeación el docente debe tener claro el qué enseñar y cómo enseñarlo, pues, “La planeación de la enseñanza como el acto mismo de enseñar, implican procesos de pensamiento que involucran la siguiente consideración: cuanto mejor preparado esté el maestro, más fluidamente y con mayor eficacia se desarrollará el proceso real de enseñanza “(Flay, 1987; p.58)

De manera consecutiva podemos afirmar que el objetivo del profesor no sólo consiste en transmitir información a sus alumnos, sino en conseguir que piensen o como lo diría Polya (1965): “Lo que el profesor dice no carece de importancia, pero lo que los alumnos piensen es mil veces más importante” (Polya, 1965), en (Nickerson, 1966; p.369).

En suma, podemos decir que el principio básico en el desarrollo de buenos métodos de enseñanza estriba en que el profesor en su función, refleje lo que sabe del aprendizaje (Brown, Campione y Day, 1966), pero además del dominio pleno que tiene del saber objeto de enseñanza.

Como es de verse, la participación del docente es determinante en la consecución o no del buen aprendizaje de las matemáticas escolares, en este caso. Si bien es cierto que el acto de aprender es propio y le incumbe sólo al alumno, el acto de enseñar en el que va implícito el acto de hacer aprender es responsabilidad del profesor.

Sin embargo, hasta este momento se puede afirmar que se sigue enseñando del mismo modo, deficiente y de manera tradicional, dando por consecuencia los malos resultados de aprendizaje reflejados en las evaluaciones mencionadas anteriormente; pues un docente ubicado en una postura tradicional de enseñanza está limitado para propiciar aprendizajes significativos del saber matemático.

Por otra parte, hablando de los contenidos escolares, existe a este respecto, otro problema del aprendizaje de las matemáticas desde el punto de vista pedagógico, me refiero al carácter arbitrario y abstracto que parecen revestir éstas, lo cual generalmente provoca en los alumnos actitudes de resistencia e inclusive lo que es lamentablemente común, el rechazo, el aburrimiento y la frustración, debido a la incomprensión de su significado y a su utilidad. Cuestión que sostenemos sigue siendo inherente al docente (Esquivel, 2003), pues del conocimiento matemático y de las habilidades imaginativas que el maestro tenga, dependen las posibilidades de crear situaciones de aprendizaje que propicien comprensión, sentido y significado a los saberes matemáticos escolares (Esquivel, 2008).

El argumento de esta afirmación se encuentra avalado por autores e investigadores que sostienen que en los hombros del docente recae, no solo lo que es obvio, la acción de enseñar, sino la responsabilidad de propiciar aprendizajes. Por tal razón sigue siendo prioritario dirigir toda la atención al quehacer docente, muy a pesar de los cursos de actualización y capacitación que el sistema educativo ha implementado, como son los centros de maestros y los mismos talleres generales de actualización; acción que sin duda ha tenido sus efectos positivos, por lo cual hay que seguir fortaleciendo, pero consideramos que no es suficiente, pues hay que proveer al magisterio de aula con los recursos didácticos o sugerencias didácticas concretas y específicas que le den la posibilidad útil y práctica para desarrollar la enseñanza de un tema específico y a la vez significativo..

Al respecto sostenemos que, no hay una estrategia didáctica general que sea susceptible de adaptarse fácilmente a la enseñanza de todos los temas o de uno en particular; quizás este es el problema que enfrenta el docente con estrategias que en la práctica no puede concretar, por consiguiente estamos más con la idea, por lo menos en matemáticas, de que a cada tema objeto de enseñanza y aprendizaje le corresponde una estrategia en particular, o sea que a cada concepto, regla o relación matemática por aprender, le corresponde diseñar una estrategia particular de enseñanza.

Si aceptamos esta tesis, entonces el docente, y sólo el docente, tiene que idear "situaciones de aprendizaje" específicas para cada tema de enseñanza; pero además, si el propósito es que el alumno tenga una participación constructiva de su nuevo aprendizaje y éste le resulte significativo, entonces se debe de pensar en que dicha "situación de aprendizaje" deba de plantearse, a mi entender, como un problema matemático "adecuado" a resolver.

Pero, ¿por qué hablar del planteamiento de problemas? que más adelante se planteará como objeto de estudio, si además ya está dicho en la teoría por muchos autores y plasmado en el propio currículo escolar como estrategia de aprendizaje; la respuesta inmediata a esta pregunta y que sirve para justificar aún más este proyecto, es que en la práctica el docente no está siendo capaz de enseñar a partir de la solución de problemas (Esquivel, 2003; p. 229). Por lo cual es exigible psicopedagógicamente hablando que el docente, en congruencia con la propuesta curricular actual, parta en la enseñanza con el planteamiento de problemas; pero no para ejercitar o aplicar el saber ya aprendido, que dicho sea de paso son importantes, sino más bien problemas para **aprender**; entendiendo éste como el problema que en su proceso de solución nos lleve a la construcción del concepto por aprender, o como diría Brousseau (1998), el problema en sí debe representar la construcción epistemológica cognitiva.

Por consiguiente de lo que se trata es de que el docente al proponerse enseñar un tema en particular, en este caso matemático, tendrá que idear "situaciones problemáticas de aprendizaje"; entendidas éstas, no simplemente como el plantear un problema matemático a resolver, sino un problema matemático transformarlo en una "situación problema" a resolver, lo cual implica:

- Que el problema tenga implícito el concepto o regla matemática por aprender.
- Que dicho problema sea transformado en una situación problemática ubicada en el contexto del alumno y si es posible en algo real.
- Que no esté ni tan cerca ni tan lejos de lo que el alumno ya sabe, o sea a la distancia óptima (Ausubel, 1996).
- Que la situación de aprendizaje sea acorde al desarrollo cognitivo del alumno (Piaget, 1978).

-Que dicha situación de aprendizaje sea potencialmente capaz de propiciar el conflicto cognitivo⁴ en el aprendiz (Piaget, 1978).

-Y que desde la interpretación y búsqueda de la solución a dicho problema, se dé una fuerte interacción social en donde el diálogo, como mecanismo de mediación, facilite la construcción o descubrimiento del nuevo concepto por aprender (Vigostky, 1934).

Lo anterior nos llevó a plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué y cómo plantear problemas matemáticos que propicien un aprendizaje significativo de los saberes escolares en los alumnos?

1.3. Objeto de Estudio

Sin desconocer que esencialmente el alumno es el responsable de su propio aprendizaje, el docente es responsable de diseñar situaciones didácticas adecuadas para enseñar y por ende para propiciar aprendizaje; pero además si se trata de que este aprendizaje sea potencialmente significativo para el alumno, entonces tenemos que pensar en situaciones problemáticas que el alumno con su reflexión individual y colectiva descubra o redescubra el concepto matemático por aprender.

Por consiguiente el objeto de estudio de esta investigación fue el de diseñar "situaciones didácticas" específicas de aprendizaje, como sugerencias didácticas, dirigidas a docentes de educación básica para la enseñanza de algunos temas del currículo escolar en el área de matemáticas.

1.4. Objetivo:

Diseñar problemas matemáticos, a manera de situaciones problemáticas de aprendizaje, que propicien el conflicto cognitivo en los alumnos para lograr aprendizajes significativos de algunos conceptos específicos de matemáticas, de educación básica.

⁴ .- Conflicto cognitivo, símil de desequilibrio cognitivo, parte del proceso de equilibración que sustenta la teoría psicogenética y que consiste en la acción mental que perturba y desestabiliza al equilibrio cognitivo del sujeto, al enfrentarse éste a una situación nueva que no concuerda con sus estructuras previas; considerado por Piaget como la fuente de todo progreso en el desarrollo del conocimiento.

1.5. Metodología:

Este trabajo de esta investigación se caracterizó por ser una investigación de corte "documental"; para lo cual se planteó como estrategia metodológica la indagación de problemas matemáticos a través de la revisión bibliográfica, la consulta cibemética y la creación o rediseño de problemas nuevos expresados en situación didáctica, con la característica de ser problemas adecuados para aprender o reafirmar un concepto matemático escolar.

II MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamento Epistemológico.

El asunto de aprender o aprendizaje, independientemente de la postura epistemológica en la que se ubique, indudablemente tiene que ver con el acto de conocer; esto nos lleva necesariamente a plantear que si se quiere estudiar el aprendizaje, más concretamente el aprendizaje escolar o sistemático, es ineludible remontarse a la referencia de cómo el sujeto conoce desde un punto de vista epistemológico, lo cual conlleva lógicamente a referimos a la teoría del conocimiento que nos explique la postura epistemológica que se asuma.

En este sentido la concepción de aprendizaje que asumimos es desde el punto de vista del constructivismo, la cual encuentra su fundamento filosófico en el pensamiento kantiano, a partir del cual el acto de conocer es un acto de construcción, interactivo y dinámico.

Para abundar un poco más al respecto, se considera necesario remontarse de manera sucinta a las posturas filosóficas de los clásicos griegos que sientan las bases y que trascienden a través de los siglos para dar una explicación de cómo el sujeto conoce.; lo

cual nos permitirá dar una mejor explicación epistemológica de la postura kantiana que aquí se asume.

Sócrates

Consideramos importante partir de este autor, ya que sus aportes sobre enseñar o cómo hacer que un sujeto individual aprenda, tiene que ver mucho con la interacción mental que se establece entre el sujeto cognoscente y el objeto por conocer, o sea su método lógico para enseñar y aprender, que de alguna manera ha trascendido a la actualidad.

¿Pero quién fue Sócrates? Se dice que un educador de almas. De manera inminente creía en el poder de la palabra, por eso nunca dejó escritos, ahora sólo conocemos sus ideas a través de otros, como sus críticos y discípulos. Unas de las fuentes más importantes que explican el pensamiento socrático son tres obras: los diálogos de Platón, los recuerdos de Jenofonte y los textos de Aristóteles (Xirau, 1971:37-38).

Su aportación, que se considera universal, es el Método. A diferencia de los sofistas que discutían por discutir, Sócrates indagaba en el diálogo la verdad o la falsedad de sus argumentos, planteaba que para hablar con claridad es necesario tomar una postura crítica sobre el asunto, poniendo a éste en duda, pues en un principio lo que se sabe es sólo una creencia; por eso dice la celebre frase: "yo sólo sé que no sé nada".

Esto significa en otras palabras, que para saber hay que dudar, idea que subyace como principio fundamental de su método; cuestión que es retomada muchos siglos después por Rene Descartes en su pensamiento de la *duda metódica*, que coincidentemente es la esencia del Método cartesiano.

Sócrates diferencia entre la *heurística*, que significa discutir por discutir y el *diálogo* que tiene como fin el descubrir la verdad. En su método procede siempre mediante la ironía, ésta consiste en afirmar su propia ignorancia, hacer que su opositor, interlocutor, exponga sus puntos de vista para mostrarle, mediante su método de preguntas sistemáticas y con orden lógico dirigidas al mismo punto, cual es su error. Si Sócrates duda, duda para finalmente no dudar; si es irónico, lo es para mostrar la confusión del espíritu en que suelen estar sus interlocutores. (Xirau, 1971:39).

Desde el punto de vista sistemático Sócrates explica su método a través de cuatro pasos, a saber:

- Primer paso, hace que sus interlocutores entren en contradicción.
- Segundo paso, empieza a emitir sus primeros razonamiento y plantea una hipótesis,
- Tercer paso, ante la ignorancia ya patente, sólo cabe la posibilidad de hacer nuevos supuestos.
- Cuarto paso, una vez establecida la hipótesis, procede a demostrarla.

Cabe hacer notar que su método se identifica con el *método de las preguntas*, a las cuales el interlocutor debe responder, en este sentido. Planteaba que si una persona debe aprender algo, sólo podrá lograrlo aprendiendo de si mismo, esto es como diría Piaget, "nadie aprende por otro".

Por consiguiente, el método socrático es una sucesión de preguntas que obligan al interlocutor a sacar sus propias conclusiones, sólo que estas preguntas se presentan en una seriación lógica, con una actitud de sometimiento racional por parte del maestro, donde el interlocutor se ve obligado, ahora diríamos cognitivamente, a encontrar respuestas y llegar a una conclusión.

A este método se le conoce universalmente con el nombre de "mayéutica socrática" que significa *partero de almas*, si buscamos una explicación epistemológica del pensamiento socrático, encontramos que para Sócrates el conocer proviene de la iluminación de nociones que teníamos en el espíritu oscuras y confusas (Xirau, 1971:40), que posteriormente su discípulo Platón denomina como reminiscencia, que significa que la esencia del conocimiento son ideas innatas que se encuentran en el alma y que no mueren, sino reencarnan (J. Hessen, 1981).

Platón y Aristóteles.

Los pensamientos filosóficos que nos permitirán establecer comparación y encontrar diferencias epistemológicas con el paradigma kantiano es el innatismo-racionalismo de Platón, que como vemos aprende de su maestro Sócrates; y por otra parte del empirismo de Aristóteles que resulta ser una antítesis del pensamiento platónico.

Según Xirau (1971), la filosofía occidental, y yo diría actual, sería incomprensible sin las obras de estos grandes pensadores. A ellos hay que referirnos si queremos entender qué es la filosofía, cuáles son sus empeños y cuáles son sus preguntas.

Aún los que los han sucedido como Sto. Tomás, en la edad media, o Kant y Hegel, en el siglo XIX, presentaron sus pensamientos como síntesis de las obras de Platón y Aristóteles.

Platón

Antes de hablar de moral y de teoría de estado, Platón dice que se necesita una teoría sobre qué del hombre y del universo, pero para encontrarles sentido, es necesario plantearse "qué es el saber"; es decir, se pregunta si el conocimiento es posible, y de serlo, cómo llega a serlo (Xirau, 1971:45).

Por ende Xirau (1971), también dice que previa a la metafísica se formula una teoría del conocimiento donde Platón explica los orígenes de nuestras ideas y trata de precisar el sentido de la verdad.

Pero entonces ¿qué es el saber. Para Platón la verdad no reside en las sensaciones sino en el razonamiento sobre de ellas; por los sentidos sólo podemos obtener a lo sumo opiniones, sólo juzgar lo aparente, lo cual constituye el conocimiento vulgar, a lo que le denomina *conocimiento doxa*; mientras que por la razón alcanzamos la verdad, el *conocimiento episteme*, que significa conocer lo que existe tal como es.

Las ideas para Platón son la *realidad del ser*. No es lo que percibimos, sino la esencia.

El ser, gracias a las ideas que le dan posibilidad y realidad de ser, es en realidad Dios, por consiguiente el mundo como su creación está hecho de posibilidades y realidades, las posibilidades es el no ser y proviene del mundo sensible, las realidades es la esencia, es la idea, como las matemáticas, es el ser, es Dios y es perfecto. Por ejemplo, así como el triángulo en idea es perfecto, en dibujo o construido por el hombre es imperfecto, por que sólo es apariencia (Xirau, 1971:55-56). A esto último es a lo que Platón reconoce como el mundo de lo suprasensible y le asigna el nombre del mundo de las ideas; reconociendo que este mundo se relaciona en primer lugar con la realidad empírica. "Las ideas son los modelos de las cosas empíricas" (Hessen, 1981:57); y en segundo lugar "el mundo de las ideas se relaciona con la consciencia cognoscente. Esto es, no sólo las cosas, sino también los conceptos" (Hessen, 1981:57), los cuales pertenecen al mundo de lo suprasensible. Por ende. Platón plantea que todo conocimiento real es una reminiscencia, lo que significa que el conocimiento o las ideas, no son producto de la actividad del hombre, sino por el contrario, son innatas e incluso son el recuerdo del contacto que tuvo el alma con las esencias antes de nacer el cuerpo; lo que implica que la relación sujeto-objeto se da a partir

de que el auténtico sujeto del conocimiento es el alma, y el objeto empírico es una mera apariencia en la que se encarna; el sujeto implica al objeto, $S \xrightarrow{\quad} O$, o sea, el objeto existe porque el sujeto cognoscente lo concibe y lo identifica con las ideas. (Braunstein, 1975:238).

Aristóteles.

Como discípulo de Platón, pareciera que iba a continuar su pensamiento, pero todo lo contrario, Aristóteles contradice a su maestro, pues su presupuesto epistemológico del cómo el sujeto conoce no es un asunto meramente innato, interno, sino que es un asunto exterior al sujeto, esto es, el conocimiento y la verdad reside en el objeto sensible y éste se impone al sujeto a través de los sentidos.

Como estudioso de la naturaleza no acepto la teoría platónica de las ideas. El mundo ideal y perfecto de Platón se derrumba ante la crítica aristotélica; pues mientras Platón sostiene la idea de un mundo perfecto, positivo, Aristóteles identifica también que hay cosas negativas, por lo tanto reconoce lo perfecto, pero también lo imperfecto, lo hermoso como lo feo (Xirau, 1971:70).

Aristóteles según Xirau (1971), identificó su metafísica sobre la base de los elementos necesarios de la realidad, sólo que éstos se encuentran en las cosas mismas, siendo la *sustancia* el requisito indispensable para entrar en su metafísica, la cual se divide en tres clases: la sustancia *sensible y perecedera*, la sustancia *sensible y eterna*, y la sustancia *inmóvil*. La primera se refiere a las cosas del mundo cambiante e individual que nos rodea; la segunda es la de los astros y cuerpos celestes que son como seres del mundo sensible y a la vez entidades eternamente idénticas a sí mismas en su movimiento circular; y la tercera a la explicación del movimiento, preguntándose cosas cómo, por qué se mueve, qué produce el movimiento, cuál es su causa; cuestiones que Aristóteles responde desde la física y la metafísica, llegando a explicar que todo movimiento requiere la existencia de un móvil y un motor, pero este motor a la vez requiere de otro y este otro de otro, por lo cual se hace una serie infinita, concluyendo que si se quiere evitar la infinitud entonces debemos aceptar que el primer motor es inmóvil. Tal idea sólo es aceptable si este motor inmóvil es Dios, que debe ser puro pensamiento, porque, "¿No es acaso el pensamiento el único tipo de actividad que no requiere movimiento físico?" (Xirau, 1971:77).

Una diferencia sustantiva entre las posturas platónicas y aristotélicas es que la primera distingue una separación entre cuerpo y alma, el cuerpo muere, el alma es inmortal, concibiendo al alma como el portador de las ideas o como el lugar de las esencias del saber, mientras que Aristóteles concibe que cuerpo y alma conformar una unidad indisoluble; no se puede concebir el alma sin cuerpo, el alma es inherente al cuerpo como la vista es al ojo, si el ojo muere la vista deja de ser. En otras palabras "No hay lugar para las esencias independientes de los cuerpos sensibles" (Braunstein, 1975:240).

En este sentido Aristóteles plantea su postura epistemológica, precisando que el sujeto, que es una unidad de cuerpo y alma, entra en contacto con el objeto, que es la unidad de sustancia y forma, por medio de los órganos de los sentidos exteriores; sucediendo la posibilidad de que la información obtenida por estos sentidos sea contradictoria o confusa, para lo cual los sentidos interiores como son la imaginación, la memoria y el sentido común, tendrán la función de juzgarla y unificarlas en un todo congruente. En otras palabras la acción de los sentidos exteriores sirve de base a la acción del intelecto, en donde éste tiene la función de escindir las formas de los contenidos percibidos mediante un trabajo de abstracción. Por tal razón, según Braunstein (1975), Aristóteles plantea que el intelecto está en un primer momento vacío y luego, a partir de la experiencia sensorial, va tomando la forma de aquello que intelectiona, de los inteligibles: "Debe ser como una tablilla donde nada se encuentra escrito" (Aristóteles, del alma, III, 4; citado por Braunstein).

Como vemos existe una diferencia significativa entre el pensamiento aristotélico y platónico; pues Platón afirma que el conocimiento es reminiscencia y para Aristóteles, el conocimiento es consecuencia de la experiencia; expresándose así la tradicional oposición entre lo innato y lo adquirido. De esta manera a Aristóteles se le puede considerar como el iniciador de la corriente naturalista, y por ende haber sentado las bases para el pensamiento *empirista*, pues queda claro que para él todo lo que hay en el intelecto ha pasado previamente por los sentidos; por tal razón la función del intelecto es la de captar las formas de existencia real empírica (Braunstein, 1975:240-241). En la relación sujeto objeto la postura epistemológica aristotélica encontramos que el objeto se impone al sujeto,

S ← O, por consiguiente "la "verdad" es definida por Aristóteles como la "adecuación del intelecto a la cosa". El trabajo del intelecto procede por abstracción a partir de los contenidos de la percepción" (Braunstein, 1975:241).

