

# ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

## LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS



### ENSAYO

#### CÁLCULO MENTAL Y HABILIDADES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

*QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL  
PRESENTA:*

SARAI JOSÉ GONZÁLEZ

ASESOR:  
DR. EFRAÍN ALDAMA GARCÍA

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MAYO DE 2020

## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO I. TEMA DE ESTUDIO.....</b>	<b>6</b>
<b>REFERENTES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS .....</b>	<b>17</b>
<b>PREGUNTAS CENTRALES.....</b>	<b>21</b>
<b>CONTEXTO ESCOLAR.....</b>	<b>26</b>
<b>CAPÍTULO II. ARITMÉTICA Y CÁLCULO MENTAL.....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO III. CÁLCULO MENTAL EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES</b>	
<b>ALGEBRAICAS SIMPLES .....</b>	<b>69</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>91</b>
<b>FUENTES DE CONSULTA.....</b>	<b>94</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>96</b>

## INTRODUCCIÓN

Con la intención de contribuir con el logro de los propósitos y las competencias matemáticas del Plan de Estudios de Educación Básica (2017), de elevar los resultados académicos de los estudiantes y de cumplir con los requerimientos que la sociedad demanda, se decidió abordar el presente ensayo, denominado “Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático”.

La razón personal y profesional de la elección de este tema, es el de reducir las dificultades presentes en el cálculo mental en los alumnos de primer grado de la escuela secundaria, buscando desarrollar de manera eficaz esta habilidad a través de la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Así como la implementación del cálculo mental como un medio para que los estudiantes logren el desarrollo del Pensamiento Matemático o bien, las habilidades del Pensamiento Matemático.

El problema de estudio identifica una problemática a partir del análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los indicadores del Sistema de Alerta Temprana (SisAT) referidos al cálculo mental; como una posible solución a esta problemática, se plantea la propuesta didáctica que tiene el propósito de fortalecer la habilidad del cálculo mental a través del análisis en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, así como de cumplir con el logro de los contenidos.

La propuesta implementada en este ensayo es útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje, porque, el cálculo mental representa una herramienta valiosa que puede utilizarse en la enseñanza de los contenidos programáticos de la matemática, debido a que el desarrollo de esta habilidad apoya la comprensión de los algoritmos aritméticos y propicia un mejor desarrollo de la agilidad mental de los estudiantes, impulsando el desarrollo del Pensamiento Matemático.

Al transcurso de la aplicación de la propuesta elegida en este ensayo, se presentaron una serie de dificultades que contribuyeron en el fortalecimiento de la formación docente, como lo es la apatía de los estudiantes hacia las matemáticas, principalmente en la resolución de problemas algebraicos, así como en la formalización de los conocimientos. Otra dificultad presentada, fue que al realizar los procedimientos de manera mental, no era posible realizar

el registro de cada una de las estrategias usadas, sino que se hizo un análisis de aquellas que eran más representativas o similares.

El trabajo está organizado, en cuatro grandes apartados; Tema de Estudio, Desarrollo del Tema, Conclusiones y Fuentes de Consulta. El primer apartado, consiste en la presentación del problema de estudio y la propuesta didáctica para el desarrollo del cálculo mental; se incluye la descripción de las preguntas centrales, los referentes teóricos y empíricos de las habilidades del pensamiento matemático y el cálculo mental y el contexto donde el trabajo se desarrolló.

El Desarrollo del Tema muestra la reflexión de la práctica a través de los resultados de aprendizaje obtenidos por los estudiantes de la escuela secundaria y, más allá, las estrategias desarrolladas por los estudiantes en el cálculo mental, específicamente en aritmética y álgebra. La materia de análisis corresponde a la información obtenida de la resolución de cada uno de los planteamientos propuestos por los estudiantes a nivel mental y su relación con las operaciones mentales y las habilidades del pensamiento matemático.

Por último, en las conclusiones son presentados los resultados obtenidos del análisis elaborado en el desarrollo del tema, concretamente, el cálculo mental y aritmética/álgebra, cálculo mental y pensamiento matemático. También se mencionan las estrategias utilizadas por los estudiantes en el cálculo mental, así como los retos y logros obtenidos durante la aplicación de la propuesta. En lo referente a las fuentes de consulta, se incluye la bibliografía de los textos consultados durante la elaboración del trabajo.

# CAPÍTULO I

## CAPÍTULO I. TEMA DE ESTUDIO

El estudio de la matemática en la educación secundaria implica el desarrollo de una serie de habilidades, tanto del docente como de los estudiantes, es por ello que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, se busca promover el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático. De acuerdo con la SEP (2018), la actividad matemática tiene como finalidad el desarrollo de capacidades cognitivas, como clasificar, analizar, inferir, generalizar y abstraer, además de fortalecer el pensamiento lógico y los razonamientos inductivo, deductivo y analógico.

Por ende, uno de los propósitos para la educación secundaria de acuerdo con el documento de “Aprendizajes Clave”, consiste en utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos (p.6). El desarrollo de cada una de las Habilidades del Pensamiento Matemático antes mencionadas y el Cálculo Mental, constituyen uno de los principales problemas en la educación matemática, al ser consideradas como actividades aisladas una de la otra.

El cálculo mental es una herramienta valiosa que puede utilizarse en la enseñanza de los contenidos programáticos de la matemática, debido a que la habilidad del cálculo mental apoya la comprensión de los algoritmos aritméticos y propicia un mejor desarrollo de la agilidad mental de los estudiantes.

El problema de estudio denominado “Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático”, identifica una problemática referida al desarrollo del cálculo mental y tiene como fin el fortalecer en el educando esta habilidad de manera eficaz, específicamente en la adición, sustracción y producto de fracciones, en la potenciación, sin dejar a un lado aspectos básicos de las matemáticas, en especial en tópicos de la aritmética, como lo son: adición y sustracción de números enteros, producto y cociente de números enteros, conversión de una fracción a un número decimal y viceversa, por mencionar algunos.

Ante la preocupación del desarrollo del Cálculo Mental dentro del aula de clase se ha incorporado en las instituciones un programa denominado Sistema de Alerta Temprana, mejor conocido como SisAT, que es un conjunto de indicadores, herramientas y

procedimientos que permite a los colectivos docentes, contar con información sistemática y oportuna acerca de los alumnos que se encuentran en riesgo de no alcanzar los aprendizajes clave o incluso de abandonar sus estudios; al mismo tiempo, les ofrece la oportunidad de fortalecer la capacidad de evaluación interna y de intervención pedagógica y didáctica al interior de la institución (SEP, 2018).

El problema de estudio denominado “Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático” deriva del análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los indicadores del Sistema de Alerta Temprana (SisAT) referidos al cálculo mental; la muestra representativa considerada en la aplicación de la prueba, se conformó por los alumnos del primer grado de la escuela secundaria en la que se desarrolla el Trabajo Docente.

Los indicadores del SisAT en los que los alumnos mostraron un bajo nivel de desempeño se han dado en llamar Área de Mejora; en el Cálculo Mental del primer grado de educación secundaria los indicadores corresponden a tópicos de la aritmética, mostrados a continuación:

NP	INDICADOR	DESCRIPCIÓN	EJERCICIO
1	Adición de números enteros.	Consiste en la solución de adiciones de números naturales con 2 cifras.	$38 + 23$
2	Producto de números enteros.	Consiste en el producto de un número entero de dos cifras por uno de una cifra.	$12 \times 6$
3	Producto y sustracción de números enteros	La respuesta se obtiene del producto de un número entero de dos cifras por uno de una cifra y, a ese resultado, se le resta un número entero de dos cifras.	$18 \times 2 - 24$
4	Adición de fracciones.	Consiste en la adición de dos fracciones que aparentemente tienen denominadores diferentes, pero que son múltiplos y se pueden llegar a simplificar.	$\frac{3}{4} + \frac{4}{8}$
5	Conversión de una fracción a un número decimal.	Consiste en conocer cuánto representa $\frac{1}{5}$ en número decimal, para posteriormente encontrar el valor que representaría $\frac{2}{5}$ .	Convierte $\frac{2}{5}$ en número decimal
6	Producto de fracciones.	La respuesta se obtiene de aplicar el algoritmo correspondiente a la multiplicación de fracciones.	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$
7	Sustracción de números decimales.	Es una sustracción de números enteros con decimales, donde el decimal es el mismo en los dos números dados.	$115.4 - 12.4$

8	Adición de números decimales y sustracción de números enteros.	Es una adición de números enteros con decimales de dos dígitos y al resultado sustraerle un número entero.	$8.75 + 0.25 - 3$
9	Potenciación (elevar al cuadrado)	Elevar un número entero a un exponente positivo.	$9^2$
10	Adición y sustracción de números decimales y fraccionarios.	Consiste en la adición de un número decimal con un dígito y una fracción equivalente al número decimal y al resultado se le sustrae una fracción propia.	$0.5 + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

Indicadores de la prueba SisAT correspondientes al Primer Grado de la Escuela Secundaria

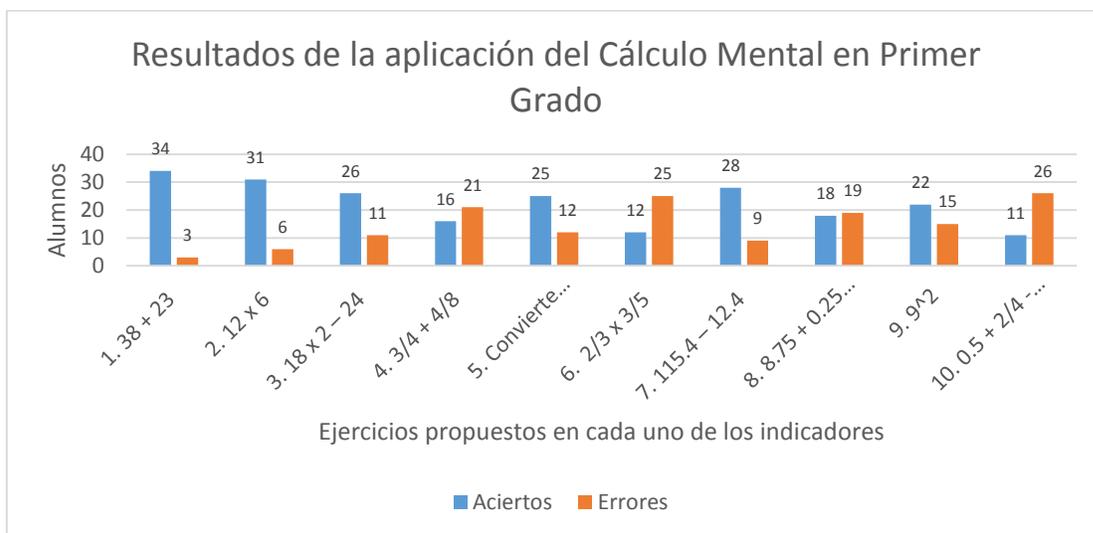
Al inicio del ciclo escolar 2019-2020 se realizó una primera aplicación de la prueba del SisAT a 37 alumnos del primer grado de la Escuela Secundaria General “Xicoténcatl” obteniéndose los siguientes resultados:

NP	INDICADOR	DESEMPEÑO		ÁREA DE MEJORA
		Resp. Correcta	Resp. Incorrecta	
1	Adición de números enteros.	34 alumnos	3 alumnos	Práctica de la adición de números enteros de dos cifras.
2	Producto de números enteros.	31 alumnos	6 alumnos	Repaso de las tablas de multiplicar y ejercicios que impliquen el producto de números de dos cifras.
3	Producto y sustracción de números enteros	26 alumnos	11 alumnos	Repaso de las tablas de multiplicar. Implementación de ejercicios o problemas que impliquen el producto de números de dos cifras y la sustracción de números enteros de dos cifras.
4	Adición de fracciones.	16 alumnos	21 alumnos	Práctica de la adición de fracciones equivalentes.
5	Conversión de una fracción a un número decimal.	25 alumnos	12 alumnos	Comprensión de la equivalencia de una fracción a un número decimal y viceversa.
6	Producto de fracciones.	12 alumnos	25 alumnos	Práctica del algoritmo para la solución del producto de fracciones.