Una postura epistemológica alternativa

Hasta aquí los pensamientos epistemológicos planteados, parece que no responden convenientemente a la pregunta ¿cómo el sujeto conoce?, pues ambas, además de ser contradictorias y antagónicas, caen en un inevitable reduccionismo. Por una parte, no es posible que todo conocimiento sean conceptos que residen en el espíritu ya preformados como lo plantea la postura innatista-racionalista o idealista de Platón; y por la otra, tampoco es posible que la experiencia y lo sensible sean sólo causa exclusiva del conocimiento, pues hay verdades como los conceptos matemáticos que no necesariamente siguen este recorrido, sino todo lo contrario. Por consiguiente, seguimos fortaleciendo el argumento de que, ni Platón, ni Aristóteles tienen la verdad absoluta, sin embargo ambas posturas permearon la ciencia durante muchos siglos después, al grado tal que resurge a partir de la época del renacimiento por grandes pensadores que sumen una u otra postura.

Así tenemos a autores innatistas-racionalistas como San Agustín, René Descartes y Leibnitz, éstos últimos en la edad moderna, siglo XVII y a autores de tendencia naturalista-empirista como a Sto. Tomás de Aquino y posteriormente al padre del empirismo John Locke en el siglo XVII y sus seguidores David Hume, siglo XVIII y Stuart Mill, siglo XIX.

Al mismo tiempo surge una postura alternativa que trata, por una parte de conciliar las anteriores posturas antagónicas y por otra de dar una explicación más convincente y completa de cómo el sujeto conoce, cuestión que resulta de la simple, pero ingeniosa idea de tomar ambas posturas en las que en el acto de conocer participan y se complementan, esto es, que el conocer se da a partir de una implicación recíproca entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento. En otras palabras, el sujeto implica al objeto, S $\longleftarrow$ O y a la vez el objeto implica al sujeto, S $\longrightarrow$ O, todo en un acto dialéctico, por ende, desde la relación sujeto - objeto, hay una doble implicación que en términos de la lógica se denomina bicondicional, S $\longleftrightarrow$ O.

El gran fundador de este nuevo pensamiento es Kant, siglo XVIII, quien se plantea el enigma de la *deducción*, *cuestión propia de lo suprasensible diría Platón, o de la sustancia inextensa, red cogitans, propios del pensamiento según Descartes, al preguntarse cómo era posible que el razonamiento de la deducción encontrará una correspondencia tan perfecta con la experiencia sensorial de los fenómenos físicos. Por ejemplo: ¿cómo era posible encontrar la relación entre la causa calor del sol, el efecto lluvia si esta relación no*

se percibe de manera sensible? La respuesta dada por Kant a esta cuestión, contradecía abiertamente a las tesis empiristas dominantes de su época, al afirmar que el "entendimiento humano actúa proporcionando un marco a priori en el que luego se inscribirá toda experiencia" (Braunstein, 1975:252), es decir, "el entendimiento no toma sus leyes de la naturaleza sino que las prescribe a ésta" (Kant, prolegómenos a toda metafísica futura, 1783, II, 36, citado por Braunstein, 1975:252).

Esta contradicción de Kant a las posturas empiristas no debe ser entendida como una negación a la función de la experiencia en el acto de conocer, sino todo lo contrario "no se puede negar que nuestros conocimientos comienzan por la experiencia" (crítica de la razón pura, introducción a la segunda edición, citado por Braunstein, 1975:252).

Sólo que la experiencia manifiesta lo que es el objeto cognoscente, más no da la verdadera universalidad del conocimiento, dice que es, pero no por qué es. Ahora bien, los conocimientos universales que son claros y ciertos por sí mismos de carácter intrínseco, son los conocimientos "a priori", en tanto que los conocimientos dados sólo por la experiencia son los "a posteriori o empíricos" Los conocimientos a priori actúan como un marco de categorías en el que irán a inscribirse y adquirirán sentido los datos de la experiencia (Braunstein, 1975:253). Por lo tanto "Kant no duda de la realidad del objeto de la experiencia, simplemente sostiene que la experiencia es organizada y estructurada por el sujeto cognoscente en función de sus propias categorías", en el acto de conocer, Kant reconoce la participación de la cosa, a través de nuestro sentido externo, pero no es suficiente, el verdadero conocimiento se da "cuando la actividad de nuestro intelecto, impone sus marcos categoriales a la realidad empírica (Braunstein, 1975:253).

Por lo tanto podemos resumir diciendo que en la postura apriorista de Kant (apriorismo kantiano), el objeto se impone al sujeto manifestándose a través de su realidad empírica y el sujeto, a la vez se impone al objeto dándole sentido y significado a partir de sus ideas a priori, cuestión que como ya se mencionó, desde una relación sujeto-objeto, existe una implicación recíproca entre ambos.

Para los racionalistas las ideas son innatas, para los empiristas las ideas se adquieren, sin embargo para Kant, su preocupación no está en el origen de las ideas, sino en el conocimiento, desde dos puntos de vista: desde la posibilidad de conocer, la cual sustenta desde su postura del criticismo y del cómo se conoce, lo cual explica a partir de su

paradigma del apriorismo (Jessen, J., 1978). En este caso nos ha interesado referirnos al segundo aspecto que tiene sus repercusiones psicológicas, pues define cómo un sujeto conoce una verdad, un concepto o la misma ciencia.

En este sentido Kant, en el acto de conocer reconoce la existencia de una consciencia humana, pero ésta no es receptiva, sino activa mediante leyes o categorías propias del entendimiento, los cuales les llama las formas a priori, entendiendo lo a priori no como las formas antes de la experiencia sino como formas independientes de la experiencia que están en la consciencia del sujeto universal y que también les llama juicios, por ejemplo el juicio de la relación recíproca que se puede establecer entre los hechos o fenómenos que se dependen mutuamente (Larroyo, 1972:X).

En esta consideración Kant establece que no hay conocimiento sólo por la vía de la experiencia, ni tampoco fuera de las formas a priori, pues para conocer no es suficiente establecer la representación de la cosa o fenómeno, es necesario conocer la cosa en sí, lo cual es sólo posible si la cosa es imaginada y pensada, llamada entonces noúmeno.

Si entendemos por fenómenos a los datos de la experiencia que se presentan en la consciencia del sujeto, entonces para Kant el acto de conocer es aplicar a estos fenómenos intuiciones claras y categorías, por medio de juicios, para lograr darles forma precisa. Entonces "conocer es formar la experiencia mediante las condiciones a priori de nuestra sensibilidad y de nuestro entendimiento" (Xirau, 1971:278).

En conclusión, "conocer es construir. Y para construir necesitamos tanto los materiales –los fenómenos–, como los instrumentos y las ideas –los juicios y las categorías. Por ello Kant puede decir que la experiencia pura, sin ideas, sería ciega, caótica y sin forma, y que el pensamiento sin experiencia sería vacío" (Xirau, 1971:278).

2.2. EL CONSTRUCTIVISMO.

Ante la carencia de una teoría, como lo diría Coll (1996) en el estricto sentido del término, que de cuenta de los procesos educativos, su problemática y cómo resolverla, es que se sigue haciendo imperante proseguir con el análisis e investigación del asunto educativo para continuar dando explicaciones, cada día más convincentes, articuladas y precisas, con

sólidos apoyos empíricos que nos permitan arribar a la solución, en particular, del problema del aprendizaje escolar.

En este sentido, resulta necesario detectar las ideas o principios explicativos básicos de diferentes autores que converjan epistemológicamente en la postura teórica que se asume; siendo en este caso el constructivismo como paradigma que encuentra su esencia en el cognitivismo.

Por consiguiente, este apartado se integra con ideas, que consideramos fundamentales, de algunos referentes teóricos del constructivismo, para después relacionar este paradigma con lo educativo y más específicamente con el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Desde el punto de vista epistemológico, según Castorina (1996), el constructivismo encuentra sus orígenes y fundamento en la concepción apriorista heredada de la tradición kantiana en donde toda elaboración cognitiva es producto de la relación recíproca sujeto-objeto.

Por otra parte, Piaget complementa esta concepción epistemológica con dos aspectos que sientan las bases del paradigma constructivista, a saber:

- La vinculación del sujeto cognoscente con el objeto de conocimiento comienza con la acción estructurante del sujeto sobre el objeto; lo que posteriormente Piaget, denomina como asimilación, y
- Las categorías del conocimiento y los esquemas, se forman en un proceso lento y complejo a través de una auténtica interrelación entre el sujeto y el objeto; en donde las resistencias de la realidad, es decir, del objeto provocan modificaciones en las estructuras del sujeto reestructurando sus esquemas; cuestión que es denominada por Piaget como acomodación (Castorina 1996: 24).

Lo anterior lleva a definir al constructivismo como una postura teórica que afirma que el sujeto construye el conocimiento, cuando sus acciones -prácticas o conceptuales- transforman la realidad, modificándola, no literalmente, sino atribuyéndole significado (Castorina 1996: 24).

En consecuencia, desde el punto de vista epistemológico, podemos identificar en un primer momento algunos principios que subyacen al constructivismo, como los siguientes:

- El conocimiento o la acción de conocer no es simplemente una copia de la realidad.
- El acto de conocer es una acción propia del sujeto cognoscente, nadie conoce por otro.
- La acción de conocer es una construcción mental, es una acción intrínseca del sujeto.
- La construcción se da a partir de la interrelación entre sujeto y objeto.

Si bien es cierto que a Piaget se le considera por algunos autores como el padre del constructivismo, para el asunto que nos atañe consideramos necesario apoyarnos también de otros autores que han dado aportes al constructivismo, aunque aquí cabe así decirlo, sólo tomaremos algunos de sus aportes que consideramos son trascendentes en la explicación del proceso enseñanza-aprendizaje.

2.2.1. La Teoría Psicogenética.

Como problema fundamental del desarrollo intelectual del sujeto, Piaget se plantea ¿cómo pasa un individuo de un estado de conocimiento a otro más elaborado o desarrollado? Este problema fue su principal interés investigativo, para dar respuesta teórica se vale de un trabajo experimental que le da sustento a sus conclusiones, conformando así lo que se conoce como psicología genética.

Una concepción básica de la teoría piagetiana es la acción mental del sujeto cognoscente, considerando que ésta es la base que da origen a todo conocimiento. Se puede enfatizar lo anterior diciendo que: el conocimiento depende de la acción y la acción, a su vez, es producto del conocimiento. Lo anterior indica que el sujeto cognoscente en el acto de conocer no parte de cero, sino que posee ciertas nociones previas que le permiten desarrollar acciones en pro del conocimiento.

Piaget (1978) sustenta genéticamente o (evolutivamente) esta primacía de la acción, a través de sus múltiples observaciones y análisis de las conductas más elementales del recién nacido, hasta los niños de la tercera infancia, preadolescentes. Para ubicar la operación de la acción es necesario que el sujeto reconozca propiedades del objeto que su

propia acción mental le permite conocer. A medida que el niño logra su desarrollo físico y mental, se irá produciendo un movimiento de integración del sujeto y del objeto; esto es "en la medida que el sujeto coordine sus acciones, comenzará a dar unidad al objeto con el que interactúa [...]. La complejización del objeto es entonces correlativa con la complejización y organización del sujeto; solamente la coordinación de los esquemas de acción permitirá dar unidad a los objetos a través de la unidad de acción. (Piaget, 1978:15

Por lo tanto, Piaget asume una posición de construcción del conocimiento, esto es: reconoce la participación de dos entes fundamentales, sujeto y objeto, el sujeto que tiene la función del sujeto cognoscente y el objeto que toma el papel de ser el objeto de estudio, existiendo una interrelación dinámica entre el sujeto y el objeto a través de la acción (Ver Fig. 1.).

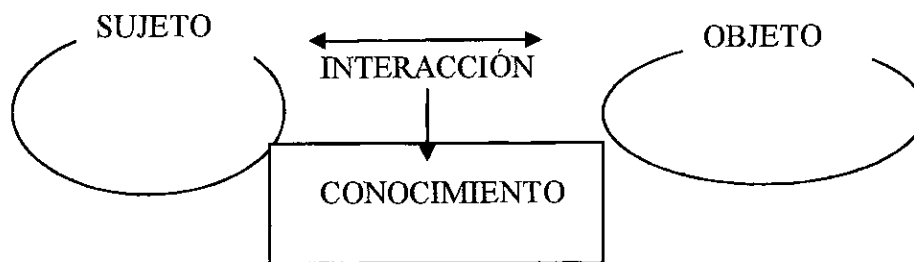


Fig. 1. El conocimiento es producto de la interacción entre el sujeto y el objeto.

Como una cuestión específica en donde se deposita el interés sustantivo de Piaget es el desarrollo intelectual del sujeto, el cual lo describe como un asunto evolutivo, es decir el intelecto se desarrolla, no como una acumulación de experiencias o conceptos, sino como una "reestructuración" de los esquemas ya existentes bajo una serie de cambios lógicos y autosuficientes, que van determinando, por aproximación, diferentes etapas físico-mentales de los sujetos.

Pero ¿cómo explica Piaget esta evolución? O dicho de otra manera ¿cómo explica Piaget ese paso de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento? La respuesta la explica a través de un proceso continuo y dinámico en el que se encuentra inmerso irremediamente todo sujeto que está en contacto con su medio ambiente, proceso que

se identifica con el nombre de "equilibración". Se menciona a Piaget como el creador de la epistemología dialéctica, la cual constituye el mecanismo inferencial de la equilibración, considerando a este concepto como el principio fundamental de su teoría psicogenética, principio en el que subyacen los procesos de asimilación-acomodación-adaptación. (Richmond, 1980:99-114).

El proceso de equilibración, (Fig 2), está determinado por una secuencia de sucesos de desequilibrio-equilibrio, los cuales se dan en el momento en que el sujeto entra en interrelación con una realidad, objeto, en donde el sujeto asimila al objeto, transformándolo, no literalmente, sino de acuerdo a las estructuras previas del sujeto, mediante transformaciones abstractivas que permiten la incorporación de las circunstancias más significativas del objeto(asimilación), sucediendo que si las nuevas circunstancias que presenta el objeto no corresponden a los esquemas previos del sujeto, éste entra en conflicto cognitivo, (en desequilibrio). Al mismo tiempo ante tal circunstancia, el objeto se impone al sujeto modificando su esquema asimilador, dando por resultado una reestructuración de los esquemas del sujeto (acomodación); para posteriormente, por consecuencia lógica, lograrse la adaptación del sujeto a dicha realidad, (equilibrio). El crecimiento del intelecto es un proceso evolutivo "en donde la nueva experiencia no se inserta de manera irresoluta, sino que forma una amalgama con la ya existente transformándola y siendo a la vez transformada" (Richmond, 1980:102). Ver fig.2.

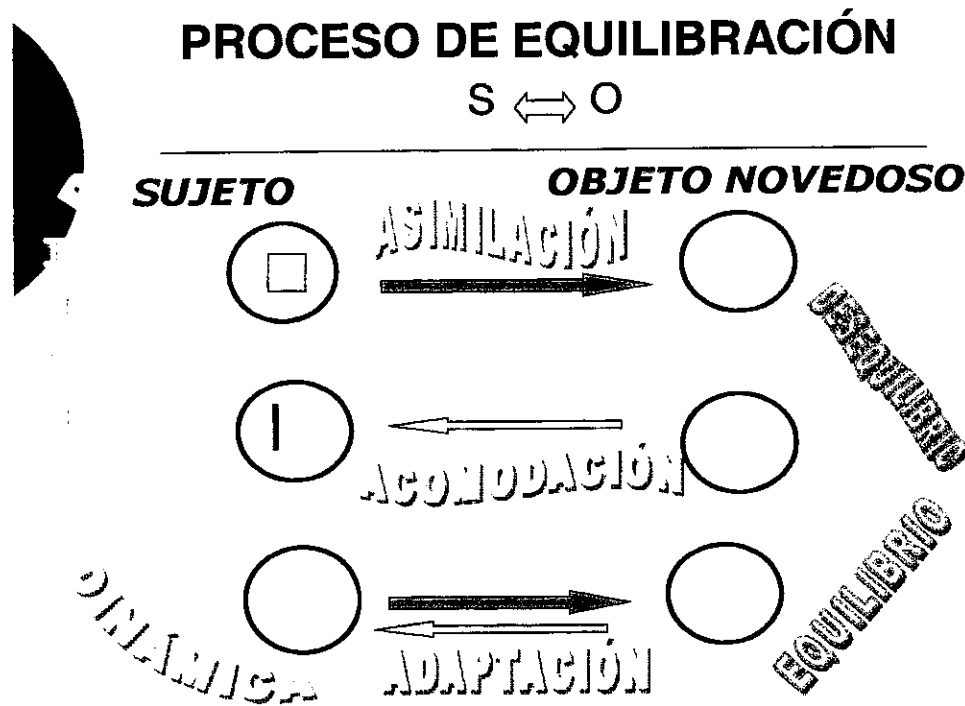


Fig.2 Proceso de equilibración

Una vez que el sujeto logra la adaptación, se puede decir que establece un nivel de desarrollo intelectual, al cual se le denomina equilibrio o etapa de equilibrio. Pero éste es susceptible de ser roto cuando el nivel determinado por la asimilación-acomodación, no es suficiente para explicarse una nueva situación problemática presentada por la realidad, provocando un nuevo desequilibrio. Por consiguiente, el desarrollo intelectual del sujeto, Piaget lo explica mediante un proceso dialéctico de desequilibrio-equilibrio, o sea, un proceso de equilibración o como la teoría del equilibrio dinámico.

En esta concepción epistemológica, Piaget afirma que el esquema asimilador es producto de los requerimientos de la acción que el sujeto realiza con el objeto de conocimiento. En un grado avanzado del conocimiento, esta tesis reviste tal importancia y se traduce en la afirmación de que las operaciones deductivas y toda la inteligencia reflexiva del sujeto cognoscente consiste en acciones interiorizadas (Piaget, 1978:20).

Piaget plantea que los procesos de asimilación-acomodación son rasgos permanentes de la función intelectual a lo largo de toda la vida del sujeto; la adaptación a una nueva

situación, se produce tan sólo cuando los dos procesos de asimilación-acomodación se hallan en equilibrio. Mientras se va desarrollando la inteligencia, los procesos cognitivos van abarcando mayor distancia temporal y espacial, mayor penetración, profundidad y comprensión de las cosas, como por ejemplo la relación causa-efecto.

Por consiguiente, el progreso del desarrollo intelectual está señalado por formas de representación mental cada vez más abstractas; donde cada paso hacia delante exige la utilización de lo comprendido con anterioridad a lo que se está por comprender, siguiendo un acto de ajustamiento en que el conocimiento es modificado por lo no conocido; por lo tanto, la asimilación es la aplicación de la experiencia pasada a la situación nueva por aprender y la acomodación es el ajustamiento de ese nuevo aprender a la experiencia presente modificándola, de donde la concordancia entre estos dos procesos da por consecuencia una inteligencia adaptada. Resulta importante destacar al respecto "que cada paso adelante sólo tiene lugar mediante una pérdida de equilibrio y, en consecuencia el desarrollo de la inteligencia es un proceso de restablecimiento de equilibrios trastornados entre asimilación y acomodación" (Richmond, 1980:129).

En la cuestión cognitiva, lograr el equilibrio es superar un estado de desequilibrio al adaptarse el sujeto a una nueva situación que fue la causa de este desequilibrio, consiguiendo así un nuevo equilibrio y por ende, un nuevo conocimiento.

Si consideramos al desequilibrio como una alteración del equilibrio ante una situación nueva para el individuo, entonces resulta lógicamente necesario hablar primero del concepto de equilibrio cognitivo.