7	Sustracción de números decimales.	28 alumnos	9 alumnos	Implementación de ejercicios o problemas que impliquen la sustracción de números enteros con decimales.
8	Adición de números decimales y sustracción de números enteros.	18 alumnos	19 alumnos	Implementación de ejercicios donde sea necesario sumar números decimales que sean complementarios o que den como resultado un número entero.
9	Potenciación: $x^n$	22 alumnos	15 alumnos	Diferenciación de la potenciación ( $x^n$ ) con el producto de dos números enteros idénticos ( $a \times a = a^2$ )
10	Adición y sustracción de números decimales y fraccionarios.	11 alumnos	26 alumnos	Comprensión de la equivalencia de una fracción a un número decimal y viceversa.

Indicadores más bajos obtenidos en la prueba SisAT aplicados al primer grado de la Escuela Secundaria General "Xicotécatl".

La representación gráfica de los resultados anteriores se presenta a continuación.



Como se puede observar en la gráfica anterior, los indicadores en los que el desempeño muestra deficiencias, son los números 10, 6, 4, 8 y 9; representando un porcentaje del 70%, 68%, 57%, 51% y 41% respectivamente del total de los alumnos.

De manera jerárquica se tiene:

**Indicador 10:** Adición y sustracción de números decimales y fraccionarios.

Planteamiento:  $0.5 + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

El indicador número 10, está representado por operaciones que implican la suma de un número decimal con su fracción equivalente y al resultado obtenido se le resta otra fracción (con un denominador diferente al anterior). La situación adversa que, en general, se presenta es el dominio de las operaciones y sus propiedades de las fracciones; de manera particular, en el caso del indicador 10, es el desconocimiento de la equivalencia entre 0.5 y  $\frac{2}{4}$ , dado que  $\frac{2}{4}$  en número decimal da como resultado 0.5 y viceversa. Posteriormente, la otra dificultad, consistía en restar  $\frac{1}{3}$  al primer resultado, un entero; este segundo momento consiste en el desconocimiento de la cantidad de tercios que conforman al entero.

**Indicador 6:** Producto de fracciones.

Planteamiento:  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

En este indicador es necesario conocer el algoritmo que se utiliza en la multiplicación de fracciones, pues se llega a confundir con el procedimiento que se realiza en una suma, resta o división de fracciones, con la de una multiplicación, donde el producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

**Indicador 4:** Adición de fracciones.

Planteamiento:  $\frac{3}{4} + \frac{4}{8}$

Para dar respuesta a este indicador los alumnos consideraban que era necesario la aplicación del algoritmo correspondiente a la suma fracciones con diferente denominador, teniendo que hacer en ella varias operaciones que los confundían y el resultado era incorrecto, sin antes analizar que los denominadores de las fracciones son múltiplos y es posible llegar a obtener una suma de fracciones con un mismo denominador que implica una operación más fácil de realizar.

**Indicador 8:** Adición de números decimales y sustracción de números enteros.

Planteamiento:

$$8.75 + 0.25 - 3$$

En este ejercicio de cálculo mental correspondía realizar una suma de números enteros con decimales y al resultado restarle un número entero, la complejidad la encontraron en la suma de los números decimales, porque no lograban llegar a comprender que la suma de 0.75 y 0.25 daba como resultado 1 y posteriormente sólo se realizaba la resta del número entero.

**Indicador 9:** Potenciación ( $x^n$ )

Planteamiento:

$$9^2$$

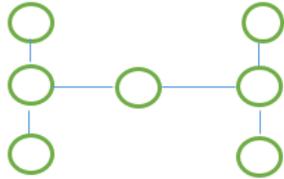
En este último indicador era necesario conocer el algoritmo correspondiente a elevar un número entero a un exponente positivo, que consiste en multiplicar por sí mismo la base el número de veces que el exponente lo indica. Otra manera de resolver este indicador era comprendiendo que el resultado era un cuadrado perfecto, al elevarse la base a la segunda potencia. La potenciación es un indicador que se aborda en el segundo año, no obstante, se retoma dentro de los ejercicios del cálculo mental del SisAT como un primer acercamiento a su solución.

Derivado del análisis de cada uno de los indicadores se ha deducido que la principal problemática que presentan los alumnos de primer grado en la aplicación del Sistema de Alerta Temprana se encuentra en la adición, sustracción y producto de números reales, así como en la potenciación. Esta problemática se retoma como problema de estudio y proyecta su tratamiento a través de una propuesta de intervención que mejore sustancialmente los resultados hasta el momento obtenidos.

La propuesta didáctica denominada “Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático” consiste en una serie de fases orientadas a promover el protagonismo de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, a través del desarrollo de la habilidad del cálculo mental; se conforma de 3 fases fundamentales los cuales son: operaciones con números reales y sus propiedades, cálculo mental numérico y el cálculo mental en la solución de ecuaciones algebraicas simples, de la forma  $ax = b$ ,  $x + a = b$  y  $ax + b = c$ ; mismas que

darán cuenta del apoderamiento de los contenidos de la asignatura de matemáticas en primer grado de secundaria y al logro de otras habilidades relacionadas con el cálculo mental, como lo son: utilizar de manera flexible la estimación y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos. (SEP, 2018; P.6).

### Fases de la intervención

FASES	APRENDIZAJE ESPERADO	RECONSTRUCCIÓN																					
<p><b>I.</b></p> <p><b>OPERACIONES CON NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES</b></p>	<p>El alumno desarrolle el cálculo mental a través de la práctica de las operaciones con números reales.</p>	<p>1. En la figura, coloca en cada círculo uno de los siguientes dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de manera que la suma horizontal y las sumas verticales den el mismo resultado.</p> <p>¿Cuántas soluciones tiene este problema?</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>2. Las letras que van desde la A hasta la G representan los números 1, 3, 4, 5, 6, 8 y 9. ¿Qué números representan las siguientes operaciones matemáticas expresadas en letra?</p> <p><math>A + A = B</math>      <math>A \times A = DF</math>      <math>A + C = DE</math></p> <p><math>C + C = DB</math>      <math>C \times C = BD</math>      <math>A \times C = EF</math></p> <p>3. Basta aritmético.</p> <table border="1" data-bbox="704 1478 1435 1713"> <thead> <tr> <th>Número propuesto</th> <th>+ 11</th> <th>-4</th> <th>x 9</th> <th>÷ 5</th> <th>( )<sup>2</sup></th> <th>Resultados correctos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> </tr> </tbody> </table>	Número propuesto	+ 11	-4	x 9	÷ 5	( ) <sup>2</sup>	Resultados correctos														
Número propuesto	+ 11	-4	x 9	÷ 5	( ) <sup>2</sup>	Resultados correctos																	

	<p><b>PROPUESTA:</b></p> <p>Método para la resolución de los planteamientos.</p>	<p>Primera etapa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <b>Comprensión de la situación</b></li> </ul> <p>El estudiante reflexionará acerca de la situación planteada y las posibles vías de resolución, antes de comenzar con la ruta establecida.</p> <p>Segunda etapa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <b>Análisis de la situación y construcción de un modelo matemático</b></li> </ul> <p>El alumno identificará de manera individual la información relevante para la solución del problema.</p> <p>Tercera etapa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <b>Solución del caso particular:</b></li> </ul> <p>De manera individual el estudiante reflexionará acerca de los contenidos matemáticos involucrados para llegar a la resolución del planteamiento, como lo son las operaciones con números reales (adición, sustracción, producto, cociente y potenciación) e ideará un método.</p> <p>Cuarta etapa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <b>Planteamiento y solución</b></li> </ul> <p>Se aplicará el método construido para la solución del problema (aplicación de operaciones).</p> <p>Quinta etapa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <b>Análisis retrospectivo</b></li> </ul> <p>De manera grupal se reflexionará sobre el proceso de resolución seguido por los estudiantes.</p>
--	--	--

<p><b>II.</b></p> <p><b>CÁLCULO MENTAL NUMÉRICO</b></p>	<p>Que el alumno desarrolle el cálculo mental numérico en la adición, sustracción y producto de fracciones, en la adición y sustracción de números decimales a través del desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático.</p>	<p>4. CALCULO MENTAL: FRACCIONES, NUMEROS DECIMALES Y PORCENTAJES</p> <p>Nombre del estudiante: _____</p> <table border="1" data-bbox="824 279 1318 1060"> <thead> <tr> <th></th> <th>Calcula :</th> <th colspan="2">Escribe como un número decimal:</th> <th colspan="2">Escribe como una fracción:</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td><math>\frac{1}{4}</math> de 32 =</td> <td><math>\frac{1}{4}</math></td> <td>0.25</td> <td>0.5</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\frac{2}{3}</math> de 21 =</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td></td> <td>50%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\frac{4}{5}</math> de 55 =</td> <td><math>\frac{1}{5}</math></td> <td></td> <td>25%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\frac{5}{8}</math> de 80 =</td> <td><math>\frac{1}{10}</math></td> <td></td> <td>0.25</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><math>\frac{2}{7} + \frac{5}{7} =</math></td> <td><math>\frac{1}{100}</math></td> <td></td> <td>10%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td><math>\frac{2}{7} - \frac{5}{7} =</math></td> <td><math>\frac{3}{4}</math></td> <td></td> <td>0.1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td><math>\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =</math></td> <td><math>\frac{2}{5}</math></td> <td></td> <td>20%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td><math>-\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =</math></td> <td><math>\frac{5}{10}</math></td> <td></td> <td>0.2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td><math>1 + \frac{1}{2} =</math></td> <td><math>\frac{20}{100}</math></td> <td></td> <td>0.01</td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td><math>1 - \frac{1}{4} =</math></td> <td><math>\frac{8}{100}</math></td> <td></td> <td>0.001</td> <td></td> </tr> <tr> <td>11</td> <td><math>\frac{2}{7} + 1 =</math></td> <td><math>\frac{3}{5}</math></td> <td></td> <td>0.35</td> <td></td> </tr> <tr> <td>12</td> <td><math>1 - \frac{4}{10} =</math></td> <td><math>\frac{6}{3}</math></td> <td></td> <td>0.11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>13</td> <td><math>\frac{2}{5} - \frac{5}{2} =</math></td> <td><math>\frac{4}{5}</math></td> <td></td> <td>0.33...</td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td><math>\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) =</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td><math>\frac{(-6)}{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td><math>\frac{3}{11} \cdot (-8) =</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="6">MARCADOR</td> </tr> </tbody> </table>		Calcula :	Escribe como un número decimal:		Escribe como una fracción:		1	$\frac{1}{4}$ de 32 =	$\frac{1}{4}$	0.25	0.5	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{3}$ de 21 =	$\frac{1}{2}$		50%		3	$\frac{4}{5}$ de 55 =	$\frac{1}{5}$		25%		4	$\frac{5}{8}$ de 80 =	$\frac{1}{10}$		0.25		5	$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} =$	$\frac{1}{100}$		10%		6	$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} =$	$\frac{3}{4}$		0.1		7	$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{2}{5}$		20%		8	$-\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{5}{10}$		0.2		9	$1 + \frac{1}{2} =$	$\frac{20}{100}$		0.01		10	$1 - \frac{1}{4} =$	$\frac{8}{100}$		0.001		11	$\frac{2}{7} + 1 =$	$\frac{3}{5}$		0.35		12	$1 - \frac{4}{10} =$	$\frac{6}{3}$		0.11		13	$\frac{2}{5} - \frac{5}{2} =$	$\frac{4}{5}$		0.33...		14	$\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) =$					15	$\frac{(-6)}{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$					16	$\frac{3}{11} \cdot (-8) =$					MARCADOR					
		Calcula :	Escribe como un número decimal:		Escribe como una fracción:																																																																																																									
1	$\frac{1}{4}$ de 32 =	$\frac{1}{4}$	0.25	0.5	$\frac{1}{2}$																																																																																																									
2	$\frac{2}{3}$ de 21 =	$\frac{1}{2}$		50%																																																																																																										
3	$\frac{4}{5}$ de 55 =	$\frac{1}{5}$		25%																																																																																																										
4	$\frac{5}{8}$ de 80 =	$\frac{1}{10}$		0.25																																																																																																										
5	$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} =$	$\frac{1}{100}$		10%																																																																																																										
6	$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} =$	$\frac{3}{4}$		0.1																																																																																																										
7	$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{2}{5}$		20%																																																																																																										
8	$-\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{5}{10}$		0.2																																																																																																										
9	$1 + \frac{1}{2} =$	$\frac{20}{100}$		0.01																																																																																																										
10	$1 - \frac{1}{4} =$	$\frac{8}{100}$		0.001																																																																																																										
11	$\frac{2}{7} + 1 =$	$\frac{3}{5}$		0.35																																																																																																										
12	$1 - \frac{4}{10} =$	$\frac{6}{3}$		0.11																																																																																																										
13	$\frac{2}{5} - \frac{5}{2} =$	$\frac{4}{5}$		0.33...																																																																																																										
14	$\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) =$																																																																																																													
15	$\frac{(-6)}{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$																																																																																																													
16	$\frac{3}{11} \cdot (-8) =$																																																																																																													
MARCADOR																																																																																																														
	<p><b>PROPUESTA:</b></p> <p>Método para la resolución de problemas.</p>	<p>Primera etapa:</p> <p>✓ <b>Comprensión de la situación</b></p> <p>El estudiante reflexionará acerca de la situación planteada y las posibles vías de resolución, antes de comenzar con la ruta establecida.</p> <p>Segunda etapa:</p> <p>✓ <b>Análisis de la situación y construcción de un modelo matemático</b></p> <p>El alumno identificará de manera individual la información relevante para la solución del problema.</p> <p>Tercera etapa:</p> <p>✓ <b>Solución del caso particular:</b></p> <p>De manera individual el estudiante reflexionará acerca de los contenidos matemáticos involucrados para llegar a la resolución del planteamiento, como lo son la adición,</p>																																																																																																												

		<p>sustracción y producto de fracciones, la adición y sustracción de números decimales e identificará un método.</p> <p>Cuarta etapa:</p> <p>✓ <b>Planteamiento y solución</b></p> <p>Se aplicará el método construido para la solución del problema (aplicación de operaciones).</p> <p>Quinta etapa:</p> <p>✓ <b>Análisis retrospectivo</b></p> <p>De manera grupal se reflexionará sobre el proceso de resolución seguido por los estudiantes.</p>																					
<p><b>III.</b></p> <p><b>CÁLCULO MENTAL EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS</b></p>	<p>El alumno resuelva problemas sencillos de ecuaciones algebraicas de la forma <math>ax = b</math>, <math>x + a = b</math> y <math>ax + b = c</math>.</p>	<p>1. Pensé un número, lo multipliqué por 6 y al resultado le sume 1; obtuve 73. ¿Qué número pensé?</p> <p>2. Si Rosa tiene 3 años más que su hermana y sus edades suman 17, ¿qué edad tiene Rosa?</p> <p>3. Basta algebraico. Se dirá en voz alta un número, los alumnos deberán sustituir este valor en la literal <math>x</math> y realizar las operaciones solicitadas en cada una de las casillas de la columna superior.</p> <table border="1" data-bbox="704 1234 1435 1451"> <thead> <tr> <th>Número propuesto</th> <th><math>\frac{x+4}{2}</math></th> <th><math>x^2 + 3</math></th> <th><math>\frac{x^2}{2}</math></th> <th><math>x - 3</math></th> <th><math>2x + 2</math></th> <th>Resultados correctos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Número propuesto	$\frac{x+4}{2}$	$x^2 + 3$	$\frac{x^2}{2}$	$x - 3$	$2x + 2$	Resultados correctos														
Número propuesto	$\frac{x+4}{2}$	$x^2 + 3$	$\frac{x^2}{2}$	$x - 3$	$2x + 2$	Resultados correctos																	
	<p><b>PROPUESTA:</b></p> <p>Método para la resolución de problemas.</p>	<p>Primera etapa:</p> <p>✓ <b>Comprensión de la situación</b></p> <p>El estudiante reflexionará acerca de la situación planteada y las posibles vías de resolución, antes de comenzar con la ruta establecida.</p> <p>Segunda etapa:</p>																					

		<p>✓ <b>Análisis de la situación y construcción de un modelo matemático</b></p> <p>El alumno identificará de manera individual la información relevante para la solución del problema.</p> <p>Tercera etapa:</p> <p>✓ <b>Solución del caso particular:</b></p> <p>De manera individual el estudiante reflexionará acerca de los contenidos matemáticos involucrados para llegar a la solución de ecuaciones algebraicas de la forma <math>ax = b</math>, <math>x + a = b</math> y <math>ax + b = c</math>.</p> <p>Cuarta etapa:</p> <p>✓ <b>Planteamiento y solución</b></p> <p>Se aplicará el método construido para la solución del problema.</p> <p>Quinta etapa:</p> <p>✓ <b>Análisis retrospectivo</b></p> <p>De manera grupal se reflexionará sobre el proceso de resolución seguido por los estudiantes.</p>
<p><b>IV. EVALUACIÓN</b></p>	<p>Resolución de problemas.</p> <p>Exposición de resultados.</p> <p>Argumentación de resultados.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Qué plan ideaste para resolver la situación?</li> <li>2. ¿Por qué lo hiciste de esa manera y no de otra?</li> <li>3. ¿Qué errores tuviste?</li> <li>4. ¿Cuáles son las dificultades que tuviste?</li> </ol>

Cada uno de los problemas y ejercicios se asignan de acuerdo a los conocimientos que los estudiantes deben poseer volviéndose cada vez más complejos y dependiendo del grado escolar en el que se encuentran. Es importante considerar que los estudiantes que alberga la escuela secundaria son agentes que se encuentran en una edad aproximada de 12 a 15 años y de acuerdo con las investigaciones de Piaget esta edad corresponde al estadio de las operaciones formales.

Es desde los 12 años en adelante cuando el cerebro humano está potencialmente capacitado (desde la expresión de los genes), para formular pensamientos realmente abstractos, o un pensamiento de tipo hipotético deductivo. Estas son operaciones de segundo grado, en las que el sujeto opera sobre operaciones o sobre los resultados de dichas operaciones.

Características:

- En este período se da el máximo desarrollo de las estructuras cognitivas, el desarrollo cualitativo alcanza su punto más alto.
- En cuanto a la reversibilidad, el sujeto puede manejar las dos reversibilidades en forma integrada, simultánea y sincrónica.
- El razonamiento es hipotético–deductivo.
- El sujeto puede utilizar supuestos en situaciones de resolución de problemas.
- Distingue entre acontecimientos probables e improbables y puede resolver problemas.

Dado que los alumnos son capaces de realizar operaciones a través de un pensamiento hipotético deductivo, la resolución de problemas adquiere un papel importante en el desarrollo de las Habilidades del Pensamiento Matemático y por supuesto en el desarrollo del Cálculo Mental.

## **REFERENTES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS**

### **Habilidades del Pensamiento Matemático**

Gonzalo López Rueda (2009) concibe a las habilidades del pensamiento matemático como herramientas intelectuales que conectan información matemática, evolucionan, y el individuo las construye a lo largo de su vida. Considera que un alumno es hábil en matemáticas cuando visualiza conexiones significativas entre conceptos y/o procedimientos y las pone en práctica para resolver una situación determinada. Dichas conexiones o relaciones se favorecen o se logran construir cuando el alumno:

- Posee o se va apropiando de un conjunto de estrategias (usa dibujos, establece relaciones entre el problema por resolver y uno conocido, reconoce analogías, analiza casos particulares, usa diferentes representaciones, etc.) que desencadenan acciones específicas para resolver problemas. (p. 8)
- Usa de manera eficiente sus conocimientos (por ejemplo, en álgebra, conoce y usa la sintaxis y la semántica del lenguaje algebraico; aplica, según convenga, un procedimiento para resolver una ecuación; comprende y demuestra teoremas). El ser eficiente se puede interpretar como saber seleccionar, para el caso, conceptos, procedimientos y estrategias para resolver problemas.

Resumiendo, las habilidades matemáticas son herramientas intelectuales que propician la construcción de conexiones significativas entre ideas matemáticas, mediante el uso de estrategias y conocimientos, y desencadenan, según sean estas relaciones, formas particulares de razonamiento “contextual”, es decir, el contexto del problema genera, en la experiencia de quien lo resuelve, una manera de organizar, interpretar y asignar un significado a la información de aquél y en consecuencia éste construye determinados argumentos.