2.2.1.1. El Equilibrio Cognitivo

Según Piaget (1975), los equilibrios cognitivos son diferentes a los mecánicos, mas bien se aproximan a los biológicos como estados estacionarios, pero a la vez dinámicos. Si consideramos a los equilibrios como sistemas, entonces podemos decir que al igual que los organismos, los sistemas cognitivos están abiertos y a la vez cerrados; esto es, están abiertos en el sentido de los intercambios con el entorno y cerrados en cuanto a los ciclos; entonces podemos decir que si llamamos A, B, C ,etc., a las partes constitutivas de un ciclo de esta clase y A',B',C', etc., a los elementos del entorno que son necesarios para su

alimentación; estamos entonces en presencia de una estructura cuya forma esquemática es:

$$(A \times A') \rightarrow B; (B \times B') \rightarrow \dots (Z \times Z') \rightarrow A, \text{ etc.}$$

Se dice que la estructura o los sistemas cognitivos se presentan abiertos pero a la vez cerrados, es decir un sistema cognitivo es cerrado en el sentido de estructura completa, pero abierto en el sentido de que tiene la posibilidad de ser reestructurado por los intercambios con el exterior. Los sistemas cognitivos, por consiguiente, siguen un proceso de estructuración, sólo que cada estructura previa se presenta en un estado de acabado, pero no en forma definitiva.

Por otra parte, es necesario añadir que el sistema, que en un momento dado se considere como total o general, está integrado por subsistemas jerarquizados, que a la vez presentan estructuras análogas, unidas por conexiones igualmente cíclicas, por lo cual se advierte una originalidad en las formas de equilibrio ya que éste se basa en las acciones conservadas que los subsistemas ejercen unos sobre otros.

De acuerdo con Piaget (1978), una acción conservadora de esta clase se aplica al sistema total mediante los subsistemas y viceversa, lo que equivale a decir que el equilibrio se basa, entre otras cosas, en una solidaridad de la diferenciación y la integración. Para entender esto, es necesario re indicar, que si bien es cierto que un sistema total a la vez se compone de varios subsistemas los cuales son análogos pero diferentes, y además están íntimamente relacionados, integrados, formando un todo, entonces el equilibrio se da en la solidaridad de las diferencias entre subsistemas apoyado por la integración que existe entre los mismos.

Regresando al sentido de sistema abierto o cerrado, diremos que tales ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos principios fundamentales que constituyen los componentes de todo proceso de equilibrio, nos referimos a la asimilación- acomodación que para la teoría piagetiana son básicos para explicar el proceso de equilibración, desequilibrio-equilibrio, y que por ende le permiten a Piaget explicar el desarrollo intelectual del sujeto (Piaget, 1975:8).

La asimilación, como ya se mencionó, se refiere a la incorporación por el sujeto de un elemento exterior, como puede ser un objeto concreto o abstracto, en forma de conceptos a partir de las estructuras o subestructuras previas que el sujeto ya posee. Dicho de otra

manera, la asimilación es la idea o interpretación que hace el sujeto de lo cosa a partir de sus esquemas previos, modificando a dicha cosa no literalmente, sino asignándole un significado. Así pues. Se trata de la relación:

A, B, C....con A', B', C'... estrictamente en esta dirección (): $\rightarrow$

La acomodación, es el segundo aspecto fundamental que hay que invocar en el proceso de equilibración y que consiste en la necesidad en que se encuentra la asimilación realizada al reconocer, a través de la interacción con la cosa, las particularidades de ésta, las cuales generalmente no corresponder a las estructuras previas del sujeto, dándose por consiguiente una acomodación de estas estructuras previas a las características de la cosa y por ende una reestructuración. Dicho de otra manera, la acomodación es un proceso de reestructuración consecuencia de una acción asimiladora y provocada por la influencia externa, acomodándose las estructuras previas a las características de una situación nueva. Consiguiendo así, una nueva estructura, pero más equilibrada o desarrollada. Así pues, se trata de la relación A, B, C...con A', B', C'... , estrictamente en dirección inversa (): $\leftarrow$

Es conveniente recordar que una estructura está conformada a la vez por subestructuras, por consiguiente en este proceso de asimilación-acomodación participan relacionándose, uniendo sus diferencias e integrándose en una totalidad, diferenciación-integración.

Para ilustrar lo anterior pongamos como ejemplo el caso de un niño que se presenta ante la acción de tomar la sopa, la cual sería el esquema general, donde la acción de coger la cuchara, llenarla de sopa, mantenerla horizontal para no ~~derramarla~~, llevársela a las boca, son las subestructuras, las cuales son diferentes pero a la vez se integran en una totalidad, la acción de comer sopa.

A partir de lo anterior Piaget (1975), llega a plantear dos postulados que le permiten construir la teoría de equilibración:

Primer postulado.- Todo esquema de asimilación sigue un proceso de incorporar los elementos externos a él pero sólo los que son compatibles a su naturaleza. Esta acción inevitablemente mueve al sujeto hacia la investigación al encontrar, a través de la interacción con el exterior, que éste no corresponde a sus estructuras previas, provocándose lo que mas adelante llamaremos desequilibrio cognitivo.

Segundo postulado.- Como consecuencia de lo anterior, todo esquema de asimilación se encuentra obligado a acomodarse o a modificarse de acuerdo a las particularidades del exterior que ha sido asimilado, pero sin perder su continuidad; no se pierde el esquema, sólo se transforma, volviendo a ser un ciclo cerrado, pero a la vez abierto a otras reestructuraciones; donde cada reestructuración representa un equilibrio cada vez más equilibrado.

Como síntesis de estos postulados, se puede decir que para que se dé un nuevo equilibrio, debe existir un desequilibrio, a la vez, entre asimilación y acomodación, imponiéndose siempre la segunda a la primera, siempre en busca del equilibrio (Piaget, 1975:9).

2.2.1.2. El Desequilibrio y el Conflicto Cognitivo

Como ya fue mencionado el equilibrio se puede desequilibrar. Pongamos por caso en que existe una perturbación exterior consistente en una sustitución de B' por B'' ; de aquí se pueden generar dos situaciones, o bien hay rechazo por el sistemas cognitivo, o bien hay una modificación compensadora de éste; si es lo segundo, hay modificación de B en B_2 y sigue inserto en el ciclo, dándose por consiguiente la creación de un nuevo equilibrio del sistema cognitivo, con la posibilidad de que el sistema anterior B , siga siendo válido a nivel de subestructura para la clase de objetos de B' y además engendre una nueva subestructura para los objetos de B'' .

Antes de seguir adelante, es preciso aclarar que para Piaget la función de desequilibrio es la misma que la de **conflicto cognitivo** (Piaget, 1975:15), entendidos ambos como la acción mental perturbada y provocada en un sujeto por una situación nueva, la cual no coincide precisamente con sus estructuras ya existentes.

También se concibe al desequilibrio como la fuente de progreso en el desarrollo del conocimiento, siendo este factor la causa de todo proceso de equilibración; por consiguiente en el acto de conocer, el desequilibrio cognitivo o conflicto cognitivo, por si solo obliga a un sujeto cognoscente a superar su estado actual de conocimiento y buscar, por ende un estado de conocimiento más desarrollado.

Por otra parte es importante precisar que los desequilibrios desempeñan una función previa inevitable y necesaria en el factor motivacional que mueve al sujeto hacia adelante en busca de su equilibrio nuevamente, y de esta manera, procurar cerrar el ciclo de Asimilación-Acomodación-Adaptación, (A-A-A), lo cual conlleva al conocimiento de una nueva situación.

En este sentido queda claro que el conflicto cognitivo es el factor que mueve al sujeto hacia el conocimiento, por lo tanto el conocimiento no es estático sino dinámico; pero también es necesario precisar que los conflictos cognitivos sólo cumplen con una función desencadenadora del conocimiento, o sea es necesario pero no suficiente; por consiguiente, de lo que se trata en todo proceso de equilibración es que, a partir de provocarse el desequilibrio, se busque la superación de éste, salir de él para encontrar un nuevo equilibrio, y así, consecuentemente hasta lograr, lo que Piaget denomina la equilibración maximizadora, o el estado de equilibrio más acabado (Piaget, 1975:14-20).

De esta manera el desequilibrio o conflicto cognitivo como parte inicial de todo proceso de equilibración, en el que está de por medio el desarrollo cognitivo del sujeto o más específicamente el acto de conocer; resulta lógicamente pertinente hacer una transferencia de este factor cognitivo al acto de aprender y por ende, de manera particular, al proceso enseñanza - aprendizaje, estableciendo como condición necesaria, aunque no suficiente, partir de crear conflictos cognitivos en los alumnos, a partir de un contenido de aprendizaje que los motive intrínsecamente a la adquisición de nuevos aprendizajes; todo ello a través del planteamiento de problemas pertinentes y adecuados, que por si solos provoquen en el alumno dicho conflicto cognitivo.

2.2.1.3. El Conflicto Cognitivo y el Planteamiento de Problemas.

Nos encontramos ante el hecho real de establecer el vínculo teoría-práctica; en este caso se trata de tender el puente entre lo que se ha desarrollado con respecto al acto de conocer que tiene que ver con un asunto meramente cognitivo y el acto de aprender que tiene que ver con un asunto particular el aula, o sea del proceso enseñanza-aprendizaje. Lo anterior tiene relación con las ideas de Vygotsky cuando plantea que el acto de conocer está a remolque del acto de aprender.

De manera más específica, con base en Piaget y en su principio de equilibración, se encuentra que el desequilibrio, llamado también conflicto cognitivo resulta altamente relacionado y aplicable al asunto particular de la e-a, si se considera que éste es el elemento generador de todo aprendizaje (Piaget, 1978). Por tal razón resulta fundamental y necesario hablar de este principio en la enseñanza de las matemáticas.

Por consiguiente en el proceso de e-a también está implícito un proceso de desequilibrio-equilibrio, como plantea Piaget desde su teoría psicogenética. Para el caso educativo, una situación de aprendizaje contiene regularmente algo desconocido, nuevo o problemático para el alumno quien intrínsecamente sentirá la necesidad de comprenderlo o de resolverlo; la adquisición de tal entendimiento producirá la adaptación, o sea el equilibrio cognitivo requerido.

Ahora bien, para cuestiones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, independientemente de reconocer que el objetivo final es el de lograr la adaptación del alumno a las nuevas situaciones de aprendizaje (equilibrio), para lograr éste, lo primero que debemos de pensar como docentes es ¿cómo provocar el desequilibrio?, en otras palabras el conflicto cognitivo que a la vez sea motor que mueva al alumno hacia el aprendizaje de una nueva situación de aprendizaje.

Transportando este asunto a lo que interesa más específicamente, esto es la e-a de las matemáticas, se dirá que la respuesta a la pregunta antes planteada está dada a partir de que la nueva situación de aprendizaje debe de plantearse a través de una situación problemática, a través del planteamiento de un problema que contenga implícitamente el concepto por aprender; de tal manera que al solucionar el problema, se descubra o construya el saber matemático esperado o deseado.

De una manera mas especifica, de lo que se trata en este apartado es de relacionar un principio de la teoría piagetiana como el conflicto cognitivo con el aprendizaje de las matemáticas a través de la estrategia de enseñanza -aprendizaje denominada **planteamiento de problemas**. Lo anterior parte de la idea de que el conflicto cognitivo traído al asunto del aprendizaje se puede generar a través del planteamiento de problemas, siempre y cuando éste último sea capaz de desequilibrar cognitivamente al alumno para lograr aprendizaje significativo.

Ver fig. 3

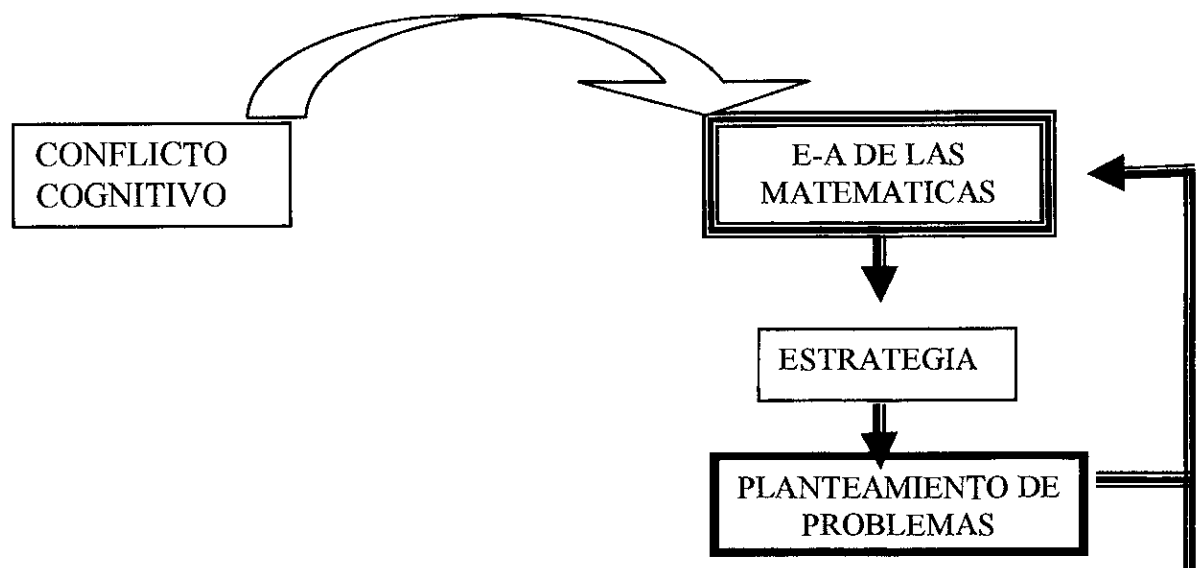


Fig. 3. Conflicto Cognitivo generador de Aprendizaje a través del planteamiento de problemas

Lo anterior lleva a distinguir que esta postura como teoría psicológica se inserta en el paradigma cognitivo, su técnica central es la modelación en la solución de problemas de la siguiente manera:

Un problema es considerado como una estructura de datos que incluye toda la información de valor acerca del problema y se pregunta qué clase de programa podría añadir información para que la estructura de los datos produzca la solución.

Desde esta perspectiva, Schoenfeld (1988) dice que la naturaleza de las matemáticas debe ser percibida por los estudiantes como resultado de una intrincada interacción de factores

cognitivos y sociales existentes, si ellos aprenden y aplican matemáticas, deberán verlas como un importante escenario social y no sólo como un saber cultural. Por lo tanto, los estudiantes deberán ser inducidos a participar analizando, haciendo conjeturas, estructurando y sistematizando información numérica y espacial, en escenarios de problemas que tengan significatividad en (Dossey, 1994:55-60).

2.2.2. La Teoría Socio cultural.

Vygotsky al igual que Piaget, concibe el acto de conocer como un hecho en construcción, pero mientras que Piaget pone el énfasis en la interacción del sujeto individual con el objeto de conocimiento. El autor que nos ocupa, agrega un aspecto más, que es el factor sociocultural en el cual está inserto el sujeto, quien participa de manera determinante como mediador en la construcción cognitiva. Esto es, para el desarrollo del niño no sólo es necesaria la manipulación de objetos, sino también la interacción social; por ende el medio físico y social definen en cada sujeto un tipo de entendimiento, un tipo de desarrollo intelectual; por tal razón, en el caso particular de la escuela, los compañeros y el profesor son los mediadores inmediatos en la apropiación del conocimiento.

Para Vygotsky, el “contexto social” es determinante en el “aprendizaje”, tiene una profunda influencia en cómo se piensa y en lo que se piensa, por lo tanto el contexto social debe de ser considerado en distintos niveles:

1. El nivel interactivo inmediato, constituido por las personas con quien interactúa en un momento dado.
2. El nivel estructural, constituido por las estructuras sociales como la escuela y la familia, y
3. El nivel cultural y social general, constituido por conocimientos, costumbres, creencias, mitos, religión y saberes de una sociedad como son el lenguaje, el sistema numérico, la tecnología, entre otros. (Bodrova y Leona, 2004:9).

Uno de los aportes más importantes de la postura teórica vygotskiana para el ámbito educativo es, sin duda, su concepto fundamental de la zona de desarrollo próximo, (ZDP); explicando que el sujeto cognoscente, en determinado momento, se encuentra inmerso en dos niveles de desarrollo evolutivo; esto es, el nivel de desarrollo real y el nivel de desarrollo potencial, a través de los cuales define la ZDP. Por consiguiente, la ZDP es la distancia

entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad que tiene un individuo de resolver por sí solo un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por la posibilidad de resolver un problema con la ayuda de los demás.

Ver figura 4.

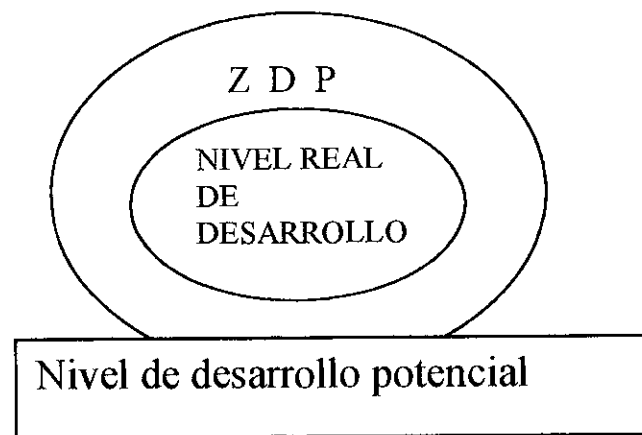


Fig. 4. Zona de Desarrollo Próximo

En la ZDP, se establecen las funciones que están en estado embrionario y que estarán consolidadas en el futuro, siempre y cuando sean alimentadas y desarrolladas adecuadamente; mientras que en el nivel real de desarrollo se integra con todas las capacidades ya consolidadas del sujeto.

Por ende, Vygotsky plantea que el nivel de desarrollo real caracteriza al desarrollo mental retrospectivamente, mientras que la ZDP caracteriza al desarrollo mental prospectivamente; entonces en la cuestión escolar, podríamos decir que lo que un estudiante es capaz de hacer hoy con la ayuda de los demás, en el futuro lo podrá hacer por sí solo, estableciendo así que el aprendizaje no se da aislado, sino en una interrelación con los demás; esto es, las situaciones de aprendizaje tienen una naturaleza social.

Como es de verse la teoría vygotskiana está, de alguna manera, más aterrizada a los procesos de enseñanza aprendizaje, tan es así que lo que crea la ZDP es un rasgo esencial del aprendizaje; esto es, en la ZDP, el aprendizaje estimula una serie de procesos evolutivos capaces de operar sólo cuando el niño está en interrelación con las personas de

su sociedad, sucediendo que cuando se internalizan estos procesos, se convierten en parte de los logros evolutivos independientes del niño (Reig y Gradoli, 1992:107).

Por otra parte, Vygotsky considera que el aprendizaje y el desarrollo intelectual actúan en una interrelación uno sobre otro durante toda la vida de los sujetos, por consiguiente el aprendizaje escolar tiene una historia previa; dicho de otra manera, el "Buen aprendizaje es aquel que precede al desarrollo intelectual, es decir, que los procesos evolutivos no coinciden con los procesos de aprendizaje, sino que el proceso evolutivo va a "remolque" del proceso de aprendizaje" (Vygotsky, 1984:139). Lo anterior indica que el "aprendizaje" paulatinamente se va convirtiendo en "desarrollo" a medida que los aprendizajes se van internalizando, de tal manera que en este tránsito, la función del lenguaje tiene un papel determinante. (Reig y Gradoli, 1992:109).

Otro concepto que reviste primordial importancia en la teoría vygotskiana, es precisamente el concepto de "internalización", llamado también ley de la doble función, que se refiere concretamente a la "autoconstrucción" del conocimiento del sujeto. En otras palabras, Vygotsky define a la internalización "como una reconstrucción interna de una operación externa" (Vygotsky, 1984:92).; dándose en dicha internalización un proceso que implica tres transformaciones:

1. Una operación que inicialmente representa una actividad externa que se reconstruye y comienza a suceder internamente.
2. El proceso sigue un recorrido que va del ámbito de lo "interpersonal" al ámbito de lo intrapersonal.
3. El proceso se da a través de una prologada serie de sucesos evolutivos.

Según Vygotsky la internalización se lleva a cabo a través de los instrumentos de los signos; esto es, bajo la tesis de que el desarrollo de la persona debe estar "mediado y estimulado" por la interacción social, entonces el desarrollo de conceptos, y la configuración mental del sujeto se da a través de la utilización de códigos lingüísticos en una relación social (Reig y Gradoli, 1992:110).

Con base en lo anterior, Vygotsky (1984), se refiere a otro proceso mental, diríamos de nivel superior, que es el de "la formación de conceptos", el cual se refiere a que la palabra está en el origen de un concepto y en la medida en que se internaliza se convierte en

mediador como signo del proceso; esto es, todas las funciones psíquicas superiores son procesos mediatizados por signos, por ende, en la formación de conceptos es la palabra, pero la palabra que poco a poco adquiere significado.

Para este autor, la adquisición de conceptos es un proceso único, sin embargo, distingue dos sistemas de aprendizaje de los mismos, uno en la formación de conceptos cotidianos u espontáneos y el otro, es el de formación de conceptos científicos (Reig y Gradoli, 1992:113).

Los primeros conceptos espontáneos se dan en la infancia y se refieren a todos aquellos que se forman en el contacto cotidiano del sujeto con las cosas y los objetos en su contexto social, sin hacer ningún análisis ni tomar conocimiento de las relaciones entre dichos objetos, aunque los manipule.

Los segundos, los conceptos científicos, son consecuentes de los primeros y sólo se logran cuando el sujeto es capaz de tomar consciencia de su propia actividad mental, que indica una relación con el objeto basada en la internalización de la esencia del concepto; desde otro punto de vista es lo que se conoce como meta cognición. Por lo tanto, tomar conciencia, según Vygotsky, significa lograr una generalización del pensamiento, esto es la formación de un concepto "sobre ordenado" que implica la existencia de un conjunto de conceptos "subordinados" jerárquicamente, sistema de relaciones de generalidad, (Reig y Gradoli, 1992:115).

Ver fig. 5

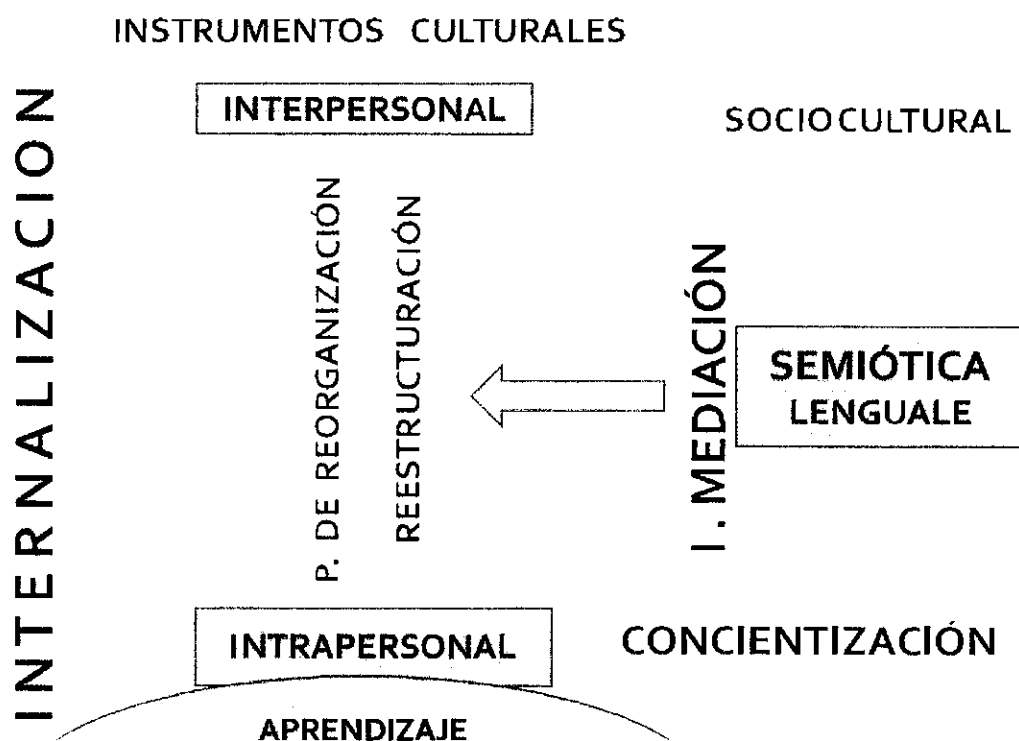


Fig. 5. Ruta Cognitiva de lo Inter a lo Intrapersonal

En síntesis, los Procesos Psicológicos Elementales pueden ser básicos para la adquisición futura de los *Procesos Psicológicos Superiores* a través de una acción reorganizadora y transformadora, todo ello solo y solamente en virtud de los instrumentos de mediación, como son principalmente los signos y el lenguaje.

De esta manera, para llegar a los procesos psicológicos superiores, los signos y el lenguaje trascienden a lo interno del sujeto para cumplir su cometido; o sea que bien podríamos decir que el *lenguaje*, en un principio aparece orientado centralmente hacia el “otro”, pero su poderoso efecto en la constitución “subjetiva” y en el “desarrollo cognitivo” radica en su propiedad de poder orientarse, a su vez, hacia el propio sujeto, o sea hacia sí mismo, hacia adentro, como un lenguaje “*interno*” (Baquero, R., 1999).

2.2.3. El Aprendizaje Significativo.

Ausubel y su aprendizaje significativo.

Un aspecto que hace fuertemente coincidente entre lo que establece la teoría psicogenética de J. Piaget y la postura teórica ausubeliana, es el asunto de las “estructuras previas”; cuestión que permite resaltar la importancia que tienen los conocimientos previos del alumno en la planeación y desarrollo de los aprendizajes escolares, pues, según Ausubel, un nuevo conocimiento modifica a un viejo conocimiento y viceversa, un viejo conocimiento es base para lograr acceder a un nuevo conocimiento, premisa que no sólo sostienen Piaget y Ausubel, sino otros autores como Vygotsky mismo.

La aportación más importante de la teoría ausubeliana y que tiene relación con el hecho de que para acceder a un nuevo conocimiento es necesario considerar el que ya se posee, es lo “significativo” que debe ser el nuevo conocimiento, para que éste se logre como tal. Esto

es, la aportación fundamental de Ausubel "ha consistido en la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la personal que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno" (Carretero, 1993:27).

Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello, lo que se comprenda será lo que se aprenderá y recordará mejor, porque quedará integrado a la estructura de conocimiento (Carretero, 1993:27). Por eso resulta necesario e importante que el docente propicie que el alumno establezca "relaciones" entre el conocimiento que ya posee y el nuevo por conocer, con la condición de que este último sea potencialmente significativo; esto es, que el nuevo conocimiento, no esté ni tan cerca, ni tan lejos de lo que el alumno ya conoce para que éste sea capaz de establecer dichas relaciones y por ende, le resulte significativo el nuevo conocimiento. Esto es a lo que el mismo Ausubel denomina "la distancia óptima".

Para lograr establecer dichas relaciones, es necesario entender lo que el autor denomina "puentes cognitivos", los cuales permiten pasar de un conocimiento menor elaborado o incorrecto a uno más acabado (Carretero, 1993:7).

Concretando, Ausubel define al aprendizaje significativo como "un proceso por el cual la información que se va a asimilar se relaciona con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva del sujeto, donde los conceptos inclusores, hacen posible que aquella adquiera significado para él. Así pues, diríamos que el proceso tiene carácter significativo y que el resultado es la adquisición de nuevos significados" (Martínez y Goefella, 1992:131).

El aprendizaje significativo se puede dar, según Ausubel, como uno de los cuatro tipos posibles: receptivo, repetitivo, por descubrimiento y significativo propiamente dicho; aunque él mismo establece que estos tipos de aprendizaje no necesariamente son excluyentes, pues el aprendizaje puede ser significativo por descubrimiento e inclusive por recepción.

Ante esta serie de aprendizajes diferentes, que corresponden a varias capacidades o formas de aprender, la primera y más importante distinción que hace el autor y que secciona a todos los tipos de aprendizaje, es el aprendizaje por recepción y aprendizaje por descubrimiento, y la otra, es la de aprendizaje por repetición y aprendizaje significativo (Ausubel, 1996:34-35). De estas dos distinciones plantea todas las posibles combinaciones.

Así se tiene que puede hablarse de aprendizaje significativo por descubrimiento, o bien de aprendizaje significativo por recepción, en una relación ortogonal (Ausubel, 1996:37).

Para el caso de la enseñanza de las matemáticas encontramos, desde el punto de vista constructivista, más apropiado desarrollar aprendizajes significativos por recepción o por descubrimiento, pues se afirma la idea de que los conceptos y las reglas matemáticas deben ser significativos al alumno para que los comprenda en el encuentro con la razón, descubriendo el sentido de los entes matemáticos, que de por sí son abstractos. Lo anterior no niega la existencia de los otros tipos de aprendizajes, en el sentido de que pueden estar presentes implícita o explícitamente, jugando un papel de transición y compartiendo propiedades en el proceso de aprendizaje. (Ausubel, 1996:34).

De manera más específica, en la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas es una de las estrategias constructivistas más adecuadas para lograr aprendizajes significativos, ya que involucra al aprendizaje por descubrimiento. Al respecto del planteamiento y resolución de problemas en el aprendizaje, Ausubel plantea que, un "aprendizaje es significativo cuando el alumno relaciona intencionadamente o sustantivamente una proposición potencialmente significativa del planteamiento de un problema a su estructura cognitiva, con el propósito de obtener una solución que, a su vez, sea potencialmente". (Ausubel, 1996:447).

Al respecto Ausubel (1996) distingue dos tipos de resolución de problemas:

1. El enfoque de ensayo y error, que consiste en la variación, aproximación y corrección aleatorias o sistemáticas de preguntas y respuestas, hasta encontrar lo que satisface parcial o totalmente el problema planteado.
2. El enfoque por discernimiento, el cual supone una disposición hacia la acción de descubrir una o más relaciones significativas de medios-fines que explican la solución de determinado problema.

Por lo anterior, es que Ausubel ubica a la resolución de problemas por discernimiento dentro del aprendizaje significativo por descubrimiento, dado que "las condiciones del problema y los objetivos deseados se relacionan intencionada y sustancialmente con la estructura cognoscitiva existente" (Ausubel, 1996:448). Esto no refiere necesariamente a un aprendizaje autónomo, lo cual es congruente con lo que plantea Bruner en relación con la

resolución de problemas en el salón de clases, pues dice que se constituye este asunto en una forma de descubrimiento "guiado o dirigido".

Ausubel (1996) concibe al discernimiento como proceso o producto; como proceso se refiere a las formas que se deben buscar para solucionar el problema, como producto se refiere a ciertas características distintivas del resultado, y éstas pueden ser: la subjetiva, que consiste en el sentimiento que se adquiere por el descubrimiento acertado "de ver la luz"; y la objetiva, que se refiere al hecho de tener la posibilidad de ser reproducido y transpuesto a situaciones semejantes, o sea tener aplicabilidad (Ausubel, 1996:448).

En conclusión, sobre este asunto, el discernimiento como forma de resolver un problema, es preferible al tipo de ensayo y error, pues "implica la existencia de una disposición hacia la formulación de hipótesis, con el objeto de entender las relaciones importantes que existen entre los medios y los fines de un problema particular." (Ausubel, 1996:449). De esta manera el discernimiento implica que haya conocimiento consistente de la existencia de la solución, o sea, que el sujeto que descubre algo en la solución de un problema, no sólo compruebe que sí funciona, sino que comprenda por qué funciona.

2.2.4. El constructivismo en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Teoría y práctica tendrían que constituir una unidad indispensable, sin embargo, establecer la relación teoría - práctica ha representado siempre un reto, pues de lograrlo significa el triunfo de la ciencia. En la realidad cotidiana son dos aspectos que parece caminan cada cual por su lado e inclusive algunas posturas subestiman a la teoría como referente necesario para explicar o realizar una práctica, en este caso pedagógica, pues consideramos que la teoría es un elemento indispensable para explicarnos una realidad o como lo dice Solé y Coll (1994) cuando se preguntan ¿Y teorías para qué? Para interpretar, analizar e intervenir en la realidad que dichas teorías intentan explicar.

Para el caso muy particular del trabajo docente en el aula, la teoría pedagógica es indispensable en tanto que constituye el marco y el referente que guía al docente, pues sólo la teoría puede proveer al maestro de grupo de los elementos para el análisis, la reflexión y la reorientación de su práctica; pero sobre todo para saber cómo se aprende y por ende cómo se debe enseñar.

Por ende, en primer lugar tenemos que partir de una concepción de *aprendizaje*, la cual la ubicamos en el paradigma constructivista que plantea que el “aprendizaje” tiene un carácter activo, personal, pero a la vez social, Se logra *aprendizaje* cuando:

“cuando somos capaces de elaborar una representación personal sobre un objeto de la realidad o contenido que pretendemos aprender. Esa elaboración implica aproximarse a dicho objeto o contenido con la finalidad de aprehenderlo; no se trata de una aproximación vacía, sino de las experiencias, intereses y conocimientos previos que presumiblemente pueden dar cuenta de la realidad” (Coll, 2000:16).

En otras palabras, se aprende cuando se da un proceso cognitivo, donde el sujeto paulatinamente va construyendo interactivamente imágenes de una realidad a partir de lo que ya conoce.

. En el acto de “*aprender*” se da una interacción entre lo que ya sabe el sujeto y lo nuevo por aprender, no sólo modificando lo que ya se posee, sino también interpretando lo nuevo de forma “peculiar” de manera que podamos integrarlo y hacerlo nuestro, proceso de asimilación-acomodación.

Por ende, si se da de esta manera el proceso enseñanza-aprendizaje, estamos aprendiendo significativamente, o sea construyendo un significado propio y personal de un objeto de conocimiento que realmente existe; por lo que podemos decir que el proceso de conocer, no se da como una “acumulación” de saberes, sino como una “reestructuración” de lo que ya se sabe. En este sentido, es importante aclarar que el aprendizaje significativo no necesariamente es un aprendizaje acabado, sino más bien el aprendizaje es significativo según las condiciones presentes, y siempre susceptible de ser perfectible. En la misma medida, ese aprendizaje será “significativamente” memorizado y será funcional y útil para seguir aprendiendo (Solé, Coll, 1994:17).

En una postura constructivista, El alumno(s), el docente y los contenidos tienen una función diferente, aunque deben actuar coordinadamente, cuestión que es responsabilidad del docente; por ende, éste tiene una doble responsabilidad, saber qué enseñar y saber cómo enseñarlo, para lo cual el docente debe tener el dominio pleno del saber escolar, porque no se puede enseñar algo que no se sabe; además debe conocer cómo aprende el niño para que con estas dos condiciones esté en posibilidades de diseñar estrategias adecuadas de enseñanza.

Por lo tanto, y con base en lo que la práctica exige a los que somos docentes, sabemos que la "falta de dominio adecuado de las materias escolares suele generar problemas de desigualdad y dogmatismo en nuestra intervención [...] también puede provocar impotencia ante las reiterados errores que cometen los alumnos por la falta de interés ante los contenidos que se enseñan" (Martín del Paso, 1999:30).

La situación anterior resulta más evidente si se trata de los contenidos matemáticos, de aquí que haya una necesidad marcada de los docentes para que tengan una preparación matemática adecuada que les permita reconsiderar sus propias concepciones epistemológicas y didácticas.

Por otra parte, resulta que los contenidos tienen mucho que ver con el aprendizaje significativo, pues lo significativo está asociado precisamente a éstos. Por consiguiente a este respecto, Ausubel (1996) plantea que el contenido escolar debe cumplir con dos condiciones para que sea "potencialmente significativo", esto es, que tengan significatividad "lógica" y significatividad "psicológica". La primera condición se requiere a que los contenidos deben de tener una estructura interna, asegurando que para efectos de enseñanza ésta estructura no se altere y siga conservando su estructura lógica; para la segunda condición, el contenido debe estar a la distancia óptima, ni tan cerca ni tan lejos de los conocimientos previos que posee el alumno con la finalidad de que éste pueda establecer relaciones entre lo que sabe con lo nuevo por aprender para que psicológicamente le sea significativo.

En esta doble responsabilidad que tiene el docente en el proceso enseñanza-aprendizaje, también es necesario que al hacer que el alumno establezca las relaciones e interacciones entre lo que ya sabe y lo nuevo por aprender, lo haga partir de situaciones problematizadoras, a partir de problemas que el niño tenga que resolver para que se logre

el conflicto cognitivo en el alumno, por ende, éste se mueva en la acción de aprender, propiciando el docente que el alumno no sólo aprenda unos contenidos, sino que "aprenda a aprender", según Zabala (1994).

Es conveniente resaltar que el constructivismo escolar considera que cada situación de enseñanza y aprendizaje es diferente y por ende, plantea requerimientos específicos con respecto al lugar, espacio, medios, alumnos y contenidos. Por consiguiente no se puede pensar en una estrategia general para todos los casos, ni tampoco en una específica que sirva para casos semejantes a manera de receta que hay que seguir, esto es "para cada caso una estrategia". De aquí que el papel y responsabilidad que asuma el docente es determinante.

2.2.4.1. Principios Constructivistas.

De acuerdo con Coll (1996,1997), la postura más apropiada para pasar de la teoría a la práctica es aquella que conforma, de manera integral y complementaria, un esquema global de los diferentes principios constructivistas que puedan formar un sistema coherente que permita tener una aplicación acertada de los procesos educativos en el aula, siempre y cuando cumpla entre otras, con las siguientes consideraciones:

1. Desde el punto de vista epistemológico, hay que definir los puntos en común de las posturas teóricas, o como diría Coll (1996), las "ideas fuerza".
2. Evitar caer en el simple catálogo de principios para construir una estructura jerárquica que, por una parte proporciona coherencia interna y por la otra, se inscriben en ella los principios explicativos que forman la columna vertebral de la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje.
3. Y que una vez seleccionados los principios relevantes a partir de las ideas fuerza y en función de la jerarquía establecida, éstos se "resignifiquen" y se "reinterpreten" con el doble fin de garantizar, por una parte, su "convergencia" y su "complementariedad" y por la otra, lograr su identidad en el asunto específico de la enseñanza y el aprendizaje de que se trate, en este caso de los conceptos matemáticos.

Por ende, los principios constructivistas que consideraremos en el diseño y operación de las estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, son los siguientes:

1. El aprendizaje a través del planteamiento de problemas es un acto de construcción, en donde el sujeto cognoscente participa a través de una acción tanto física como mental (Piaget, 1978).
2. El conflicto cognitivo, será el elemento fundamental para propiciar aprendizaje; esto es, el *conflicto cognitivo* será el motor que mueva al alumno(s) hacia la construcción o el descubrimiento de un nuevo concepto matemático por aprender (Piaget, 1978b).
3. En la planeación de la enseñanza, el docente debe identificar la distancia óptima entre lo que el alumno es capaz de hacer y aprender con la ayuda pedagógica de los demás, (ZDP, Vygotsky, en Baquero, 1999).
4. La ayuda pedagógica se irá ajustando a las condiciones que en todo momento se van presentando, de preferencia graduándola a manera de andamio esto es, al inicio la ayuda se proporciona con mayor control siendo más orientadora, para después paulatinamente ir retirando la ayuda hasta dejar que el alumno actúe física y mentalmente por sí sólo en el manejo del saber escolar (Vygotsky y Bruner, en Baquero, 1999).
5. La construcción del nuevo saber, según Vygotsky, es más propicio si se da en un ambiente socializador a partir de un proceso interpersonal, en donde el lenguaje es fundamentalmente el mecanismo de mediación, para después concluir en un proceso intrapersonal, al ser internalizado éste; es decir, el proceso de aprendizaje en la escuela no debe ser un acto individual sino colectivo, para que después se convierta en algo personal, cada quien logrará su propio aprendizaje. Todo lo anterior a partir de una fuerte interrelación entre docente - alumnos, alumnos-alumnos y alumnos-docente – contenido, determinado por el instrumento semiótico de mediación más poderoso que es el lenguaje, ya sea matemático o lingüístico.