Se puede postular que las habilidades evolucionan conforme el individuo avanza de manera permanente y sistemática en la interpretación y resolución de problemas relativos a diversos contextos matemáticos. Dependiendo de la selección cuidadosa de los problemas y las actividades es como se promoverá el florecimiento de aquéllas. De este modo, las habilidades que desarrolla el estudiante le permiten razonar de cierta forma sobre contenidos específicos y le ayudan a encontrar relaciones significativas, y la manera como organiza y mira esas conexiones está en función de sus conocimientos previos y de las experiencias o estímulos que le ofrece el medio en el cual se desenvuelve. (López, 2009; p.9)

Gonzalo López Rueda (2009) identifica las siguientes habilidades del pensamiento matemático: habilidad para razonar lógicamente, para ejecutar acciones reversibles y flexibles, para generar e interpretar un mismo resultado de diferentes maneras, para identificar regularidades numéricas y para imaginar o estimar. Sin embargo, en este documento las habilidades del pensamiento matemático que se consideraran son los

mencionados en uno de los propósitos de la educación secundaria en matemáticas: la flexibilidad, la estimación y el cálculo escrito.

## **Cálculo Mental**

El Cálculo Mental consiste en una “serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón, 1995, en García, 2014). Por lo tanto, “es necesario que el alumno analice cada caso en particular, busque la estrategia más pertinente, tome decisiones con respecto a cómo descomponer los números y qué cálculos hacer, así como valorar el resultado” (Jiménez, 2012).

Se trata entonces de una “acción reflexiva que no suele ser desarrollada por niños a los que solo se les ha presentado el cálculo algorítmico como única manera de obtener el resultado” (Sancha, 2010), por lo que realizar este tipo de actividades con los alumnos resulta pertinente para que directivos y docentes tengan un panorama general del desarrollo de la habilidad, y promover en el aula un trabajo con respecto al manejo de elementos matemáticos básicos, así como para la identificación de alumnos que requieren apoyos adicionales o diferenciados.

En el caso del cálculo mental, es importante analizar si el bajo desempeño se dio por desconocimiento del tipo de operación que se está preguntando (y, por tanto, ni intenta dar una respuesta), por inexactitud de la respuesta (se acerca mucho a lo correcto) o porque lo intenta, pero tarda demasiado en contestar (probablemente porque esté intentando resolverlo con la aplicación de un algoritmo).

Ortiz (2009), ha señalado lo siguiente: “estamos convencidos de que el cálculo mental es un pilar muy importante en la educación matemática de los niños y de que su puesta en práctica en las aulas, además de favorecer los aprendizajes aritméticos, posibilita una enseñanza más fluida de todos los contenidos curriculares de matemáticas, ya que la ejecución automática de cálculos sencillos permite que los alumnos puedan pensar en los conceptos que se presenten con mayor autonomía y rigor”.

Ortiz, (2009) lo definió como un cálculo “de cabeza o de memoria”, sin ayuda externa y con datos exactos. Además, distinguió dos tipos:

- Cálculo mecánico o de estímulo-respuesta: el cual tiene una técnica automática, con el riesgo de olvidarse cuando no se utiliza. (Memorización de las tablas).
- Cálculo reflexivo o pensado: En el que cada vez se utiliza distintos procedimientos, tratando de relacionar los cálculos, números y operaciones. Por ello hay que saber seleccionar las estrategias más adecuadas. (Conteos, relocalaciones, dominio de las tablas, descomposiciones...)

Además, Ortiz (2013) explicó las características más concretas del cálculo mental. “El cálculo mental debe ser un cálculo sin ninguna ayuda exterior, basado en la exploración y reflexión, práctico, motivador, relajado, respetando el protagonismo y la autonomía de cada individuo, con flexibilidad de acción, diálogo y en donde no debe primar la velocidad de respuesta”.

Ventajas del cálculo mental (Ortiz, 2013):

- Se realiza un trabajo participativo, aspecto que motiva al alumno y con el que aprende intercambiando información con sus compañeros.
- Se realiza un trabajo atractivo en el aula, que estimula y motiva a los alumnos.
- Se plantean ejemplos cotidianos, los cuales servirán para su día a día.
- El alumno es más autónomo, ya que él descubre y entiende las reglas y los procedimientos que va a seguir.
- El alumno se siente cómodo, ya que no tiene marcado un tiempo de realización de las actividades.

Dificultades en el cálculo mental:

- Dificultades para operar con números sencillos con cierta rapidez y seguridad.
- Dificultades lógicas para entender secuencias numéricas.
- Dificultades para entender problemas numérico-verbales.
- Dificultades para resolver problemas lógicos, para comprender los problemas y para seleccionar las estrategias que llegan a la conclusión final.

La valoración de esta habilidad es un referente para que el docente conozca si se ha promovido en clase de manera suficiente el razonamiento de sus alumnos al resolver problemas y/o realizar operaciones básicas, y no sólo la aplicación mecánica de los algoritmos.

## PREGUNTAS CENTRALES

¿Cómo son las estrategias del cálculo mental que se utilizan en el aprendizaje en matemáticas que inhiben la construcción a través de la Resolución de Problemas?

De acuerdo con Simón Mochón y Josueth Vázquez Román (1995) se tenía la idea de que el cálculo mental era una serie de reglas que debían memorizarse y ser aplicadas en la resolución de un problema aritmético. Al respecto, existe una larga lista de caminos "abreviados" (atajos) para resolver operaciones. Esta imagen del cálculo mental fácilmente puede hacer creer que siempre hay soluciones mágicas para obtener la solución de problemas de aritmética. En realidad, el cálculo mental que interesa en educación es otro y con otra finalidad.

Gonzalo López Rueda (2009) señala que posiblemente, hay alumnos que son muy buenos para realizar cálculos mentales, para agrupar y desagrupar cantidades, para identificar regularidades al operar, para transformar una cantidad en otra y en general eran buenos para “ver” diversas relaciones numéricas. Pero este tipo de habilidades que desarrollaban estos estudiantes al estar en constante contacto con las operaciones, al parecer no se promovían de manera sistemática y explícita por la escuela. Todo parece indicar, por los logros alcanzados en matemáticas, que en la práctica cotidiana escolar no se analizaban ni se discutían en el grupo las diversas estrategias que usaban estos estudiantes.

Pareciera como si los propósitos implícitos y básicos de varias instituciones educativas se tradujeran en acciones que promovieran la “efectividad”, en los estudiantes, para obtener resultados correctos al efectuar operaciones. Aparentemente poco les importaba que sus profesores analizaran y discutieran con sus estudiantes las diversas maneras como ellos obtenían un resultado y las estrategias que empleaban. Supuestamente a estas escuelas sólo les interesa apoyar acciones que tengan que ver con la rapidez para operar y la efectividad para obtener resultados correctos, no tanto el análisis de los procedimientos y otras acciones más complejas. Se ha tenido la impresión de que no fomentan de manera sistemática reflexiones sobre otras ideas matemáticas y que una falla en esta clase de trabajo es

que los avances de un grupo escolar se miden en muchas ocasiones por los ritmos que marcan los pocos estudiantes hábiles. (López, 2009; p.10)

Es importante promover la “práctica” de contenidos de manera sistemática, particularmente aquella que contribuya al perfeccionamiento de habilidades operatorias, pero no solamente de una forma. Es fundamental favorecer las habilidades con tareas más complejas y variadas, de modo que se logre propiciarlas desde diversos aspectos de la matemática. Es necesario fomentarlas con un acercamiento distinto al propuesto en las interminables páginas de ejercicios rutinarios.

Actualmente, la idea sobre el cálculo mental ha cambiado, dejando de ser concebido como la simple memorización y aplicación de un conjunto de reglas para resolver un problema matemático. Se le ha asociado con cálculos numéricos mentales sencillos, más naturales, que el individuo realiza según su experiencia, conocimiento de los números, y la naturaleza del problema matemático a resolver.

¿Cómo es que el Método de Resolución de Problemas propuesto por Santos Trigo apoya el aprendizaje de los contenidos programáticos a través del Cálculo Mental?

El Enfoque de Resolución de problemas de Luz Manuel Santos Trigo, señala que es una forma de pensar, donde una comunidad de aprendizaje busca diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. La meta es identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema, “los salones de clases deben ser comunidades en las cuales el sentido matemático se practique”. Permite enseñar estrategias de monitoria para que los alumnos aprenden cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la solución de problemas.

Un problema en términos generales es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes (Santos, 1997):

- a) La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quieren o necesitan encontrar una solución.
- b) La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la situación.

c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, numérico, geométrico). También el problema puede tener más de una solución.

d) La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones pendientes a resolver esa situación. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Para Santos Trigo, las cuatro variables importantes identificadas en el proceso de resolución de problemas son:

- La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos, el “saber qué hacer”.
- El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos, el “¿cómo hacerlo?”
- El papel del monitoreo o autoevaluación del procedimiento utilizado al resolver un problema. ¿Es correcto lo que hice?, ¿existe otra vía?
- La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema.

Para llevar a cabo este análisis es necesario recurrir a diversos métodos de recolección de información. Algunos de ellos tienen como metas identificar patrones, categorías o dimensiones de las estrategias de solución utilizadas por expertos con experiencia en la resolución de problemas (Santos Trigo, 1997).

Barrera Mora y Santos Trigo (2002) proponen cinco etapas para la resolución de un problema:

-Comprensión de la situación: los estudiantes reflexionen acerca de la situación planteada y las posibles vías de resolución, antes de comenzar con la ruta establecida.

-Análisis de la situación y construcción de un modelo matemático: identificar la información relevante para la solución del problema y representación de la información en términos matemáticos.

-Solución del caso particular: reflexión de los contenidos matemáticos introducidos hasta el momento.

-Planteamiento y solución: responder la situación planteada.

-Análisis retrospectivo: reflexión sobre el proceso de resolución seguido.

Cada una de estas etapas contribuyen de manera acertada en el logro del enfoque pedagógico planteado en el documento de Aprendizaje Clave (2017), el cual señala que,

En la educación básica, la resolución de problemas es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio. En el primer caso, se trata de que los estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general, aprendidos previamente; y en el segundo, los estudiantes desarrollan procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad. En ambos casos, los estudiantes analizan, comparan y obtienen conclusiones con ayuda del profesor; defienden sus ideas y aprenden a escuchar a los demás; relacionan lo que saben con nuevos conocimientos, de manera general; le encuentran sentido y se interesan en las actividades que el profesor les plantea, es decir, disfrutan haciendo matemáticas (SEP, 2017; p. 297).

El documento de Aprendizaje Clave (2017), continúa acentuando que en los niveles de primaria y secundaria se profundiza en el estudio de la aritmética, se trabaja con los números naturales, fraccionarios, decimales y enteros, las operaciones que se resuelven con ellos y las relaciones de proporcionalidad. Se espera que los estudiantes se apropien de los significados de las operaciones y, de esta manera, sean capaces de reconocer las situaciones y los problemas en los que estas son útiles. Además se busca que desarrollen procedimientos sistemáticos de cálculo escrito, accesibles para ellos, y también de cálculo mental.