6. El aprendizaje se inicia a partir de hacer presentes los conocimientos matemáticos previos necesarios y suficientes para acceder a un nuevo conocimiento, los cuales le permitirán al ser capaz de encontrar sentido, comprensión y significado al nuevo conocimiento.
7. El aprendizaje debe ser significativo, para lo cual el aprendiz debe establecer "relaciones sustantivas" y no arbitrarias entre sus conocimientos previos y el nuevo conocimiento matemático por aprender, para lo cual es necesario que éstos sean "potencialmente significativos" lógicamente y psicológicamente, (Ausubel, 1996).
8. El grado de significatividad de los aprendizajes matemáticos, está fuertemente condicionado, entre otras cosas, por el nivel de desarrollo cognitivo y la competencia operatoria de los alumnos. Esto es, lo que el alumno es capaz de aprender en matemáticas depende no sólo del desarrollo cognitivo del alumno, sino del conjunto de conocimientos, intereses, motivaciones, actitudes y expectativas que ha construido en el transcurso de sus experiencias, (Coll, 1997).
9. El proceso de aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos, sólo es posible a través de una intensa actividad mental constructiva del aprendiz a partir de la interacción objetiva con el contenido por aprender, el cual debe estar implícito en el problema por resolver, (situación problemática de aprendizaje), estando de por medio el diálogo y la comunicación de todos los actores involucrados, en donde la participación del docente es de orientador y guía.
10. La atribución de sentido y significatividad de los nuevos saberes matemáticos por aprender están directamente relacionados con los elementos motivacionales y de funcionabilidad respectivamente, es decir, con la posibilidad de ser utilizados en la solución de problemas de la realidad inmediata del alumno.
11. El aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos requiere de la memoria del aprendiz, pero esta memoria debe darse a partir de que el alumno descubra y comprenda la razón de ser de los saberes matemáticos; es decir, a partir de conocer el origen, significado, relación intrínseca y aplicabilidad, (

episteme del concepto). En otras palabras, la memoria es fundamental para el aprendizaje, pero debe ser una "memoria comprensiva" (Ausubel, 1996).

12. El problema matemático, en la medida de lo posible, debe ser planteado como una *situación problemática* (situación didáctica), que esté circunscrito en el entorno físico, sociocultural y cotidiano del alumno para que le encuentre sentido y aplicabilidad (Brousseau, 1998).

III.- EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

Mucho se ha dicho que la resolución de problemas es la estrategia didáctica para aprender matemáticas; pero además, hoy en día, con la reforma curricular actual que plantea la enseñanza para desarrollar competencias, la resolución de problemas ya no sólo es el medio, sino el fin, al considerar que el alumno debe de ser capaz de resolver problemas,

problemas de la vida real; aún así, las matemáticas escolares, siguen siendo necesarias aplicables y presentes en la vida sociocultural de las personas.

En este sentido es precisamente en el que se inscribe este trabajo de investigación, plantear problemas para aprender matemáticas. Por consiguiente presentamos a continuación las características de un problema matemático para aprender y establecemos los principios didácticos, que consideramos nos puedan permitir al docente enseñar para propiciar el aprendizaje significativo en los alumnos de los conceptos matemáticos específicos.

3.1. El planteamiento y resolución de problemas.

El planteamiento y resolución de problemas, como estrategia didáctica, es un proceso organizado de la acción y de los medios para alcanzar un objetivo de aprendizaje; que tiene como características el propiciar un aprendizaje creativo, constructivo, reflexivo y por descubrimiento, donde se da la socialización, el debate y la discusión orientada y dirigida; todo a partir del lenguaje (Nickerson, 1987).

En esta nueva forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, "El papel del maestro consiste, en primer lugar, en formular las situaciones didácticas que posibiliten la contextualización de los conocimientos matemáticos en secuencias de problemas que permitan a los alumnos "hacer" matemáticas de una manera interesante y que los lleve al encuentro de conocimientos convencionales" (Fuenlabrada, 1966:32)

Con esta estrategia se pone en juego la implementación de los propios recursos de los niños, sus conocimientos previos, el intercambio de ideas, la socialización del conocimiento y con la ayuda pedagógica del docente pueda arribar, no solamente a la solución del problema, sino a significar contenidos matemáticos cada vez más formales.

Resulta evidente, como es bien sabido y vivido por todos los que hemos pasado por la necesidad de resolver un problema matemático, que esta situación resulta angustiosa y hasta detestable; sin embargo, por otra parte, desde el punto de vista constructivista, resulta placentero, pues la satisfacción que brinda la experiencia de arribar al resultado correcto, ó

más aún, de lograr el descubrimiento o la creación de un concepto matemático personal es algo que provoca una gran dosis de motivación.

Si partimos de establecer que el planteamiento de un problema en la enseñanza de las matemáticas es la estrategia idónea para provocar el conflicto cognitivo, también es necesario precisar que no cualquier problema puede ser el adecuado para lograrlo; esto lleva consecuentemente a pensar cómo sería el problema a plantear, cuáles serían sus características más importantes, cuál sería su función, en qué momento plantearlo, entre otros.

1. ¿Qué es el planteamiento de un problema? De manera tácita es una pregunta, pero no cualquier pregunta, sino una pregunta clara, precisa, contundente, que no admita ambigüedades y que por sí sola exige una respuesta, ya sea falsa o verdadera; aunque priorizando lo verdadero sobre lo falso. Algunos metodólogos definen al planteamiento de un problema como el problema de investigación, el cual se expresa a través de una pregunta (Sánchez Puentes, 1993); otros como Carbolán (1996) en el ámbito de la matemática lo denominan indistintamente pregunta o investigación.

2. ¿Qué tipos de problemas hay de acuerdo a su función?, resulta importante aclarar que no todos los problemas tienen la misma finalidad en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, al respecto nos interesa destacar tres tipos, que en otras palabras responden a la pregunta ¿problemas para qué? :

- Problemas para aplicar un conocimiento ya aprendido, que al final son los que se utilizan para resolver los problemas de la vida cotidiana.
- o Problemas para clarificar un contenido o confirmar un aprendizaje, éstos son importantes en el afianzamiento del aprendizaje.
- o Problemas para aprender, este tipo de problemas tiene la función de propiciar el aprendizaje del concepto matemático motivo de aprendizaje, en el cual se encuentra implícito el propio concepto, regla o definición que se pretende descubrir o conocer.

Al hablar de planteamientos de problemas, Pozo (1998), se refiere especialmente a dos tipos de problemas: a los problemas propiamente dicho y a los ejercicios, haciendo una clara distinción entre ellos, definiendo a los problemas como una cuestión que constituye

una situación nueva o diferente para el aprendiz, en donde se requiere que tenga los referentes previos necesarios para hacerle frente al obstáculo, afirmándose que “si un problema que se soluciona repetidamente acaba por convertirse en ejercicio” (Pozo, et al (1998:17-18).

La última reforma en Planes y programas sobre la enseñanza de las matemáticas (SEP: 1999), según Mendoza J. en SEP (2004), plantea fundamentalmente, ajustándose a la propuesta de Pozo (1998), problemas en los cuales es necesario construir la solución, es decir, problemas para descubrir; problemas en donde hay que aplicar un modelo de resolución ya conocido, problemas para aplicar.

Por nuestra parte reconocemos, que aparte de estos tipos de problemas, existe otro tipo que consideramos fundamental en el proceso de e – a de las matemáticas, casi tan importante como los problemas para descubrir o aprender, siendo éstos los problemas para reafirmar un conocimiento ya descubierto, que deben tener la característica de exigir descubrir nuevas estrategias para encontrar un conocimiento ya aprendido.

Por otra parte, estos tres tipos de problemas deben de presentar un vigoroso orden en su desarrollo o utilización; esto es, en primer lugar lógicamente resulta necesario plantear problemas para aprender; en segundo lugar, problemas para afirmar y por último problemas para aplicar. (ver fig. 6)

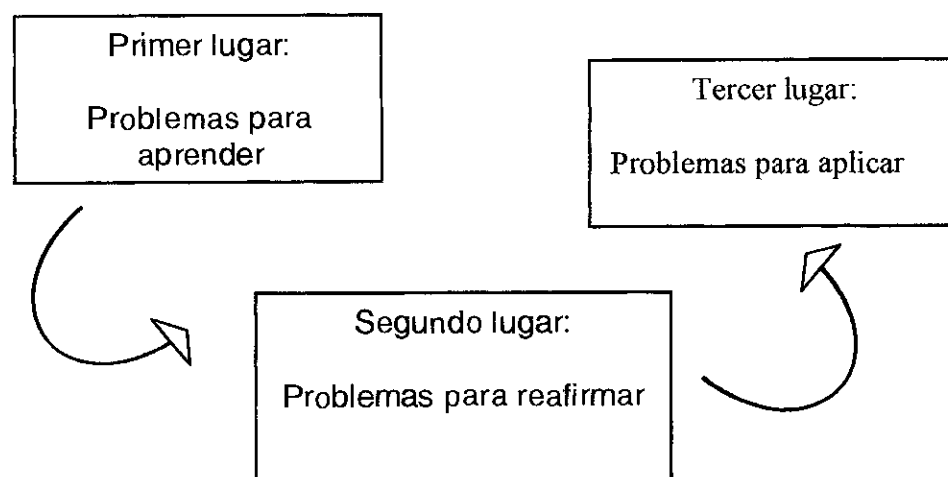


Fig. 6. Tipos de problemas

3. ¿Qué características debe tener el problema?

Al respecto es importante mencionar que los tipos de problemas considerados encuentran su fundamento en el paradigma constructivista asumido, por lo que el problema para que reúna esa condición se le llamará también problema **adecuado**, con las siguientes características:

En PRIMER lugar, contendrá en sí mismo el problema, regla o definición matemática a aprender; esto es, que al resolver el problema, por consecuencia se llegué a la construcción o descubrimiento del contenido motivo de aprendizaje.

En SEGUNDO lugar el problema debe ser interesante al aprendiz, esto es, debe ser potencialmente significativo, lo cual implica que el problema tenga significatividad lógica, orden u coherencia de contenido, y significatividad psicológica, es decir, que tenga relación con los conocimientos previos del aprendiz, que el problema se ubique a la distancia óptima; pero además que dicho problema tenga sentido y aplicabilidad.

En TERCER lugar, el problema debe provocar el conflicto cognitivo en el alumno para que éste se mueva hacia la búsqueda de la respuesta y por ende del aprendizaje, (motivación intrínseca), interactuando con el objeto de conocimiento y estableciendo relaciones entre lo que sabe y lo nuevo por aprender, logrando adaptarse a las nuevas situaciones de aprendizaje.

Para lograr lo anterior, es fundamental que el docente considere y haga presentes los conocimientos previos que son necesarios para la nueva situación de aprendizaje.

En CUARTO lugar, el problema puede estar seguido de una o más preguntas, las cuales deben estar seriadas lógicamente, lo que permitirá desarrollar una enseñanza a partir del descubrimiento dirigido.

En QUINTO lugar, el contenido matemático implícito en el problema a resolver, se presenta lógicamente en un estado inacabado, ya que de lo que se trata precisamente es de construir o descubrir el concepto matemático motivo de aprendizaje.

En SEXTO lugar, la forma de resolver un problema, desde su comprensión hasta el logro de su respuesta o descubrimiento de la misma, se debe de dar a partir de una fuerte socialización con la colaboración participativa de los involucrados, donde el mecanismo de mediación será fundamentalmente el lenguaje.

En SÉPTIMO lugar, el problema debe ser objetivado (Meyer, 1986); esto es, que en la intención de facilitar la comprensión del problema es necesario representarlo a través de un modelo ilustrado por medio de símbolos, diagramas, objetos y, en la medida de lo posible, a partir de *situaciones problemáticas reales*. Lo anterior, según la teoría del significado⁵ que refiere a la concretización del caso, representando el problema planteado de una manera más objetiva o concreta, transformando en lo posible lo abstracto del problema.

4.- ¿Cómo plantear un problema?

Para responder a tal cuestionamiento se ha arribado a la idea de que el problema debe ser transformado en una situación de aprendizaje que le hemos llamado **situación problema (situación didáctica)**, ya sea que se trate de problemas para aprender o problemas para re significar o afirmar conocimiento.

Esta idea nos lleva necesariamente a precisar el problema, como aquí se está considerando, no se reduce a un enunciado o a una simple pregunta, sino más bien a una transformación de la pregunta matemática a una situación concreta, que puede ser un modelo que represente o tenga implícito el conocimiento matemático a aprender, es decir, es el planteamiento de una situación de aprendizaje que resulta para los alumnos una dificultad a un obstáculo, pero que a la vez resulta susceptible de ser superado.

Por la otra parte, la situación problema debe lograr ser apropiada para el alumno, esto es, que el alumno se debe de sentir interesado y comprometido, no con el docente, sino con él mismo en busca de la solución al problema planteado. Por consiguiente, no basta con comunicar el problema a los alumnos, sino hacer que el alumno acepte esa responsabilidad, esto es lo que Brousseau (1983) denomina la devolución de la situación a-didáctica.

Se trata, como lo dice Brousseau (1983), cuando habla de la situación didáctica, de que el profesor imagine situaciones matemáticas, que los alumnos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos, donde el conocimiento matemático implícito aparezca como la solución de dicho problema, descubriéndolo o construyéndolo.

⁵ Todos los procesos como percibir y pensar son vías en las cuales se busca expresar algún esfuerzo fundamental en pos del significado. Por ende, este esfuerzo es simplemente el intento de concretar algo dado distinto (Bartlett, 1932:227)

La situación problema, es entonces como la modelación concreta de un conocimiento matemático, a través de un problema; esto es, no es simplemente la pregunta que implica explícitamente al conocimiento, sino es la transformación de dicha pregunta a un problema que expresa una situación problemática que contiene implícitamente el conocimiento matemático por aprender.

Si el problema se encuentra ubicado o es parte de la realidad cercana al alumno, este será más significativo y por consiguiente tendrá más posibilidades de ser comprendido.

Ejemplo:

Tema general: Productos notables.

Tema específico: Cuadrado de un binomio – Trinomio cuadrado perfecto.

Planteamiento del problema ¿Cuál es el área de una superficie cuadrangular que tiene de lado $(a+b)$?

Situación Problema: Encontrar el área del patio escolar de forma cuadrangular de lado $a+b$.

Camino a la construcción del concepto, partiendo de la *situación problema* pasando por la concretización:

Expresión abstracta

Expresión Concreta

Situación Problema

$$\text{Área} = L \times L = L^2$$

$$\text{Si } L = (a+b)$$

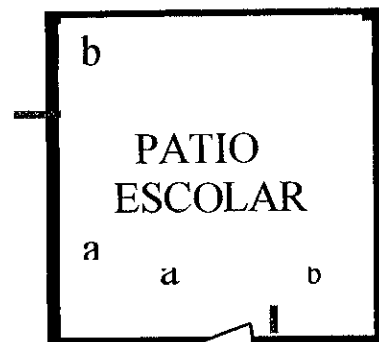
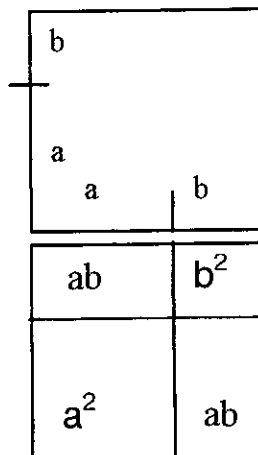
$$\text{Área} = (a+b)^2$$

$$\text{Área} = (a+b)(a+b)$$

Operación

$$\begin{array}{r} (a+b) \\ \times (a+b) \\ \hline a^2 + ab \\ + \quad ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\text{Área} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



3.2. Desarrollo de Situaciones Didácticas.

Planteamiento de problemas matemáticos a manera de *situación problema* para acceder a conceptos matemáticos.

ILUSTRACIÓN DE UN **PRIMER CASO**:

EL JUEGO DE DOMINÓ.

NIVEL EDUCATIVO: Primaria.

TEMA: Suma de Fracciones de Diferente Denominador.

OBJETIVO PARTICULAR:

Propiciar el Aprendizaje Significativo del Alumno del Concepto de Suma de Números Fraccionarios de Diferente Denominador.

OBJETIVOS COLATERALES:

Confirmar o Reafirmar los conceptos de: Número fraccionario, suma de números fraccionarios de igual denominador, simplificación de fracciones, fracciones equivalentes, transformación de fracciones comunes a fracciones decimales y viceversa y representación gráfica de una fracción.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

Todos los conceptos referidos en los objetivos colaterales, además de las operaciones elementales con números naturales y la idea de que todo número fraccionario(fracción común a/b) indica una división $a \div b$.

SITUACIÓN DIDÁCTICA:

Jugar al juego de dominó con fichas ilustradas con grabaciones de números fraccionarios.

DESARROLLO DEL JUEGO:

Reglas y Condiciones:

- 1.- El juego se juega por parejas formando equipos de cuatro alumnos.
- 2.- La regla básica del dominó, es colocar fichas contiguas que coincidan con su representación gráfica o su fracción equivalente.
- 3.- El juego se juega abierto; o sea, después de que cada jugador haya tomado su manajo de fichas, éstas se destapan, para permitir la participación consentida de todos los interesados en el juego (**socialización del conocimiento**).

- 4.- En consecuencia de lo anterior, el juego se juega **hablado**; en donde los cuatro jugadores (compañeros y contrincantes) exponiendo sus **conocimientos previos**, pueden opinar sobre todas las jugadas realizadas o por realizar, haciendo sugerencias, observaciones y correctivos sobre de éstas, emitiendo las razones matemáticas pertinentes (Socialización, **Aprendizaje Interpersonal**).
- 5.- Las fichas que contengan en ambas caras fracciones equivalentes se denominan mulas y se colocan en la jugada de manera perpendicular (acostada).
- 6.- La ficha que abre el juego es la mula de blancas.
- 7.- El juego se gana cuando un miembro de cualquier pareja tira la última ficha. En estos momentos se debe saber cuántos puntos ganó la pareja ganadora; para lo cual se **sumarán las fracciones** de las fichas de la pareja perdedora.
- 8.- La partida de dominó se constituye de uno o varios juegos y se gana, cuando alguna de las parejas logra la suma de puntos acordados al inicio de la partida.

CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS:

- 1.- La **ayuda pedagógica** está presente a lo largo y desarrollo de todo el juego entre alumnos (expertos y novatos), pero sobre todo por parte del docente.
- 2.- El **diálogo** y el debate (a través del lenguaje respetuoso y colaborativo), es el mecanismo de mediación sustantivo para socializar los saberes y acceder al aprendizaje más auténtico.
- 3.- En el desarrollo del juego y en cada tirada, es seguro que se presenten **Conflictos Cognitivos** que motiven intrínsecamente a los aprendices.
- 4.- Al final del juego es muy posible que se presente la **situación problema** siguiente:
 Cómo sumar: $a/b + c/d = ?$
 Ante esta situación problema, la ayuda pedagógica del docente será determinante y sustantiva, sobre todo en lo que se refiere a presentar y **hacer notar** la IMPOSIBILIDAD de sumar $a/b + c/d$, (fracciones de diferente denominador); para que a partir de aquí precisamente se pueda arribar a la estrategia de solución y por ende al **algoritmo** correspondiente. Orientando a los alumnos en la estrategia que consiste en **una**

transformación de las fracciones involucradas en fracciones de igual denominador a partir del concepto de fracciones equivalentes.

	$a/b + c/d = ?$ IMPOSIBILIDAD	Fundamento:
	$ad/bd + cb/bd =$ IMPOSIBILIDAD RESUELTA	$a \times 1 = a$ $d/d = 1$ $a/b \times 1 = a/b$ $ad/bd = a/b$

Se observa: Que los denominadores de las fracciones a sumar son comunes (fracciones de igual denominador).

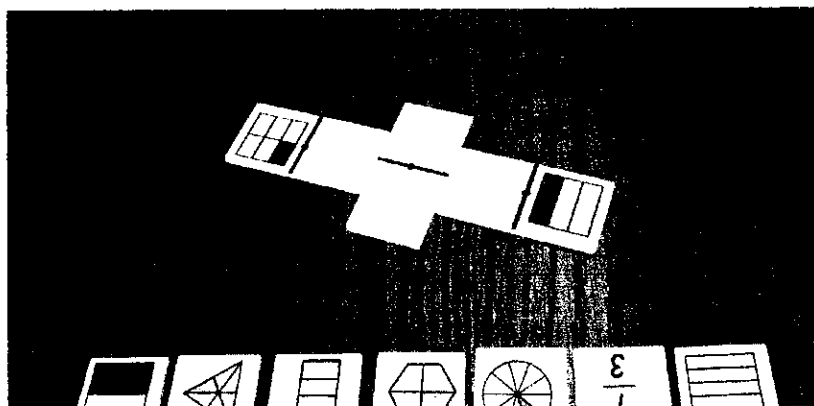
ILUSTRACIONES DE ALGUNAS SITUACIONES PROBLEMA DURANTE EL DESARROLLO DEL JUEGO:

Primera Situación:

Supongamos que el jugador (1); salió con la ficha de blancas; el jugador (2) tira la ficha (un sexto, blanca); el jugador (3) tira la ficha (blanca, 0.33). Al jugador (4) se le complica el juego, pero a la vez **tiene varias opciones**.

Ante tal **situación problema la participación de todos se hace posible.**

(Ver ilustración 1)



CONFLICTO COGNITIVO

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7

Ilustración 1

Jugador (4)

Situación de debate:

Dado las fichas que posee el jugador (4), éste tiene varias opciones de tiro, siendo las fichas: F5, F6, pero también la ficha F2 y F3. La discusión se dará en función de que se trata de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones y su transformación en fracción común a fracción decimal: $2/6 = 1/3 = 0.33$ y $1/6 = 0.166$.

Segunda Situación:

Supongamos que ahora, dado el desarrollo del juego, le toca tirar al jugador (1)

Y se le presenta la siguiente situación (Ver ilustración 2):

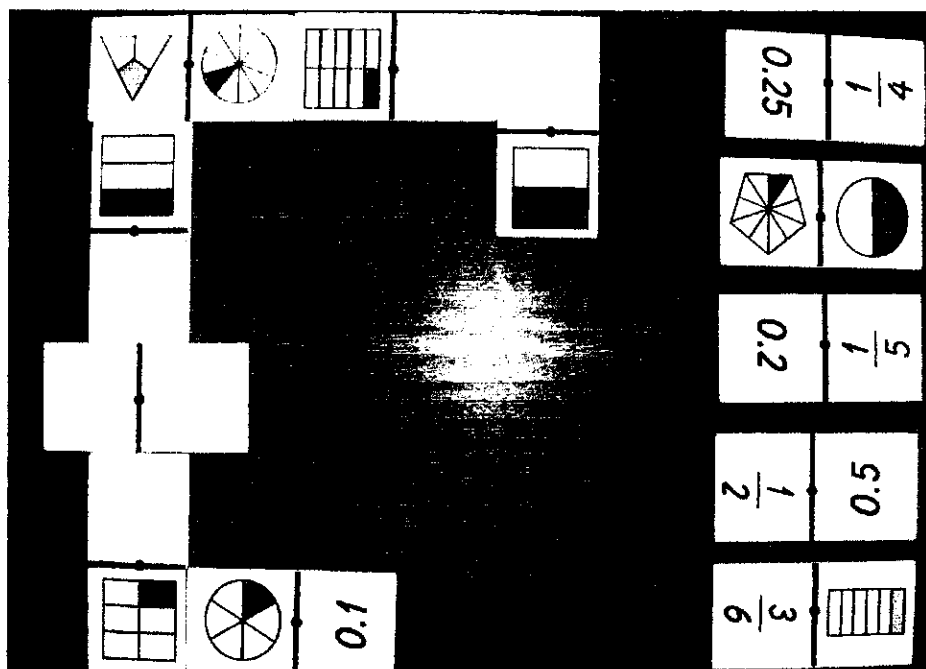


Ilustración 2

Jugador (1)



Situación de debate:

Dado las fichas que posee el jugador (1), éste tiene dos opciones de tiro, siendo la ficha: F2; F4 y F5. Con respecto a la ficha F4, ésta tiene las fracciones equivalentes $0.5 = \frac{1}{2}$. Entonces cómo tendrá que colocar la ficha si se trata de una mula? Por otra parte, la ficha F5, si se simplifica tenemos: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

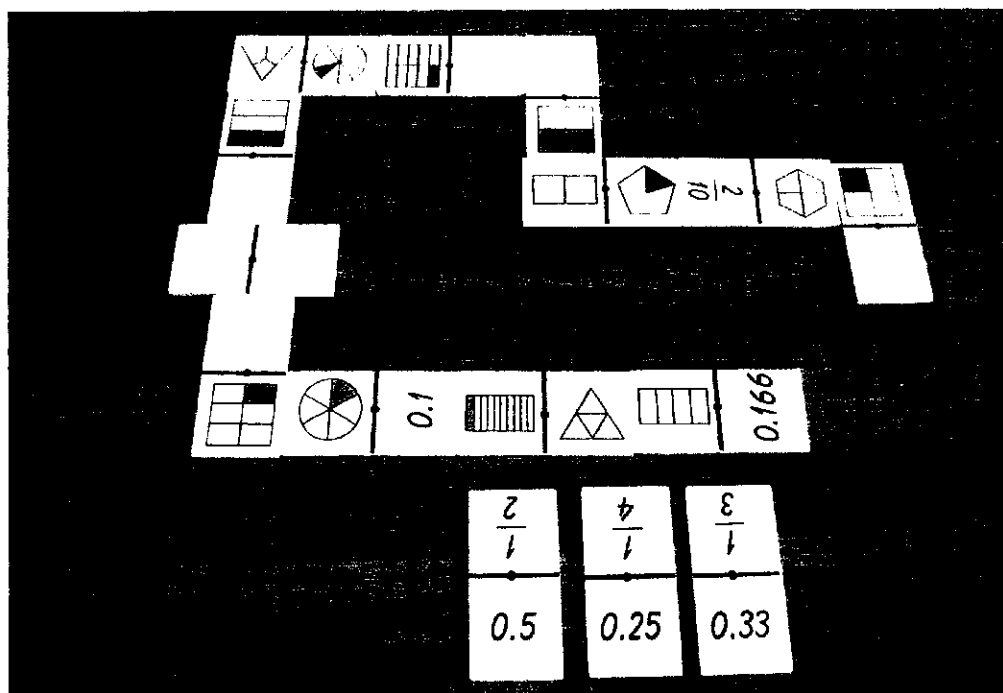
La discusión se dará con respecto a las fracciones equivalentes y a la transformación de una fracción común a fracción decimal y viceversa.

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

Tercera situación problema (al final del juego)

Supongamos que al final del juego, la pareja perdedora se quedó con las siguientes fichas:

(Ver ilustración 3)



F1 F2 F3

Valor de las Fichas de la pareja perdedora: $1/2$; 0.5; $1/4$; 0.25; $1/3$ y 0.33

Recordemos la regla: se trata de sumar los tantos (números fraccionarios) de las fichas de la pareja perdedora, los cuales serán tantos para la pareja ganadora.

¿Cuántos PUNTOS GANÓ LA PAREJA GANADORA?



PROCEDIMIENTO:

- Asignar valor numérico a cada una de las fichas, como se ilustra.
- Transformar las fracciones a **fracción común** y distinguir que algunas (fracciones), tienen **igual denominador** y otras **no**:
 $1/2$; $1/2$; $1/3$, $1/3$; $1/4$; $1/4$
- Orientar hacia la asociación de fracciones de igual denominador para operar su suma:

$$(1/2 + 1/2) + (1/3 + 1/3) + (1/4 + 1/4) =$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow$$

$$(1/2+1/2) + 2/3 + 2/4 =$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 + (2/3 + 2/4) =$$

SITUACIÓN PROBLEMA: ¿Cómo sumar: $2/3 + 2/4$? Destacar la imposibilidad de resolver esta suma.



ANDAMIAJE:

Orientar hacia la solución. **Guiar** y Dirigir la participación de todos y cada uno de los integrantes de cada equipo para que descubran la forma de eliminar la **imposibilidad** de sumar fracciones de diferente denominador, A través de las siguientes actividades:

- Transformar las fracciones $2/3$ y $2/4$ a fracciones de igual denominador, por medio de sus fracciones equivalentes.

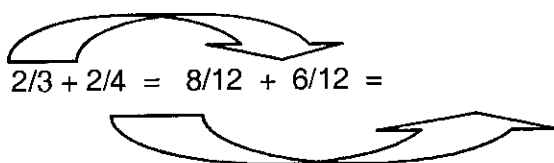
Fracc. Equivalentes de:

$$2/3 = 4/6 = 6/9 = \mathbf{8/12} = 12/18 = \text{etc.}$$

Fracc. Equivalentes de:

$$2/4 = 4/8 = \mathbf{6/12} = 8/16 = \text{etc.}$$

- Encontramos que: $8/12$ y $6/12$ tienen igual denominador, por consiguiente:

$$2/3 + 2/4 = 8/12 + 6/12 =$$


- Resolviendo:
- $8/12 + 6/12 = 14/12$; es la solución a la **Situación problema** de sumar fracciones de diferente denominador como una posibilidad de acercarse al algoritmo general.
- Puede haber otras estrategias de solución, descúbrelas en dialogo con tus compañeros.
- Orientar al equipo a que discutan la idea de **fracción mixta** y **las representen** a partir de tener **14/12**. **Para llegar a que:**

$$14/12 = 1 + 2/12 = 1.6$$

Regresando al juego. Recordemos que se había quedado un entero pendiente de sumar, por consiguiente, los puntos de la pareja ganadora en este caso son: $1 + 1.6 = 2.6$ pts.

ILUSTRACIÓN DE UN SEGUNDO CASO.

Primera parte**TEMA 1:** Resolución Gráfica de Ecuaciones Cuadráticas a partir de Áreas.**Nivel:** Educación Secundaria.**Objetivos:**

- 1.- Interpretar geométricamente una ecuación cuadrática.
- 2.- Descubrir la Fórmula General para resolver una Ec. Cuadrática.

Justificación: Generalmente en la enseñanza tradicional la fórmula para resolver ecuaciones de Segundo Grado se les presenta a los alumnos de manera acabada, desconociendo éstos su origen y significado; reduciéndose el aprendizaje a una simple memorización y aplicación de fórmulas en ejercicios, careciendo éstas de todo sentido y comprensión para los aprendices.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:Sea la ecuación: $X^2 + 10X = 39$

¿Cómo resolver dicha ecuación utilizando gráficamente áreas?

Autor: Abu Jáfar Muhammad
Ibn Musa Al – Khwarizmi.
(780-850 D.de C.) en su
Obra Hisab al-jabr W al-
mucabala

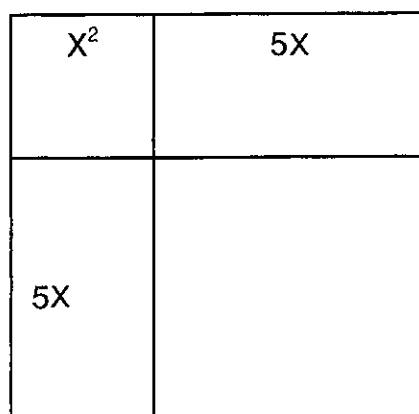
**ANDAMIAJE:**

- 1.- Construir un cuadrado de lado X y adiciónese un rectángulo de ancho $= X$, y largo $= 10$ unidades. Como se muestra en la fig. siguiente:

X^2	$10X$
-------	-------

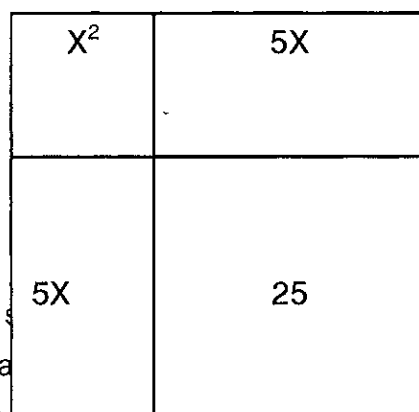
1ª.- Cuestionar a los alumnos integrados en equipos, sobre cuál será el área de este rectángulo? (Situación problema 1). Dirigir a los alumnos a que lleguen a descubrir que el área del rectángulo = $39u$ cuadradas; dada la ecuación.

2.- Sugerir a los alumnos a que dividan el rectángulo adicionado ($10X$) en dos partes iguales por la base, tal que el lado mayor de cada uno sea de $5u$; trasladando una de las partes y pegándola a la base de X^2 . Quedando la fig. siguiente:



3.- Pedir a los alumnos que completen con un cuadrado de lado = $5u$, de tal forma que adicionado a la fig. anterior nos de un cuadrado perfecto.

4.- pedir a los alumnos que dibujen dicho cuadrado:



4ª.- Cuestionar a los alumnos sobre el cuadrado obtenido y que en equipo descubran la respuesta

4b.- Cuestionar a los alumnos, una vez obtenido el área total del cuadrado anterior, cuál será entonces la medida de cualquiera de sus lados? (Situación problema 3).

4c.- Cuestionar a los alumnos sobre cual será entonces el VALOR de X? (Situación problema 4).

5.- La situación anterior se ilustra con la misma figura:

x^2	$5X$
$5X$	25

6.- Los resultados hacia los cuales se tienen que dirigir a los alumnos, según los cuestionamientos anteriores son los siguientes:

6ª.- Según la ecuación planteada, y el área del primer rectángulo, el área total del cuadrado es: $39u^2 + 25u^2 = 64u^2$. Por consiguiente, dicho cuadrado tiene de lado $8u$; porque 8×8 da 64; o bien $\sqrt{64u^2} = 8$. Ahora bien, si ya sabemos que el cuadrado tiene de lado = 8 , y sabemos también que una parte de este lado vale 5 , entonces el valor de $X = 8 - 5$; O sea: $X = 3$.

O también: $X + 5 = 8$, de donde $X = 8 - 5$; $X = 3$

Nota: Al Kwarizmi no acepta la sol. de $X = -7$, por ser negativo

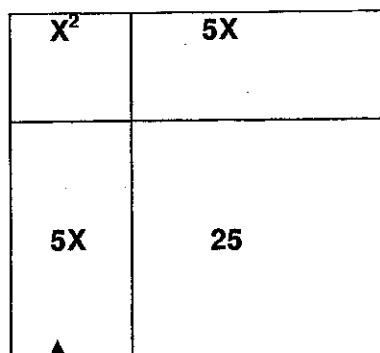
Segundo Momento:

Subtema: La fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. **Objetivo:**

Construir la Fórmula General para resolver ecuaciones de segundo grado.

Conocimientos previos: Cuadrado de un binomio, trinomio cuadrado perfecto y su representación geométrica.

Situación Didáctica. A partir de la ecuación $X^2 + 10X = 39$ y del trinomio cuadrado perfecto $X^2 + 10x + 25$; representado gráficamente por el cuadrado obtenido en el primer momento, que se ilustra a continuación. **Cómo deducir la fórmula general?**



ANALIZANDO:

$X^2 + 10X = 39$

$(10/2)^2$

$(5)^2$

25

$39 + 25 = 64$ Área del
cuadrado
mayor

A partir de la situación problema anterior. **Plantear el problema: ¿Cómo deducir la fórmula general?**

Andamiaje:

- 1.- Preguntar a los alumnos qué pasó con el coeficiente de X en su relación con la gráfica anterior (cuadrado). O sea cómo llegar a **25**.
- 2.- Orientar a los alumnos a que relaciones la figura geométrica (cuadrado) con la

Ecuación $X^2 + 10X + 25 = 64$; $39 + 25 = 64$

- 3.- Preguntar cómo se obtiene el valor **8** y éste qué representa en el cuadrado.

3ª.- Los alumnos tendrán que llegar a que $8 = \sqrt{39 + 25}$; y este valor es el lado del cuadrado.

- 4.- Dada la raíz cuadrada anterior, preguntar qué hay que restar para encontrar el valor de X ?

4ª.- La respuesta a encontrar es: $(\sqrt{39+25}) - 10/2$; Por lo tanto $X = 8 - 5$.

De donde: $X = 3$

5.- Pedir a los alumnos que intenten expresar en su forma general la ecuación:

$$X^2 + 10X = 39$$

5ª.- La respuesta esperada es: $X^2 + 10X = 39$ es de la

$$\text{Forma: } aX^2 + bX = C \text{ con } a = 1$$

$$\text{Por lo tanto: } X^2 + bX = C$$

6.- Pedir a los alumnos, que a partir de lo anterior, expresen en forma algebraica la expresión numérica: $(\sqrt{25 + 39}) - (10/2)$.

6ª.- La respuesta esperada es: $(\sqrt{(b/2)^2 + C}) - (b/2)$

7.- Pedir a los alumnos que hagan operaciones, dada la expresión anterior y encuentra la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

7ª.- La respuesta esperada es:

$$X = \frac{(\sqrt{(b/2)^2 + C})}{1} - \frac{b}{2}$$

$$X = \frac{2(\sqrt{(b/2)^2 + C}) - b}{2} \quad \text{Por la operación suma de fracciones}$$

$$X = \frac{\sqrt{(4b^2/4 + 4C)} - b}{2} \quad \text{Por distributiva de la multiplicación}$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4C}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Por conmutatividad de la suma y} \\ \text{ley de cancelación} \end{array}$$

Primera fórmula general para la resol. De Ec. De 2º grado, para $a=1$

Consideraciones:

1.- Si la Ec. $X^2 + bX = C$, la igualamos a cero, tenemos: $X^2 + bX + C = 0$,

Por consiguiente la Fórmula general es: $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4C}}{2}$; porque

C al pasar al primer miembro cambia de signo.

Comprobando $X^2 + bX = C$ es: $(X^2 + bX) + (-C) = 0$

Según la Ec. Particular: $39 + (-39) = 0$

2.- Preguntar, qué pasa con la fórmula general si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ (a coeficiente de X^2).

Esto es, dada la ecuación $aX^2 + bX + C = 0$, encontrar la fórmula general.

Andamiaje: Orientar a los alumnos a encontrar un camino que puede ser: el dividir a toda la expresión entre (a), por lo tanto queda:

$$aX^2/a + bX/a + C/a = 0 \quad ; \quad X^2 + bX/a + C/a = 0.$$

Por consiguiente: el coeficiente de X^2 es $a = 1$; el coef. De X es b/a y el término independiente es C/a . En otras palabras $a=1$; $b=b/a$ y $C=C/a$.

8.- Por último: pedir a los alumnos que construyan la **fórmula general completada de toda ecuación de 2º grado**. Sustituyendo los valores anteriores en la fórmula general anterior.

8ª.- Procedimiento esperado:

$$-b = -b/a; \quad C = C/a$$

$$\text{Entonces: } X = \frac{-b/a \pm \sqrt{(-b/a)^2 - 4C/a}}{2} \quad \text{Sustituyendo en la fórmula}$$

$$X = \frac{-b/a \pm \sqrt{(-b/a)^2 - 4C/a}}{2} \quad \text{Suma de fracciones}$$

$$X = \frac{-b/2a \pm \sqrt{(-b/a)^2 - 4C/a}}{2} \quad \text{División de fracciones}$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2/a^2 - 4C/a)}}{2a} \quad \text{Elevando potencias}$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)/a^2}}{2a} \quad \text{Resta de fracciones}$$

$$2a \quad 2$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Sacando raíz a } a^2$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{División de fracciones.}$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Sigma \text{ de Fracciones}$$

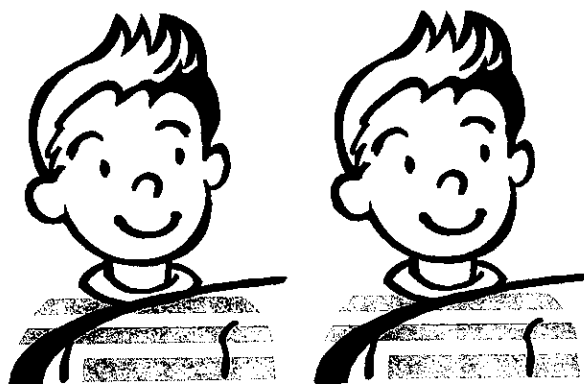
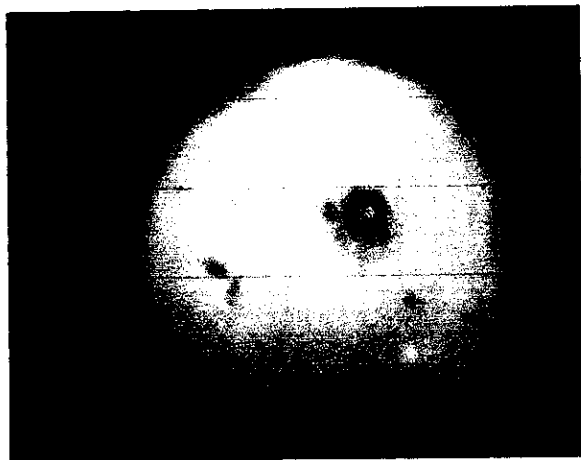
FÓRMULA GENERAL



ILUSTRACIÓN DE UN TERCER CASO
PARTIR Y REPARTIR

PRIMER MOMENTO:**Nivel:** Primaria**Tema:** El Concepto de Número Fraccionario**Objetivo:** Que el alumno descubra el concepto de Número Fraccionario como “**división de dos enteros**”, esto es: Dado dos números enteros a y b , entonces un número fraccionario es a/b ; con $b \neq 0$.**Objetivo Colateral:** Descubrir el concepto de fracción propia.**Conocimientos previos:** División exacta de números enteros positivos.**Material:** Plastilina y cortador de plastilina.**Actividad previa:** Realizar un ejercicio de modelado en plastilina con los alumnos (modelar una naranja por alumno del mismo tamaño en equipos de cuatro).**Situaciones Didácticas:****Situación Problema 1:** Pedir a los alumnos por equipo que tomen **una naranja** y la **repartan entre dos de ellos** mismos en **partes iguales**.