¿Cómo es que el Método de Resolución de Problemas propuesto por Santos Trigo coadyuva al desarrollo del Cálculo Mental y las Habilidades del Pensamiento Matemático?

Santos Trigo (2007) considera que un modelo de enseñanza basado en la resolución de problemas ofrece oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos y favorece que los estudiantes desarrollen o construyan procesos

asociados al Pensamiento Matemático Avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar.

De acuerdo con Josueth Vázquez Román (2001), los estudiosos de la matemática educativa han considerado importante que en el curriculum de la enseñanza de la matemática se incorporen contenidos que estimulen el desarrollo de habilidades matemáticas en la resolución de problemas entre las que destacan la aplicación de la matemática a situaciones cotidianas, y desarrollar el sentido numérico para obtener resultados con cálculo mental y estimación (ayudan a desarrollar destrezas para resolver problemas de cálculo en un contexto real y a verificar un resultado logrado con algoritmos usando lápiz y papel).

Otras habilidades que se han recomendado desarrollar en los estudiantes son las de flexibilidad de pensamiento (reconocer que un problema tiene diferentes soluciones), reversibilidad de pensamiento (plantear un problema a partir del establecimiento de un resultado deseado), y la de memoria generalizada aplicada a la resolución de problemas.

De hecho, el cálculo mental se apoya en un grupo limitado de hechos numéricos básicos (Gómez Alfonso, B. (1998)) como son la “automatización” del conocimiento de las tablas, estrategias de conteo, descomposiciones, compensaciones y redondeo de números, estrategias heurísticas, etc., que buscan alterar o sustituir los datos iniciales de un problema por otros más cómodos o más fáciles de calcular.

En diferentes estudios sobre la naturaleza de las estrategias de cálculo mental usadas por los individuos en ambientes de resolución de problemas se exponen resultados que muestran a las estrategias de cálculo mental como herramientas muy valiosas que pueden utilizarse en la enseñanza de la matemática, ya que las habilidades de cálculo mental ayudan a desarrollar el conocimiento del valor relativo de los números y del sistema decimal. También pueden ayudar a comprender los algoritmos aritméticos y propiciar un mejor desarrollo de la agilidad mental de los estudiantes. (Vázquez, 2001; p. 10)

Josueth Vázquez Román (2001) destaca que antes de enseñar el algoritmo de lápiz y papel se debe recurrir a los conocimientos informales de los estudiantes para comenzar la enseñanza de la matemática, y el cálculo mental es un buen recurso para ello. Las situaciones

de aprendizaje que se diseñen para resolver problemas con la ayuda de estrategias propias del cálculo mental deben estimular a los estudiantes para que den respuestas anticipadas, y después resolver el problema y probar sus conjeturas; en la confrontación de los resultados de los equipos hay que socializar las estrategias aplicadas en el grupo, lo que permite validar los procedimientos utilizados en un ambiente grupal que brinde confianza y seguridad a los estudiantes para reconocer sus errores, identificando las partes ambiguas de sus soluciones y las partes que proporcionan evidencias y certidumbre en torno a un resultado.

### **CONTEXTO ESCOLAR**

El Trabajo Docente se realizó en la Escuela Secundaria General “Xicoténcatl” ubicada en la localidad de San Juan Jalpa, municipio de San Felipe del Progreso, Estado de México.

La escuela secundaria cuenta con tres aulas destinadas para clase (uno por cada grado), un centro de cómputo, aula telemática, dirección, administración y biblioteca (ubicados en un mismo espacio), una tienda escolar, sanitarios, cancha de básquet y campo de fútbol. El centro de cómputo es usado por los grupos quienes en la asignatura de tecnología les corresponden el taller de informática. El aula telemática cuenta con un cañón y puede ser usada por todos los profesores, solicitada con anticipación. En la biblioteca se dispone de libros en su mayoría de texto, cuentos y video casetes con temas de distintas materias.

La intervención docente se realizó con 110 alumnos de primero, segundo y tercer grado, en la mayoría provenientes de la misma comunidad, así como de otros lugares cercanos. Al inicio del ciclo escolar, el primer grado estaba conformado por 37 alumnos, pero durante los siguientes tres meses se dieron de baja dos estudiantes por motivos personales. El segundo grado lo integran 32 alumnos y el tercer grado lo conforman 43 alumnos.

## CAPÍTULO II

## CAPÍTULO II. ARITMÉTICA Y CÁLCULO MENTAL

El Cálculo Mental, como se mencionó en el apartado correspondiente, se entiende como una “serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón, 1995, en García, 2014). A manera de sugerencia, para su mejor desarrollo, Jiménez (2012) especifica que “...es necesario que el alumno analice cada caso en particular, busque la estrategia más pertinente, tome decisiones con respecto a cómo descomponer los números y qué cálculos hacer, así como valorar el resultado.” (Jiménez, 2012; p. 12). De manera continua, poner a prueba las estrategias hasta concluir con estrategias generales.

De la misma manera, Jiménez (2012) apoya la concepción de García & Mochón (2014), al señalar que “el cálculo mental consiste en realizar cálculos matemáticos utilizando solo el cerebro sin ayuda de otros instrumentos como calculadoras e incluso lápiz y papel. Las operaciones escritas tienen una forma bien determinada y siempre igual, con dependencia de los números que entren en juego. Sin embargo no ocurre lo mismo en el plano mental” (Jiménez, 2012; p. 12).

Esta idea contradice a la propuesta del Plan y Programas de Estudio, el cual hace la siguiente precisión:

El cálculo (mental) en el que, en función de los números y sus operaciones, se selecciona un procedimiento particular. No excluye el uso del lápiz y papel para hacer algunos cálculos intermedios, pero si excluye el uso de las calculadoras. (SEP, 2017; p. 653)

En la generalidad de los casos, el Cálculo Mental se desarrolla <<puesto que es una habilidad del pensamiento>> a partir de la aplicación de problemas aritméticos sencillos; sin embargo, bien podrían desarrollarse a partir de las operaciones y propiedades con los diferentes conjuntos de números, incluyendo el de los números reales.

Haciendo un análisis de las definiciones recuperadas de distintos autores, se establece que, en este documento, el cálculo mental es una *habilidad del pensamiento matemático que permite realizar operaciones sin ayuda exterior, sólo haciendo uso del razonamiento mental*. Como parte de la habilidad del cálculo mental y, al interior de los procesos que se desarrollan,

se cuentan e involucran el resto de las habilidades que son la resolución de problemas, estimación, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, generalización y, en menos medida en el campo de la aritmética, la ubicación espacial.

Por otra parte, el enfoque didáctico a través del cual se desarrolla la propuesta didáctica y los contenidos programáticos, es el denominado *Resolución de Problemas*, el cual señala que resolver problemas es una forma de pensar y actuar a partir de los conocimientos que ya se tienen, conjugada con una serie de estrategias cognitivas para adquirir nuevos conocimientos ya sean en la forma de conceptos, métodos o procedimientos matemáticos.

Santos Trigo (2007), investigador del Departamento de Matemática Educativa-CINVESTAV-IPN, señala en su obra *Resolución de Problemas. Fundamentos Cognitivos* (2007), que un modelo de enseñanza basado en la resolución de problemas ofrece oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos y favorece que los estudiantes desarrollen o construyan procesos asociados al Pensamiento Matemático Avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar.

El pensamiento matemático lo consideramos a la manera en que lo concibe Aldama (2015), donde señala que

... es una forma de pensar y actuar, cuya configuración y despliegue refleja la estructura, los métodos, procedimientos y lenguaje propios de la disciplina; esta forma de pensar sostiene, también, una faceta contextual que se muestra en la eficacia de su aplicación en los diferentes ámbitos del desempeño social, sea para resolver problemas o comprender y explicar fenómenos de diversa índole (Aldama, 2015)

Basado en lo mencionado por el autor, el pensamiento matemático tiene un papel importante dentro del cálculo mental, en la forma de pensar al momento de operar cualquier situación o problema que un alumno se enfrenta.

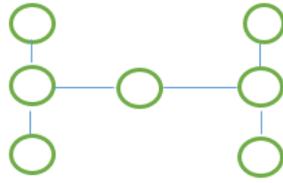
Para lograr el desarrollo de la propuesta didáctica denominada Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático y el logro de los propósitos se retomaron los contenidos del eje temático Número, Álgebra y Variación, mismos que se enuncia a continuación:

CONTENIDOS	DESCRIPCIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Resuelve problemas de suma y resta con números enteros y fracciones.</i></li> </ul>	<p>Implica la solución de operaciones que pueden ser sólo de suma, resta o que requieran el uso de las dos operaciones para llegar a obtener un resultado. En el caso de las fracciones, es necesario reconocer cuando se trate de fracciones de mismo denominador o diferente denominador, para saber qué método de solución aplicar. No se descarta la posibilidad de que estas operaciones estén contextualizadas.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Resuelve problemas de multiplicación y de división con fracciones.</i></li> </ul>	<p>Implica el conocimiento del algoritmo que se debe seguir para cada una de las situaciones. La multiplicación de fracciones se realiza multiplicando de manera directa el numerador por el numerador y el denominador por el denominador. Y en la división de fracciones se realiza una multiplicación de numerador por denominador y denominador por numerador.</p>

Elaboración propia. José, 2020.

Los problemas planteados a los alumnos de primer grado de educación secundaria, para su resolución, se enlistan enseguida:

1. En la figura de abajo, coloca en cada círculo uno de los siguientes dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de tal manera que la suma horizontal y las sumas verticales den el mismo resultado (11).



2. Las letras A, B, C, D, E y F representan los números 1, 3, 4, 6, 8 y 9, respectivamente.  
 ¿Qué números representan las siguientes operaciones matemáticas expresadas en letra?

$$A + A = B \quad A \times A = DF \quad A + C = DE$$

$$C + C = DB \quad C \times C = BD \quad A \times C = EF$$

3. Basta aritmético. Se dirá en voz alta un número y los alumnos deberán realizar las operaciones solicitadas en cada una de las casillas de la columna superior.