La pregunta es:

¿Cuánto le tocó a cada uno de ellos?**CONFLICTO COGNITIVO**

- 1.- Pedirles que discutan la respuesta en equipo.
- 2.- La posible respuesta puede ser:

La mitad o un medio de la naranja

- 3.- Pedirles que intenten representar numéricamente

tal parte o fracción, trabajando en equipo.

Andamiaje: Orientar la actividad hacia la respuesta, induciendo hacia la representación convencional.

Respuesta Esperada: **1 entre 2 = $1 \div 2 =$ La mitad = a un medio = $1/2$**

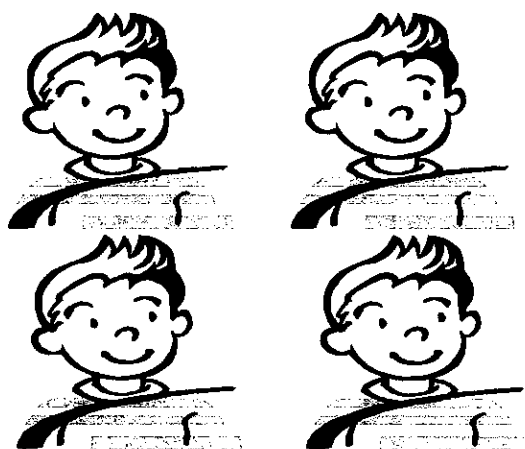
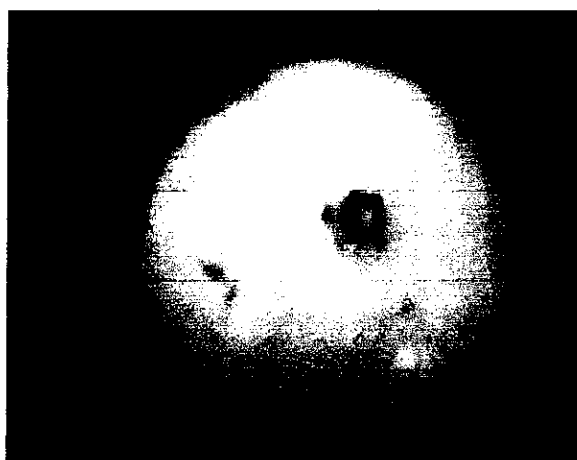
Situación Problema 2: Pedirle a los alumnos que tomen **otra naranja** y la repartan en partes iguales, ahora **entre los cuatro** del equipo.

1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

¿Cuánto le tocó a cada niño?, o bien:

CONFLICTO COGNITIVO

¿Qué parte de la naranja le tocó a cada niño?



¿Cómo llamarle a esta parte?

¿Cómo representarla numéricamente?

2.- Inducir a cada equipo hacia la notación convencional.

3.- Andamiaje:

Orientar la actividad para encontrar las respuestas esperadas:

Uno entre cuatro = $1 \div 4 =$ un cuarto = $1/4$

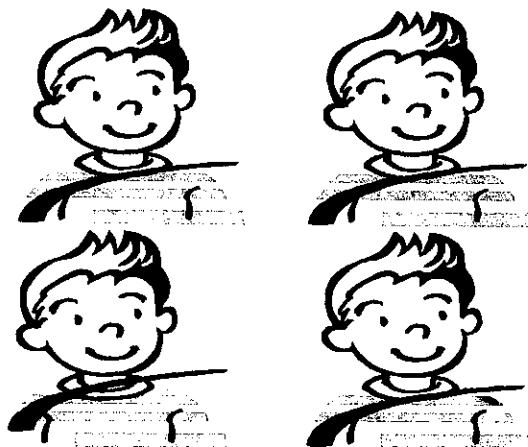
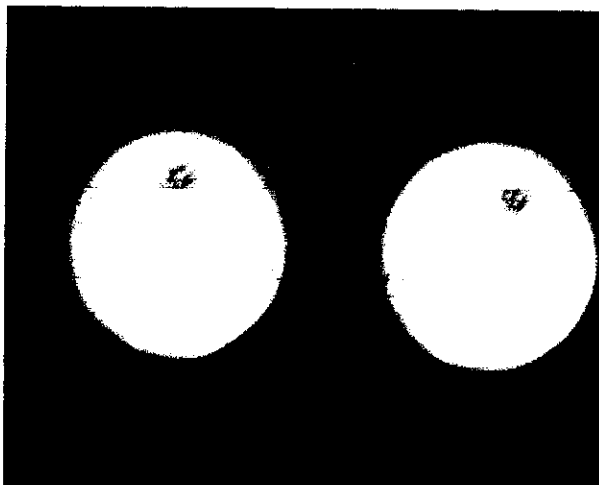
Situación Problema 3.

1.- Si tomamos ahora las **dos naranjas** restantes y las **repartimos** en partes iguales entre los **cuatro niños** del equipo. La pregunta es:

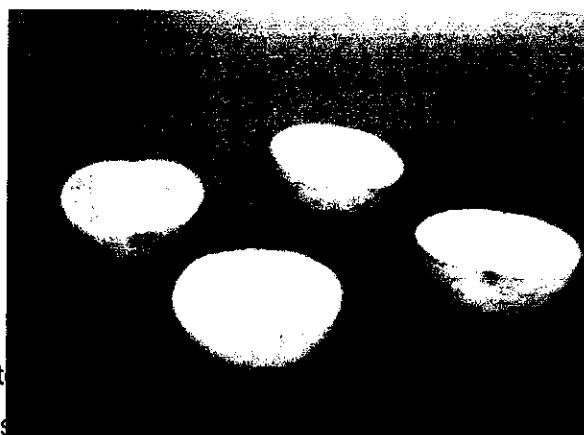
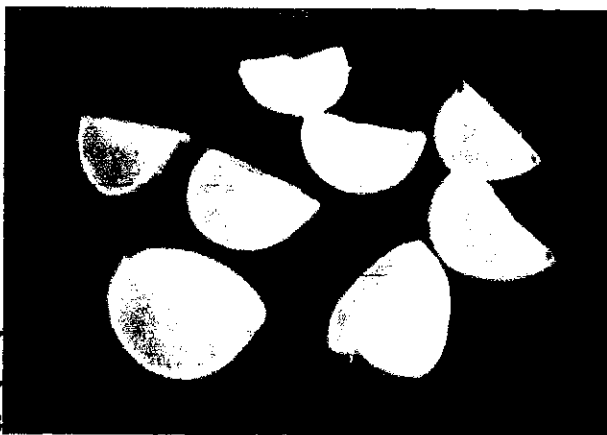
2.- Planteamiento del problema:

CONFLICTO COGNITIVO

¿Qué parte de las dos naranjas le tocó a cada niño?



Hay dos posibilidades:



respuestas esperadas:

Una posibilidad es: $2 \div 4 = \text{dos cuartos} = 2/4$

Otra posibilidad es: $2 \div 4 = \text{un medio} = 1/2$

4.- Concluir la actividad con la idea de que estos números reciben el nombre de números fraccionarios e indican una división

En forma general: $a/b = a \div b$ (no para los niños)

Nota: A partir de estas situaciones didácticas, se puede derivar hacia la enseñanza de los conceptos de: **Suma de fracciones de igual denominador y fracciones equivalentes.**

Ejm. Si en la situación problema 2. En la primera posibilidad, se les pregunta a los niños:

¿Si **juntamos** las partes de **dos** niños, qué parte del entero es?.

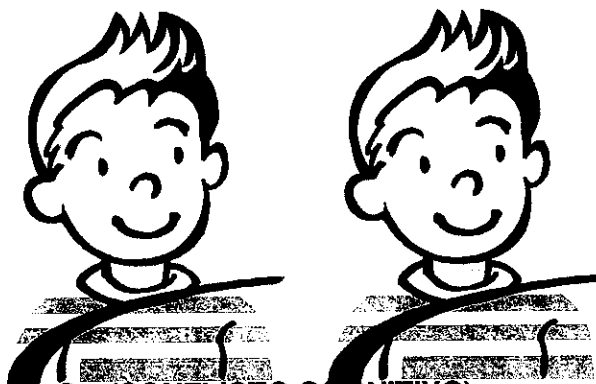
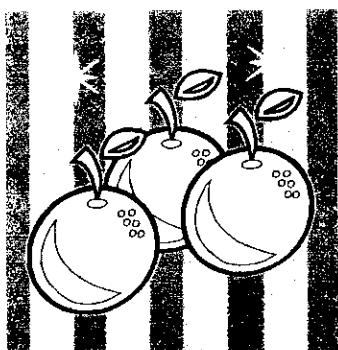
La orientación a la respuesta es: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

SEGUNDO MOMENTO

1.- Continuar con el reparto de naranjas

2.- Plantear la siguiente **Situación Problema**:

Pedir a los niños que tomen **tres naranjas** y las **repartan** entre **dos de ellos** mismos en partes iguales.



La pregunta es: **¿Cuánto le toca a cada niño?** (CONFLICTO COGNITIVO)

3.- Proporcionar el **Andamiaje**:

3ª.- Orientar la actividad hacia la(s) respuesta(s) esperada(s):

Opciones:

a).- **Repartir una naranja a cada niño, y la restante partirla a la mitad y repartir una mitad a cada niño también.**

b).- Partir las **tres naranjas** por la **mitad** y repartirse los medios **entre dos** de los niños.

3b.- Representar simbólicamente cada opción:

a).- $3 \div 2 = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$ Número mixto

b).- $3 \div 2 = \frac{3}{2}$

3c.- Orientar la actividad para que los niños descubran que: $3/2 = 1 \frac{1}{2}$

3d.- En diálogo con los niños asociar un nombre convencional a este nuevo número fraccionario (**Número Mixto**)

4.- Presentar varios casos de reparto, por ejm. $5 \div 3 = 5/3$; $7 \div 2 = 7/2$; $4 \div 3 = 4/3$; etc.

Para afianzar la idea de que una división de dos enteros nos puede llevar a la creación de un número fraccionario.

Alternativa: A partir de estos casos se puede derivar hacia el concepto de **fracción mixta** (**fracciones impropias**).

ILUSTRACIÓN DE UN CUARTO CASO ENVASES Y VASITOS

Pujadas, M. y Eguiluz, L. (2000)
Fracciones ¿Un quebradero de Cabeza?
Ediciones: Novedades Educativas
Buenos, Aires, Argentina

NIVEL: educación básica

TEMA: Razones y proporciones.

TEMA COLATERAL: División de fracciones.

OBJETIVOS:

1.- Reafirmar y aplicar el concepto de razón.

2.- Descubrir el concepto de división de números fraccionarios.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Concepto de Número Fraccionario; Fracciones equivalentes; Multiplicación de racionales, Fundamentalmente.

SITUACIÓN DIDÁCTICA:

Juanito tiene una botella de agua y desea compartirla con sus compañeros de equipo (equipo de seis); para lo cual consiguen unos vasos. Al hacer el reparto, observan que se llenan los seis vasos, pero sobra algo más que depositan en un 7º vaso. Ver ilustración:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: ¿Qué parte de la botella sobró?



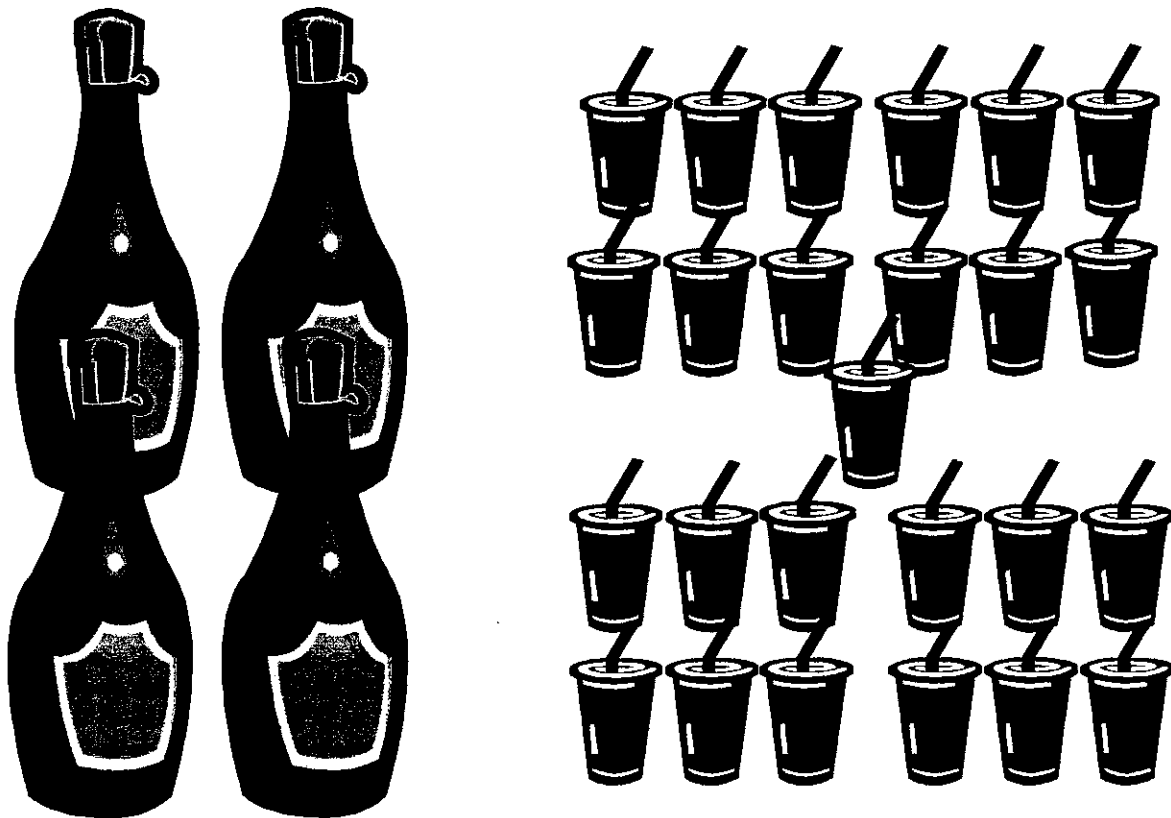
Proporcionar el **ANDAMIAJE:**

1.- El maestro sugerirá que cada equipo analice la situación y hagan explícitos los datos que se tienen y los que se quieren contestar.

1ª.- Datos a explicitar: Una botella llena de agua, igual a seis vasos llenos y algo más en un 7º vaso. Incógnita: el algo más del 7º vaso.

2.- Una vez hecho lo anterior, pedir a los alumnos que discutan y propongan estrategias de solución. Si no llegan a alguna, el maestro puede sugerir que lo intenten usando más botellas llenas de agua y más vasos vacíos, hasta encontrar que **el reparto sea exacto**:

Situación esperada:



3.- Se encuentra que con **cuatro** botellas se llenan veinticinco vasos exactamente.

4.- Discutir ahora en equipo, la relación 4b es a 25v y **encontrar: ¿qué parte del vaso es la porción de agua sobrante, cuando se tiene una botella?**

COMPETENCIA COGNITIVA

5.- Proporcionar el **Andamiaje**:

- Orientar la discusión de los equipos hacia el planteamiento de razones y proporciones.

Relación esperada:

Primera proporción: 4b es a 25v

1b es a Xv

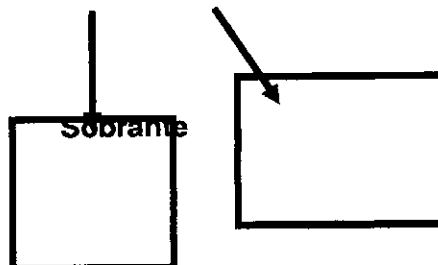
- Orientar la acción de los equipos hacia la aplicación de la regla de tres para encontrar el valor de X (**total de vasos que se llenan con una botella, más el agua sobrante con respecto a un vaso**).

- Realización de operaciones:

$$X = \frac{1b \times 25v}{4bv} = \frac{25bv}{4bv} = \frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 1/4 \text{ de vaso.}$$

X = al reparto de una botella

vasos
llenos



6.- Hacer notar que, hasta aquí, ya se tiene resuelto una parte del problema; pues ya se sabe que la **parte sobrante es 1/4 de vaso**. Por consiguiente ahora de lo que se trata es de contestar la pregunta inicial:

¿Qué parte de la botella es 1/4 de vaso?

INVENTIVO COGNITIVO

7.- Proporcionar el **andamiaje**:

- Orientar la discusión de los equipos hacia la construcción de otra proporción, estableciendo las relaciones entre una botella y la parte fraccionaria de los vasos.

Segunda Proporción: 1b es a 25/4 v

Xb es a 1/4 v

- Pedir a los equipos que resuelvan a proporción, aplicando las operaciones respectivas, según la definición.
- Procedimiento esperado:

$$X = (1b \times 1/4v) \div 25/4v =$$

$$X = 1/4bv \div 25/4v =$$

$$X = 4/100b = 1/25 \text{ de botella}$$

SOLUCIÓN ESPERADA: El agua sobrante es 1/25 de la botella

Relacionando el agua sobrante, tanto en el vaso como en la botella, queda:

1/4 de vaso de agua llena solo 1/25 de la botella.

8.- Pedir a los alumnos que, en diálogo descubran otra forma de resolver el problema.

Sugerencia: a partir de la operación **división de fracciones**.

9.- Planteamiento del problema:

1/4 de vaso, qué parte de la botella es?

10.- Andamiaje:

- se sabe que una botella es igual 25/4 de vaso.

- Entonces, de lo que se trata es de REPARTIR 1/4 ENTRE 1/25

Nota: Se deja al lector encontrar la respuesta.

ILUSTRACIÓN DE UN QUINTO CASO:

DESCUBRIENDO EL TRIÁNGULO

Tema: El concepto del triángulo.

Nivel: Primaria.

Objetivo: Descubrir el concepto de triángulo, como un significado que va más allá de ser una figura geométrica de tres lados.

Conocimientos previos: Segmento de una recta, medidas del SMD y Fig. geométricas elementales.

DESARROLLO:

1- Plantear las siguientes preguntas previas:

¿Qué es un triángulo?

¿Cuántos lados se necesitan para formar un triángulo?

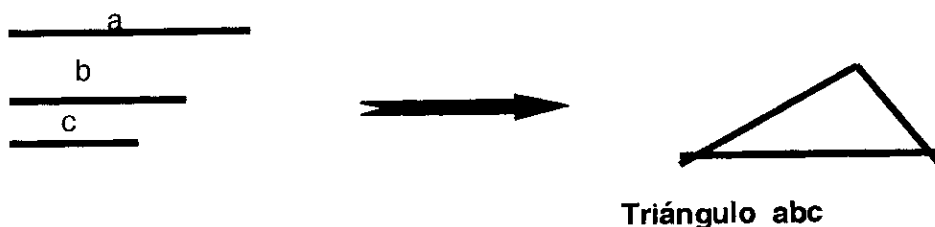
2.- Que grupalmente se pongan de manifiesto los conceptos que los alumnos tengan sobre el triángulo.

3.- A partir de las preguntas anteriores dejar bien cimentada la idea de lo (necesario):

Para formar un triángulo se necesitan (ni más ni menos) tres lados.

4.- Ilustrar el caso:

Sean a; b y c tres segmentos de recta de las siguientes dimensiones:



5.- Planteamiento del Problema:

¿Es Suficiente tener tres lados para formar un triángulo?

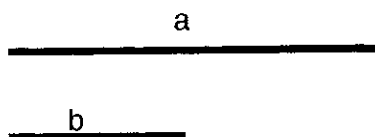
Para el docente. (Aquí de lo que se trata es de arribar a la idea de suficiencia que se requiere para completar la definición de triángulo. En otras palabras, lo necesario resulta insuficiente para determinar un triángulo).

6.- Situación Problemática

Presentar el caso:

Sean a, b y c; tres segmentos de recta

Con las siguientes dimensiones:



CONCEPTO DE TRIÁNGULO



NO ES SUFICIENTE TENER TRES LADOS

7.- Pedir a los alumnos que en equipos discutan esta imposibilidad; o sea, dado tres lados:

¿Cuándo **Si** se forma un triángulo? Y

¿Cuándo **No** se forma un triángulo?

8.- Proporcionar el **ANDAMIAJE**:

Orientar a los alumnos hacia el descubrimiento a partir del tamaño de los lados y su relación entre ellos.

9.- Solución esperada: Esta puede darse en dos niveles.

Un primer nivel:

Dado tres segmentos de recta: a, b y c.

Si el lado a es el mayor de los tres.

Entonces: $a < b + c$

Si el lado mayor de cualquier triángulo, es menor que la suma de los otros dos lados, entonces se forma el triángulo (no incluye al triángulo equilátero)

Segundo nivel:

Dado tres segmentos de recta cualesquiera: a, b y c

Si $a < b + c$ o bien:

$b < a + c$ o bien:

$c < a + b$

Entonces se da lo necesario y lo suficiente para formar un triángulo cualquiera.

Conclusión: Es posible formar un triángulo, si se cumple que, para cualquiera de sus lados, éste es menor que la suma de los otros dos.

ILUSTRACIÓN DE UN SEXTO CASO

Cuadro Mágico:

Nivel: Educación secundaria

Tema: Ecuaciones lineales.

Objetivo: Introducir a los alumnos al conocimiento de las ecuaciones lineales de manera significativa.

Conocimientos Previos: Operaciones fundamentales.

Desarrollo:

1.- Organizar al grupo en equipos de trabajo.

2.- Planteamiento del Problema:

En el **cuadrado** que se ilustra a continuación. Calcula el **valor** de cada **letra** de forma tal que cada **renglón**, cada **columna** y cada **diagonal**, **sumen lo mismo**.

A	7	B
M	N	P

8	15	10

SITUACIÓN DIDÁCTICA



3.- Pedir a los equipos de trabajo que dialoguen sobre las posibles soluciones del problema planteado.

4.- Proporcionar el Andamiaje:

4ª.- Una estrategia es que, a partir de conocer la suma del tercer renglón, establezcan todas las posibles sumas de columnas y renglones restantes.

4b.- Un posible procedimiento a seguir en la solución esperada:

Renglones

$$A + 7 + B =$$

$$M + N + P =$$

$$*8 + 15 + 10 = 33$$

Columnas

$$A + M + 8 =$$

$$*7 + N + 15 =$$

$$B + P + 10 =$$

Diagonales

$$A + N + 10 =$$

$$8 + N + B =$$

- La primera consideración es que todas las sumas son iguales.

- Segunda consideración: tomar en cuenta que la suma del tercer renglón es **33**.

- Tercera consideración: observar que en la segunda columna sólo se desconoce una literal y, si ya conocemos el resultado (33), entonces podemos intuir el valor desconocido de N. O sea:

$$7 + N + 15 = 33; \quad \text{por ensayo y error pueden encontrar que } N = 11$$

5.- Plantear a los alumnos que en equipo discutan y formulen un procedimiento (algoritmo) para encontrar el valor de N.

6.- Plantear el Problema:

¿Cómo saber el valor de N?



7.- Proporcionar el ANDAMIAJE:

7ª.- Orientar a los alumnos hacia un procedimiento de sumas y restas (despeje) para construir un algoritmo que nos permita conocer el valor de N (incógnita). Al cual se le puede asignar un nombre convencional llamado: **DESPEJE DE LA INCÓGNITA**. Y a la expresión: $7 + N + 15 = 33$ llamarle **ecuación**.

Por consiguiente :

Dada la Ecuación: $7 + N + 15 = 33$

Despejando la incógnita: $N + 7 + 15 = 33$

$$N + 22 = 33$$

$$N + 22 - 22 = 33 - 22$$

$$N + 0 = 11$$

$$N = 11$$

8.- A partir de este valor y del algoritmo construido, encontrar el valor de todas las demás INCÓGNITAS de las ecuaciones.

ILUSTRACIÓN DE UN SEPTIMO CASO:

AREAS ESCONDIDAS

Nivel: Secundaria

Tema: Cálculo del Área del Cuadrado y del Círculo.

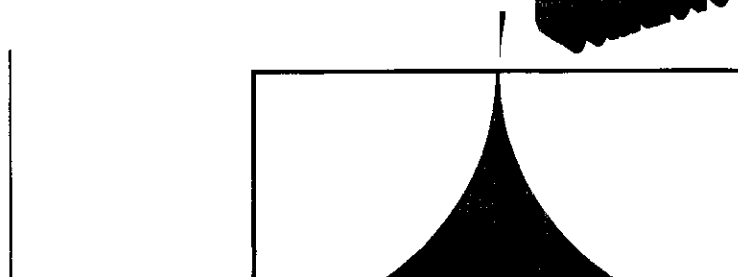
Objetivo:

- 1.- Fomentar el desarrollo de las competencias en la habilidad para resolver problemas.
- 2.- Consolidar los conocimientos sobre el cálculo de áreas del cuadrado y del círculo.

Conocimientos previos: Conocimiento de áreas, perpendiculares, fig. semejantes, simetrías y punto medio de un segmento de recta.

Planteamiento del problema:

Cuál es el área de la figura sombreada inscrita en el cuadrado de lado $L = 4$ que se ilustra a continuación:



INVENTIVO COGNITIVO

L= 4



DESARROLLO:

- 1.- Organizar el grupo en equipos de trabajo.
- 2.- Una vez planteado el problema, pedir a los alumnos que analicen con detenimiento la figura en función de las posibles soluciones (**para este caso se plantean dos**).
- 3.- Proporcionar el **ANDAMIAJE** correspondiente.
- 3ª.- Orientar hacia la estrategia de dividir el cuadrado en cuatro partes iguales mediante las perpendiculares de las rectas que pasan por los puntos medios de sus lados.
- 3b.- Orientar el análisis hacia el descubrimiento de que la figura se integra con fragmentos de círculos y sus complementos con respecto al cuadrado.
- 3c.- Si son círculos pedirles que determinen el valor de su radio.
- 3d.- Orientar a los alumnos a la identificación de las tres partes sustantivas de la figura: **Un semicírculo de $r = 2$, y Dos complementos de $\frac{1}{4}$ de círculo de $r = 2$** (punta de la figura).
- 4.- Pedirles a los alumnos que encuentren la solución a partir de la estrategia que elijan.

SOLUCIONES ESPERADAS:

1ª Solución.

Por medio del **cálculo de áreas**:a).- **área del semicírculo:**

$$\pi \times r^2 = 3.1416 \times 2^2 = 3.1416 \times 4 = 6.2832 \text{ u}^2$$

2

2

2

b).- Área de la punta de la figura:

$$[4 - (\pi \times r^2)] \times 2 = \frac{2[4 - (3.1416 \times 4)]}{4} = 4$$

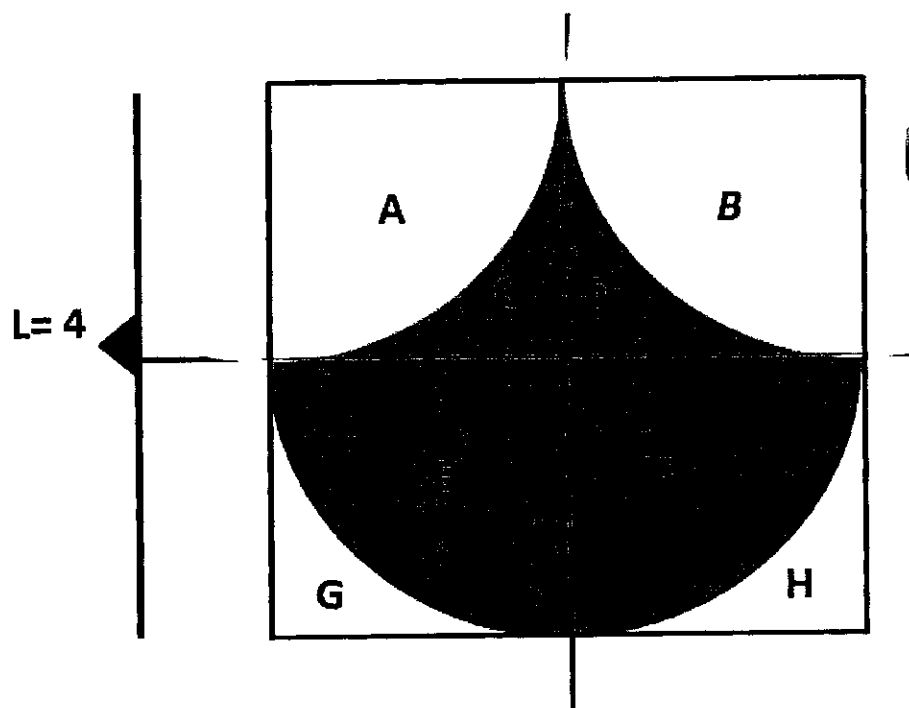
$$2(4 - 3.1416) = 8 - 6.2832 = 1.7168u^2$$

c).- Área Total de la figura completa:

$$At. = 6.2832 u^2 + 1.7168 = 8u^2$$

2º.- Solución:

Comparando figuras semejantes (Partes sombreadas de la figura y partes blancas internas del cuadrado).



CONCEPTO COGNITIVO

con

2ª.- Orientar a los alumnos sobre el proceso a seguir, teniendo siempre presente el problema a resolver.

3.- Un proceso de solución:

- Remarcar las perpendiculares.
- Identificar las partes a partir del manejo de las literales.
- Relacionar las partes semejantes a partir de las literales:

$A = B$; $E = F$; pero también: $A = F$ y $B = E$; por otra parte:

$C = D$; $G = H$; pero también: $C = H$ y $D = G$; Además:

Obs. Que: $A + B + G + H = C + D + E + F$; Por consiguiente:

Si la suma de todas las partes es $4 \times 4 = 16u^2$ y si la parte Sombreada es igual a la Blanca.

Entonces cada una es la mitad del total.

Por consiguiente el área sombreada es $16u^2/2 = 8u^2$

¡Solución esperada!

CONSIDERACIONES FINALES:

A manera de colofón y como toda investigación lo plantea normalmente, el cierre de la misma se da cuando se llega al desglose de una serie de conclusiones a partir de los hallazgos logrados, los cuales deben estar fuertemente relacionados con el objeto de estudio, con el problema de investigación planteado y con los objetivos de investigación propuestos.

Al respecto, cabe mencionar que esta investigación no es una investigación de campo, sino una investigación documental, en donde el objeto de estudio: Planteamiento de problemas para propiciar el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos en alumnos de

educación básica, no fue un objeto de estudio que se fue interpretando y resignificando a partir de una realidad concreta referida a la práctica docente en el aula; sino más bien dicho objeto de estudio fue construido a partir de la consulta bibliográfica y de la transposición didáctica a partir de la episteme del concepto matemático, en relación con los aportes teóricos del constructivismo.

Lo anterior nos llevó a diseñar algunos problemas matemáticos a manera de situaciones didácticas, los cuales tienen explícito o implícito las siguientes características:

- 1.- En primer lugar **ser problemas para aprender**, lo cual significa, que dichos problemas tienen implícitamente el concepto matemático por aprender o por consolidar un concepto supuestamente ya aprendido. Lo anterior indica que el alumno(s) al resolver el problema planteado, logre el aprendizaje o la confirmación de un concepto matemático, a través de la construcción o el descubrimiento.
- 2.- En segundo lugar el problema matemático por resolver, haciendo uso de la transposición didáctica, se transforma o se expresa como una **situación problemática (situación didáctica)**, relacionada ésta con la realidad inmediata, cotidiana o concreta del alumno, para que éste le de sentido y aplicación a los saberes matemáticos escolares.
- 3.- En tercer lugar, dicha situación problemática, tiene implícito el potencial para provocar el **conflicto cognitivo** en los alumnos, considerado éste como el incentivo para mover al aprendiz hacia la búsqueda de la respuesta esperada del problema planteado y por ende hacia el descubrimiento o construcción del concepto matemático por aprender. De esta manera el proceso Enseñanza y Aprendizaje debe concebirse como un proceso continuo de desequilibrios-equilibrios cognitivos que den origen al desarrollo conceptual de los educandos, considerando el **desequilibrio como conflicto** el cual, de manera positiva, actúa como la motivación intrínseca en el alumno(s).
- 4.- En cuarto lugar, como una acción propiciada por el docente, se debe de dar una fuerte **relación entre los conocimientos que el alumno ya tiene y el conocimiento nuevo** por aprender para propiciar un aprendizaje significativo del concepto matemático. Lo anterior requiere que el planteamiento del problema esté a la **distancia óptima** de lo que el alumno(s), con la orientación del tutor (andamiaje), sea capaz de construir o descubrir. Para lo cual obsérvese que en los problemas aquí planteados se hacen presentes los **conocimientos previos**.

5.- En quinto lugar, como ya es de verse en el desarrollo de los problemas o situaciones didácticas que se ilustran, y a colación del punto anterior, en dicho proceso de enseñanza y aprendizaje, se da de manera continua, sistemática y en el momento oportuno, **la ayuda pedagógica** asistida o sea el **andamiaje**, en la intención de orientar a los alumnos hacia la solución del problema y por ende, a la construcción o descubrimiento del concepto matemático por aprender.

6.- En sexto lugar, en los problemas planteados se puede observar que el **aprendizaje se da desde una acción compartida y participativa de los aprendices**, esto desde una postura socio-cultural, en donde el aprendizaje es más factible a través de equipos de trabajo, donde el **lenguaje** es el mecanismo de mediación más importante.

7.- En séptimo lugar, los problemas o situaciones didácticas aquí planteados, también dejan ver, el desarrollo de ciertas **competencias** en los alumnos. Al respecto podemos sostener que las competencias que se desarrollan al resolver dichas situaciones didácticas, son de tres tipos:

- a).- **Cognitivas**: al desarrollar la habilidad para **aprender a aprender** conceptos matemáticos, descubriendo o construyendo con la ayuda de los demás, propiciándose un desarrollo cognitivo en los alumnos.
- b).- **Procedimentales**: al desarrollar la habilidad para **resolver problemas** o situaciones problemáticas concretas o cotidianas.
- c).- **Actitudinal**: al desarrollar la habilidad para el **trabajo académico en equipo, desarrollando actitudes de solidaridad, respeto, colaboración, participación y compromiso**.

Por último, de manera honesta quiero reconocer que el trabajo aquí presentado se quedó corto con las expectativas planteadas inicialmente en los objetivos de la investigación. No obstante, lo aquí presentado se puede considerar como un buen inicio en la necesaria tarea de coadyuvar en la solución del grave problema del aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Pero además, creo que es justo y obligado decirlo, que lo anterior nos compromete a continuar en el desarrollo y diseño de un número sustantivo de situaciones didácticas que

sean necesarias y suficientes para constituir una obra pedagógica, que sirva como auxiliar a la docencia en la enseñanza de los conceptos matemáticos y que sea útil, viable y práctica para los maestros de educación básica.

¡Continuaremos!...

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- Abu Ja'far Muhammad Ibn Musa Al- Khwarizmi (780-850^a. A de C.), en su obra: Hisab Al-jabr W'al- mucabala. Con la Ec. $X^2 + 10X = 39$
- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1996). Psicología Educativa, un Punto de Vista Cognoscitivo. México: Trillas.
- Baquero, R. (2000). Vigotsky y el Aprendizaje Escolar. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Braunstein, N., Pastemac, M. Benedito, G. y Saal, F. (1975). Psicología: Ideología y Ciencia, México: Siglo XXI
- Brousseau, G., (1998). Los diferentes roles del maestro en Cecilia Parra e Irma Saiz. Comp. (1994). Didácticas de las matemáticas, apuntes y reflexiones. Cap. IV. México: Paidós.
- Bruner, J. (1995). Desarrollo cognitivo y educación, Selección de textos por Jesús Palacios. Madrid, España: Morata.
- Carbolán, F. (1993). Matemáticas de la Vida Misma. Cuadernos de Pedagogía, Revista Mensual, abril, No. 246, España: Fontalba.
- Carretero, M. (1993). Constructivismo y Educación, Madrid, España: Desvives.
- Castorina, J. A., Ferreiro E., Khol de Olivera, M., Lemer, D. (1996). Piaget-Vygotsky, Contribuciones para replantear el debate. México: Paidós.
- Coll, C. (2000). El constructivismo en el aula. México: Graó Biblioteca del aula.
- Coll, C. (1996) Constructivismo y Educación escolar: Ni hablamos siempre de lo mismo, ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica en La construcción del conocimiento escolar, Barcelona, España: Paidós
- Coll, C. (1997) ¿Qué es el constructivismo?, Buenos Aires, Argentina: Magisterio del Río de la Plata.
- Dossey, J.A. (1994). La naturaleza de las matemáticas: Su rol y su Influencia. USA: Universidad Estatal de Illinois.

- Esquivel, A. (2003). El Conocimiento del Número Fraccionario del Docente de Primaria y sus Efectos Sobre el Proceso E-A. tesis de grado de maestría. I S C E E M.
- Esquivel, A. R. (2008). La Enseñanza del Número Fraccionario y su Aprendizaje Significativo, Informe de Investigación 2005-2008. ISCEEM.
- Fly, B., Sullivan, A., Sederburg, D. Y Glynn, E. (1987). Estrategias para enseñar a aprender. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Fuenlabrada I., Avalos, A. (1996 Diciembre). Cómo se resuelven los problemas matemáticos, en Educación 2001. No 19, pp.32-35. México: Educación 2001.
- Inne, (2006). Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. El Aprendizaje del Español y de las Matemáticas en la Educación Básica en México, Sexto de Primaria y Tercero de Secundaria.
- Hassen, J. (1981). Teoría del Conocimiento, México: Editores Mexicanos Unidos. S.A.
- Martín Del Paso, R. (1999 Enero). Las materias escolares, en Cuadernos de Pedagogía, No. 276. España: Praxis
- Meyer, R. (1986). La Solución de Problemas y Cognición. Paidós.
- Nickerson, R., Perkins, D. y Smith, E. (1990). Enseñar a Pensar., Aspectos de la Actitud Intelectual. Colección de Temas de Educación, España: Paidós/MEC.
- Piaget, J. (1978a). Introducción a la Psicología Genética, Tomo I, El pensamiento matemático. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Piaget, J. (1978b). La Equilibración de las Estructuras Cognitivas, Problema Central del Desarrollo. España: Siglo XXI
- Polya, G. (1998). Cómo Plantear y Resolver Problemas. México: Trillas.
- Pozo, J., et al. (1998). La Solución de Problemas. México: Santillana.
- Pujadas, M. y Eguiluz, L. (2000). Fracciones ¿Un quebradero de cabeza?. Sugerencias para el aula, Ediciones : Novedades educativas, Buenos Aires, Argentina.
- Reig, D. y Gradoli, L. (1992). La construcción humana a través de la zona de desarrollo potencial: L. S. Vygotsky, en Constructivismo y Educación. Madrid, España: Tirant lo Blanch.
- Richmond, P.G. (1980). Introducción a Piaget, Madrid, España: Fundamentos.
- Sánchez, P. (1993). Didáctica de la Problematización en el Campo Científico en Perfiles Educativos. No. 61, julio- septiembre. México, UNAM.
- Santibáñez, J. (2008). Titular de Enlace y Políticas públicas, Prensa, OEM-Informéx, México, D.F.

Solé I. y Coll, C. (1994). Los profesores y la concepción constructivista, en El constructivismo en el aula, Barcelona, España: Graó.

[www.neufoundations.com.gallery/Bruner.html](http://www.neufoundations.com/gallery/Bruner.html).

www.inee.edu.mx; Resultados de las Pruebas PISA 2003.

Vygotsky L:S: (1984), El desarrollo de los procesos psicológicos superiores, Barcelona, España: Crítica.

Xirau, (1971). Introducción a la Historia de la Filosofía. México: Textos Universitarios, UNAM.