Número propuesto	+ 11	- 4	x 9	÷ 2	( ) <sup>2</sup>	Resultados correctos

4. Cálculo mental: fracciones, números decimales y porcentajes.

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

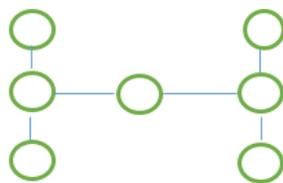
	Calcula :		Escribe como un número decimal:		Escribe como una fracción:	
1	$\frac{1}{4}$ de 32 =		$\frac{1}{4}$	0.25	0.5	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$ de 21 =		$\frac{1}{2}$		50%	
3	$\frac{4}{5}$ de 55 =		$\frac{1}{5}$		25%	
4	$\frac{5}{8}$ de 80 =		$\frac{1}{10}$		0.25	

5	$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} =$		$\frac{1}{100}$		10%	
6	$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} =$		$\frac{3}{4}$		0.1	
7	$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$		$\frac{2}{5}$		20%	
8	$-\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$		$\frac{5}{10}$		0.2	
9	$1 + \frac{1}{2} =$		$\frac{20}{100}$		0.01	
10	$1 - \frac{1}{4} =$		$\frac{8}{100}$		0.001	
11	$\frac{2}{7} + 1 =$		$\frac{3}{5}$		0.35	
12	$1 - \frac{4}{10} =$		$\frac{6}{3}$		0.11	
13	$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} =$		$\frac{4}{5}$		0.33...	
14	$\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) =$					
15	$\frac{(-6)}{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ =					
16	$\frac{3}{11} \cdot (-8) =$					
MARCADOR						

## Análisis de resultados

### Problema 1.

*En la figura de abajo, coloca en cada círculo uno de los siguientes dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de manera que la suma horizontal y las sumas verticales den el mismo resultado (11).*



En relación al primer planteamiento (problema 1), se distinguieron, en general, dos métodos de solución al interior del grupo de estudiantes, estos métodos se presentan a continuación:

<p style="text-align: center;"><b>Método 1.1</b></p> <p style="text-align: center;"><b>“Ensayo-error”</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Método 1.2</b></p> <p style="text-align: center;"><b>“Composición-descomposición”</b></p>
<p>Jugar con la ubicación de los números, “ubicación y reubicación”.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Colocar un número en cualquier círculo.</li> <li>- Tener en cuenta que la suma de los números ubicados en las columnas extremas y las fila central de un total de 11.</li> <li>- Combinar y reubicar los números de tal suerte que la suma de manera horizontal y las sumas verticales den como resultado 11.</li> </ul> <p>Ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ubicación de la terna: 5, 4, 2 (<math>\sum 5.4.2 = 11</math>) en la columna derecha.</li> </ul>	<p>Número más grande.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se comienza por elegir el número más grande proporcionado.</li> <li>- Se buscan otros dos números que sumados con el mayor, den como resultado 11 (para ir reduciendo los números posibles a ocupar).</li> <li>- Se ubican en una de las líneas verticales de la figura, colocando en la parte superior o inferior el número más grande (7).</li> <li>- Se selecciona el segundo número más grande y se coloca en el círculo de en medio de la línea horizontal de la figura.</li> <li>- Se busca el tercer número faltante de la línea horizontal de la figura.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>- La terna: 6, 3 y 1, se coloca en la columna de la izquierda.</li> <li>- El número faltante (7) se ubica en el círculo vacío de la columna central.</li> <li>- Se modifican los números hasta lograr que la suma de cada una de las ternas sea 11.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se completan los otros dos círculos de la línea vertical faltante, con los números restantes.</li> </ul>
<p><b>Descripción</b></p> <p>Este método es el más usado por los estudiantes, porque sólo se juega con los números (ubican y reubican) de manera que se cumpla la condición establecida: la suma de 3 números de como resultado 11.</p> <p>Comienzan por ubicar un número al azar en uno de los círculos de la figura y posteriormente poco a poco van llenando los círculos restantes con los números que se tienen, hasta que encuentren la ubicación correcta de cada uno de los números.</p>	<p><b>Descripción</b></p> <p>El método consiste en analizar los datos que se proporcionan para lograr construir una estrategia que permita mayor rapidez &lt;&lt;economía de tiempo&gt;&gt; para obtener el resultado correcto.</p> <p>En este caso, partiendo de un número (composición) se buscaron una terna de números que sumados dieran como resultado 11 (descomposición), considerando el valor del número más alto (7). Partiendo de ahí, se van considerando los números s restantes, para formar la siguiente terna que cumpla con la condición demandada.</p>

Elaboración propia. José, 2020.

### **Análisis del Método 1.1**

- *Cálculo mental*

En este método de solución, el cálculo mental se basó prioritariamente en la memoria visual, que consiste en “tener en mente” la ubicación progresiva de los números en cada lugar y los

posibles cambios que se generan al continuar con la ubicación de ellos hasta lograr la ubicación del total de los números, misma que tendría que cumplir condición inicial.

El cálculo mental tuvo presencia en los momentos posteriores a la ubicación de cada número y cada turno de ubicación <<memoria visual>>, en el sentido de cumplir la condición inicial: “búsqueda de la suma total de 11”. Los intentos realizados, en un rango de 5 a 10, se basaron en el “ensayo y error”, también conocido como “tanteo”. Es decir, en un primer momento se propone la ubicación de una terna: 5, 4, 2 ( $\Sigma 5.4.2 = 11$ ) en la columna derecha.

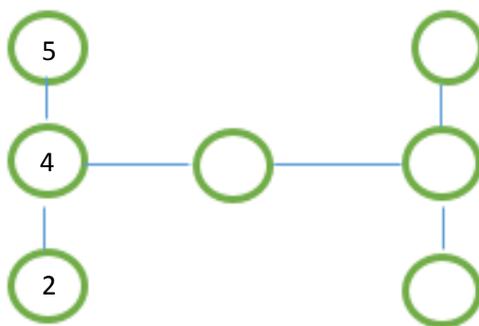
Enseguida, de los números restantes, se tomó otra terna: 6, 3 y 1, se coloca en la columna de la izquierda, después, se identifica el número faltante (7) y se ubica en el círculo vacío de la columna central, esta representaría una de las posibles respuestas incorrectas del problema.

Como se puede identificar, las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon el método 1.1 de solución consisten en los siguientes MOMENTOS:

MOMENTO 1:

Primera terna propuesta: 5, 4, 2.

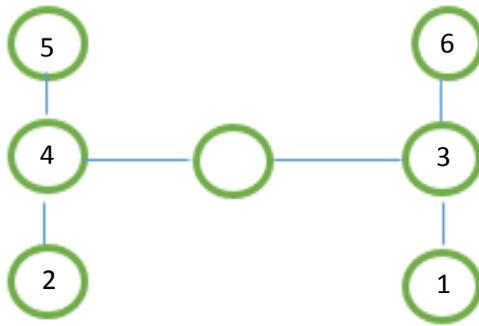
Ubicación en la columna de la izquierda.



MOMENTO 2:

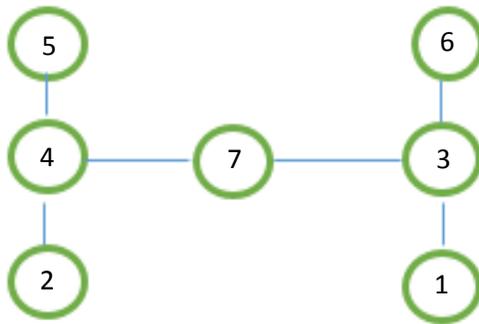
Segunda terna propuesta: 6, 3 y 1.

Ubicación en la columna de la derecha.



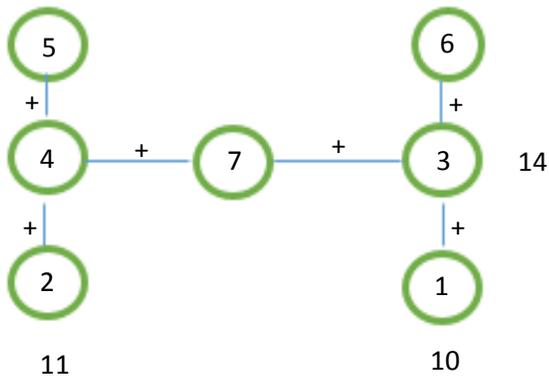
MOMENTO 3:

Ubicación del dígito faltante: 7. Ubicación en el lugar central de la figura. Único espacio por llenar.



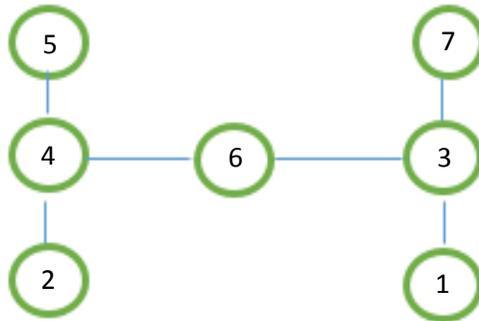
MOMENTO 4:

Verificar que la suma de la fila y columnas sea 11.



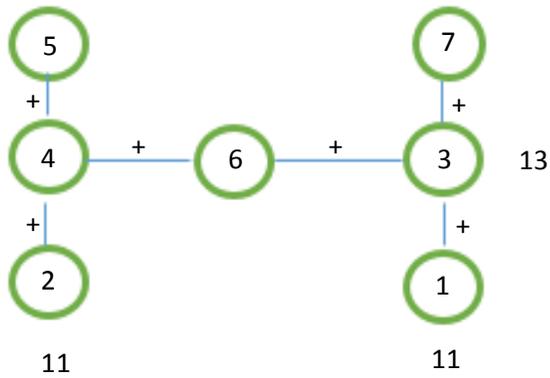
MOMENTO 5:

Analizar las ternas de números. Cambiar el número 7 en el lugar donde se encuentra el número 6.



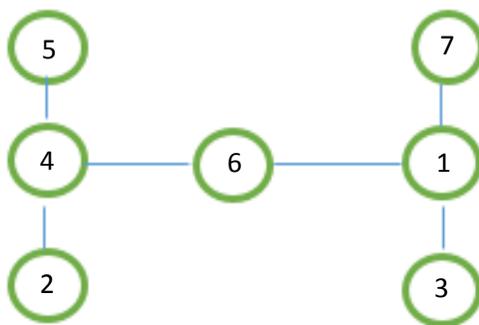
MOMENTO 6:

Verificar que la suma de cada una de las ternas sea 11.



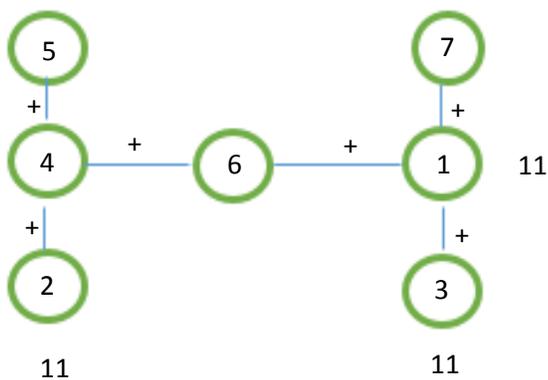
MOMENTO 7:

Colocar el número 3 en la posición del número 1 y viceversa.



MOMENTO 8:

Verificar que la suma de cada una de las ternas sea 11.



Planteamiento resuelto.

En relación al concepto particular de cálculo mental, involucrado en este ensayo, las formas de proceder de los estudiantes cumplen con los preceptos de ese concepto en el sentido de que los cálculos se logran realizar a nivel mental, con el grado de abstracción que le demanda, llegando a un resultado exacto con un procedimiento eficiente.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Dado que el cálculo mental es una serie de procedimientos mentales, a nivel abstracto, se realizan una serie de operaciones, denominadas operaciones del pensamiento matemático, siendo estas: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar y conjeturar. La abstracción estuvo

presente en el momento en que los estudiantes seleccionaron los números que corresponderían a cada una de las ternas a colocar en las columnas y fila. Analizar- sintetizar, se muestra cuando los alumnos comprenden que la suma de cada uno de los números que compone una terna da como resultado 11.

Categorizar, está presente en el momento en que se reconoce qué tipo de operación utilizar para resolver el problema, las condiciones del problema: (la suma de tres números sea 11, la importancia de la ubicación de los números, el uso solamente de los números propuestos). Conjeturar se presentó cuando los alumnos eran capaces de reconocer que números no podrían formar una terna cuya suma de números que la componen fuera 11.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Entre las habilidades del pensamiento que se logran distinguir durante el cálculo mental desarrollado por los alumnos se encuentran la resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización y ubicación espacial.

Al momento de comprender la situación planteada, idear un método de solución, solucionar el caso particular, responder la situación planteada y realizar un análisis retrospectivo, se está resolviendo un problema. La flexibilidad de pensamiento se muestra cuando el alumno es capaz de “jugar” con los números, creando ternas y reconociendo que, para cumplir a la condición inicial, se emplean diferentes recursos y estrategias. Es decir, puede vislumbrar distintos métodos de combinación de ternas numéricas para cumplir las condiciones del planteamiento.

En el momento en que el alumno trae a su mente los números que anteriormente ha ocupado (memoria visual) y la posición en la que los ha colocado, es posible que reconozca qué tipo de números no debe volver a usar en el mismo lugar y con los mismos números, se está poniendo en práctica la reversibilidad de pensamiento.

La estimación entra en juego cuando el estudiante reconoce qué números no podrían formar una terna cuya suma diera como resultado 11, por ejemplo: 7, 6 y 5 o 1, 2 y 3. La generalización se presenta en el momento en que el alumno comprende que se tiene que crear

ternas de números cuya suma sea igual a 11. Por último, es en este momento en el cual el alumno inicia también con la generalización de los métodos de solución de dichos casos particulares para llegar a identificar esa generalización.

La ubicación espacial, aunque sea una habilidad propiamente geométrica, se muestra cuando se reconoce que la ubicación que se le dé a cada número en la figura: columna de la derecha, de la izquierda, arriba, abajo, entre otros conceptos espaciales. Esta habilidad influye en el cumplimiento de la condición inicial, porque un número mal ubicado puede alterar el resultado de la suma de los números que componen la terna.

### **Análisis del Método 1.2**

- *Cálculo mental*

En este método de solución, el cálculo mental se presentó también a través de la memoria visual, pero en esta ocasión se observó principalmente en el análisis de las ternas de números que sumados dieran como resultado 11. Se consideró en la primera terna al número 7 y otros dos números (1, 3) que cumplieran con la condición inicial, para colocarse en la columna izquierda. Posteriormente se observan los números restantes (2, 4, 5, 6), se selecciona el segundo número más grande y se coloca en el círculo central de la única fila, obteniendo finalmente una última terna de números (2, 4, 5) que se ubica en los círculos de la columna faltante (derecha).

Como se puede identificar, la estrategia diseñada por los alumnos que emplearon el método 1.2 de solución consiste en los siguientes MOMENTOS:

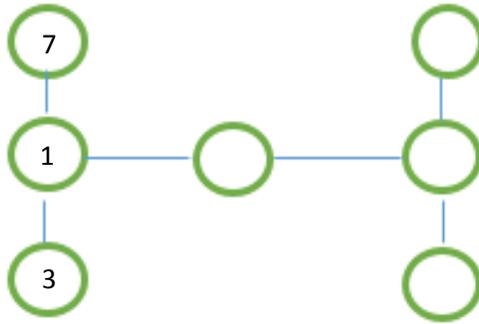
MOMENTO 1:

Determinar, del conjunto de números proporcionados, aquel que tenga el valor más grande.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

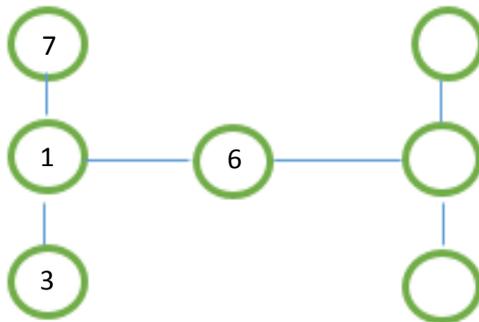
MOMENTO 2:

Primera terna propuesta: 7, 1, 3. Ubicación en la columna de la izquierda.



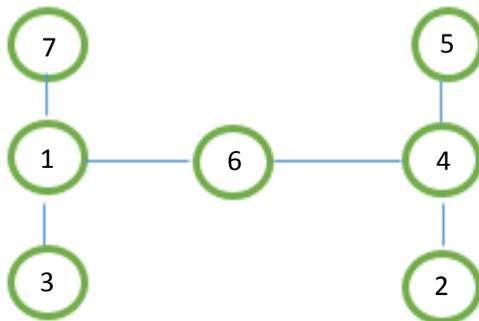
MOMENTO 3:

Seleccionar de los números restantes el número más grande (6). Ubicación en el círculo central de la única fila.



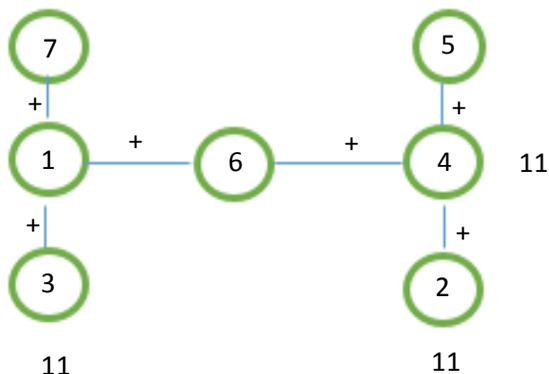
MOMENTO 4:

Ubicación de la última terna: 2, 4, 5. Columna derecha.



## MOMENTO 5:

Verificar que la suma de cada una de las ternas sea 11.



Planteamiento resuelto. ANEXO 1.

Las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon el método 2 de solución consiste en los siguientes aspectos: descomposición de un número (11), composición de un número (suma de ternas), la memoria visual y el valor posicional de los números siendo este el valor que toma un dígito de acuerdo con la posición que ocupa dentro del número.

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

El contenido programático involucrado se refiere a la suma de números naturales es dominado, por los alumnos, esto debido a que la suma requerida se compone únicamente de números de una sola cifra. Además, la propiedad que se demanda en este planteamiento es la llamada propiedad conmutativa, de las propiedades de las operaciones de números naturales, es la más común y frecuente en su uso.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Las operaciones del pensamiento matemático que el alumno de primer grado de la escuela secundaria involucra en relación con la habilidad del cálculo mental, son: abstraer, analizar-sintetizar, categorizar y conjeturar. Abstraer está presente cuando el alumno mediante una idea mental identifica que de una serie de ternas de números que se pueden formar con los números del 1 al 7 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), necesita extraer aquellos que al sumarlos se obtiene

como resultado 11. Analizar – sintetizar se presentan al momento en que el alumno considera que la suma de tres números debe dar como resultado 11.

La categorización se considera cuando el alumno comprende que el número 11, se representa a través de una composición de números sumados uno del otro, o bien de una descomposición donde la suma de una terna de números da como resultado 11, también al reconocer que es necesario realizar operaciones aritméticas para llegar al resultado, en este caso, de suma y posiblemente de la resta. Por último, conjeturar se presenta en el momento en que el alumno de manera mental, puede adelantarse a saber qué ternas de números pueden usarse y cuáles no, o bien cuando es posible adelantarse a un resultado.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes en los métodos anteriores son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización y ubicación espacial. La resolución de problemas está presente cuando el estudiante tiene que hacer uso de una serie de números dados para ubicarlos en una figura presentada gráficamente, cumpliendo la condición de que la suma de una terna de números dé como resultado 11, considerando que los números no se pueden repetir y se tiene que utilizar todos los números dados.

La flexibilidad de pensamiento se manifiesta en el momento en que el alumno es capaz de comprender que para resolver el problema, se puede llegar a ella a través de diferentes métodos y que es necesario identificar el más adecuado, por ejemplo en el problema la misma suma se obtiene colocando los dígitos de diferentes formas. La estimación se presenta cuando el alumno prevé un posible resultado de antemano y realiza una conjetura de cuáles ternas serían las más convenientes de usar para resolver el problema. La generalización se muestra cuando el alumno reconoce que la suma de una terna de números tiene que dar como resultado 11 ( $\sum 6.1.4 = 11$ ). La ubicación espacial se considera en la figura proporcionada en forma de H, porque se tiene que tomar en cuenta que la suma de los números influye en la ubicación que a estos se les dé en la figura.

## Problema 2

Las letras que van desde la A hasta la F representan los números 1, 3, 4, 6, 8 y 9. ¿Qué números representan las siguientes operaciones matemáticas expresadas en letra?

$$A + A = B \quad A \times A = DF \quad A + C = DE$$

$$C + C = DB \quad C \times C = BD \quad A \times C = EF$$

En relación al planteamiento anterior (problema 2), se distinguieron, dos métodos de solución que se presentan a continuación:

Método 2.1	Método 2.2
Ensayo y error	Valor posicional de los números
<p><b>Descripción</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se elige un número al azar y se designa a la primera letra de la primera operación (A).</li> <li>- Operar el algoritmo correspondiente.</li> <li>- Obtener el valor correspondiente a la letra que representa el resultado (B).</li> <li>- Sustituir este nuevo valor en las operaciones donde aparece la letra correspondiente (<math>C + C = DB</math> <math>C \times C = BD</math>).</li> <li>- Operar el segundo algoritmo del primer valor otorgado a la letra A (<math>A \times A = DF</math>).</li> </ul>	<p><b>Descripción</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Analizar que la suma de <math>A + A</math> es igual a un número de un solo dígito (B), por lo tanto, no puede adquirir un valor mayor 4, los valores probables para esta letra serian: 1, 3, 4.</li> <li>- Analizar que en el producto de la multiplicación <math>A \times A</math>, se obtiene como resultado un número compuesto por dos dígitos: DF, por ende, el único valor posible para la letra A, sería 4.</li> <li>- Se sustituye el número 4 en las operaciones donde se encuentre la letra A (<math>A + A = B</math>, <math>A \times A = DF</math>, <math>A + C = DE</math>, <math>A \times C = EF</math>).</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Obtener el valor correspondiente a las letras que representan el resultado (<math>DF</math>).</li> <li>- Sustituir este nuevo valor en las operaciones donde aparece la letra correspondiente (<math>A + C = DE</math>, <math>C + C = DB</math>, <math>C \times C = BD</math>, <math>A \times C = EF</math>).</li> <li>- De los números restantes, elegir uno y denominarlo al valor de la letra C.</li> <li>- Sustituir este nuevo valor en las operaciones donde aparece la letra correspondiente (<math>A + C = DE</math>, <math>C + C = DB</math>, <math>C \times C = BD</math>, <math>A \times C = EF</math>).</li> <li>- Operar el algoritmo correspondiente para encontrar el valor de la letra E (<math>A + C = DE</math>, <math>A \times C = EF</math>).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Operar el algoritmo correspondiente y obtener el valor de las letras (B, DF).</li> <li>- Sustituir los valores encontrados en donde se encuentren las letras B, D y F.</li> <li>- Operar los algoritmos correspondientes para obtener los valores de las letras faltantes.</li> <li>- Realizar los despejes posibles para encontrar el valor de C.</li> </ul>
---	--

Elaboración propia. José, 2020.

### **Análisis del Método 2.1**

- *Cálculo mental*

En el primer método de solución propuesto por los estudiantes, el cálculo mental se vio presente en el momento en que los alumnos realizaban los cálculos a nivel mental, o bien, aplicaban los algoritmos correspondientes en cada una de las situaciones para llegar a obtener el resultado de dicha operación, sin dejar a un lado la <<memoria visual>> misma que

interviene en la ubicación de los números en cada letra y los posibles cambios que se generan al continuar con la ubicación de ellos hasta lograr la ubicación del total de los números.

El cálculo mental se presentó momentos posteriores a la asignación de un valor a la primera letra (A), cuando se realizaba la aplicación del algoritmo correspondiente para lograr obtener todos los valores correctos de cada una de las letras cumpliendo con la condición descrita en la situación “calcular qué números representan las operaciones matemáticas expresadas en letra”. Los intentos realizados, en un rango de 4 a 9, se basaron en el “ensayo y error”, también conocido como “tanteo”. Es decir, en un primer momento se propone la ubicación de un valor a la primera letra (A) que aparece en las operaciones, esta letra podría adquirir el valor de 1, posteriormente se sustituye y se opera el algoritmo:

$$A = 1 \rightarrow A + A = B \rightarrow 1 + 1 = 2$$

Se sigue sustituyendo el valor de A en las operaciones posteriores y también el valor de B que se ha encontrado al realizar la primera operación.

$$A \times A = DF \rightarrow 1 \times 1 = 2$$

Dado que esta segunda operación al sustituir el valor de A, se obtiene un número compuesto de un solo dígito y la operación matemática expresada en letra tiene un resultado representado con dos letras (dos dígitos), el número 1 no podría ser el valor que adquiriría la letra A, debido a que no se cumple la condición inicial. Este sería uno de los primeros intentos fallidos ejercidos por los estudiantes, entrando en juego la memoria visual para recordar qué números ya se han utilizado en las letras y seguir haciendo nuevos intentos con los números faltantes.

Se considera el segundo número de los propuestos (3) y se sustituye en las primeras dos operaciones:

$$A = 3 \rightarrow A + A = B \rightarrow 3 + 3 = 6$$

$$A \times A = DF \rightarrow 3 \times 3 = 9$$

El número 3, cumple con el resultado de la primera operación, pero en la segunda operación se obtiene un resultado que está representado por un solo dígito (9) y, la operación matemática expresada en letra tiene un resultado compuesto por dos dígitos. Del análisis

anterior se descarta el número 3 como posible valor de la letra A, dado que no se cumple con el resultado de la segunda operación.

Se retoma el tercer número (4) y se sustituye en las dos primeras operaciones:

$$A = 4 \rightarrow A + A = B \rightarrow 4 + 4 = 8$$

$$A \times A = DF \rightarrow 4 \times 4 = 16$$

El número 4, cumple con las condiciones representadas en las operaciones matemáticas expresadas en letra, por lo que se continúa sustituyendo en las siguientes operaciones, considerando que con los resultados obtenidos se han encontrado el valor de tres letras, siendo estas las siguientes:

$$A = 4 \quad B = 8 \quad D = 1 \quad F = 6$$

Para comprobar que estas sean correctas se sustituyen también en las operaciones donde se encuentren presentes.

$$A + A = B \quad A \times A = DF \quad A + C = DE$$

$$4 + 4 = 8 \quad 4 \times 4 = 16 \quad 4 + C = 1E$$

$$C + C = DB \quad C \times C = BD \quad A \times C = EF$$

$$C + C = 18 \quad C \times C = 81 \quad 4 \times C = E6$$

El valor de la letra que es más fácil de encontrar es el representado en la operación  $C + C = 18$ , porque, solo se necesita encontrar dos números que sumados den como resultado 18, considerando que estos números tienen que ser iguales. Se determina que el número que cumple con estas condiciones, es el 9.

$$C + C = 18 \rightarrow 9 + 9 = 18$$

Se obtiene el valor de la letra  $C = 9$ . Se sustituye este resultado en una de las operaciones donde está presente para encontrar el valor de la letra faltante (E).

$$4 + C = 1E \rightarrow 4 + 9 = 13$$

Obteniendo el valor de la letra  $E = 3$ , se logra resolver el problema. ANEXO 2

Con lo descrito anteriormente se puede deducir que las estrategias usadas por los estudiantes el método 2.1 de solución consiste en: la operación mental de los algoritmos, la memoria visual y ensayo y error (tanteo).

En relación al concepto particular de cálculo mental, para este ensayo, la forma de proceder de los estudiantes cumple con los preceptos de ese concepto en el sentido de que los cálculos se logran realizar a nivel mental, con el grado de abstracción que le demanda, llegando a un resultado exacto con un procedimiento eficiente.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

En este primer método aplicado por los estudiantes cada una de las operaciones del pensamiento matemático (abstraer, analizar- sintetizar, categorizar, conjeturar) se presentaron de la siguiente manera.

La abstracción se muestra en el momento en que los alumnos seleccionaron el valor que adquiriría la primera letra, considerando el tipo de algoritmo que se debía operar en cada operación matemática expresada en letra. Analizar- sintetizar se presenta cuando los alumnos comprenden que cada una de las letras debe adquirir un valor y está determinado por el cumplimiento de la operación en la que cada una está presente.

Categorizar se muestra cuando los alumnos reconocen el tipo de operaciones que deben resolver (suma y multiplicación), así como al identificar las propiedades de las operaciones que están presentes (propiedad conmutativa). Conjeturar se presenta cuando el alumno va determinando cuales números pueden cumplir con cada una de las operaciones, realizando las operaciones de manera mental.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización y ubicación espacial. Al buscar cumplir con la condición demandada en el planteamiento, se busca resolver el problema, sin importar la estrategia que se decida usar. La flexibilidad de pensamiento se manifiesta cuando el estudiante tiene la idea de que cada una de las letras, en

un primer momento, puede adquirir cualquier valor propuesto en el problema y que para llegar a la solución necesitará realizar varios intentos (ensayo y error).

La reversibilidad de pensamiento permite al alumno, tener en mente los valores que ha ido colocando a las letras y no cumple con las condiciones demandadas, para no volver a considerarlas. La estimación ayuda al estudiante a determinar qué valores podrían adquirir (probablemente) cada una de las letras, aplicando los algoritmos correspondientes a las operaciones. La generalización se presenta cuando se reconoce que es necesario encontrar los valores que cumplan con las operaciones matemáticas expresadas en letra. Y por último la ubicación espacial se muestra en el valor que adquiere cada una de las letras y el cumplimiento de las operaciones, pues la ubicación de las letras no se puede cambiar.

### **Análisis del Método 2.2**

- *Cálculo mental*

En el segundo método de solución, el cálculo mental se presentó principalmente en el análisis de las operaciones matemáticas expresadas en letra realizadas a nivel mental, específicamente en el valor posicional de los números, así como en la cantidad de dígitos obtenidos en los resultados de estas operaciones. De igual forma, estuvo presente la memoria visual al momento de recordar cuáles valores podrían adquirir o no, cada una de las letras representadas en las operaciones.

El cálculo mental tuvo presencia después de realizar el análisis de los resultados de las primeras dos operaciones:  $A + A = B$ ,  $A \times A = DF$ , así como los números propuestos en el planteamiento: 1, 3, 4, 6, 8 y 9. Dado que la primera operación indica una suma y el resultado está representado por una letra, es decir, el resultado está compuesto por un sólo dígito, los valores posibles que podría adquirir la letra A serían los siguientes: 1, 3, 4

$$A + A = B$$

$$1 + 1 = 2$$

$$3 + 3 = 6$$

$$4 + 4 = 8$$

Analizando la segunda operación ( $A \times A = DF$ ), se observa que el resultado está representado por dos letras (dos dígitos) y sustituyendo los valores posibles mencionados anteriormente se tendría:

$$A \times A = DF$$

$$1 \times 1 = 2$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 4 = 16$$

Del análisis anterior se concluye que el único valor que podría adquirir la letra A, de acuerdo con las operaciones matemáticas expresadas en letra, sería 4, obteniendo también los valores correspondientes de B (8), D (1) y F (6).

Posteriormente se sustituyen estos valores en las operaciones matemáticas expresadas en letra dónde se encuentren:

$$A + A = B \rightarrow 4 + 4 = 8$$

$$A \times A = DF \rightarrow 4 \times 4 = 16$$

$$A + C = DE \rightarrow 4 + C = 1E$$

$$C + C = DB \rightarrow C + C = 18$$

$$C \times C = BD \rightarrow C \times C = 81$$

$$A \times C = EF \rightarrow 4 \times C = E6$$

Los números dados en el planteamiento son los siguientes: 1, 3, 4, 6, 8 y 9, se descartan aquellos valores de las letras que ya se han encontrado (1, 4, 6 y 8) y se identifican aquellos sobrantes: 3, 9. De la operación número 4 se puede obtener el valor de C, usando un despeje:

$$C + C = 18 \rightarrow 2C = 18 \rightarrow \frac{2C}{2} = \frac{18}{2} \rightarrow C = 9$$

Se substituye este nuevo valor en las operaciones faltantes para obtener el valor de la letra faltante.

$$A + C = DE \rightarrow 4 + 9 = 13$$

$$C + C = DB \rightarrow 9 + 9 = 18$$

$$C \times C = BD \rightarrow 9 \times 9 = 81$$

$$A \times C = EF \rightarrow 4 \times 9 = 36$$

El valor correspondiente de la letra E sería 3 y es así como se logra obtener los valores de las letras A, B, C, D, E y F, siendo estos: 4, 8, 9, 1, 3 y 6 respectivamente.

En este método las estrategias de solución usadas por los estudiantes consisten en: la operación mental de los algoritmos, la memoria visual y el valor posicional de los números (número de dígitos que posee).

En relación al concepto particular de cálculo mental, las formas de proceder de los estudiantes cumplen con los preceptos de ese concepto dado que la forma de operar a nivel mental es la esencia del cálculo mental, considerada como una de las habilidades del pensamiento matemático, que consiste básicamente en realizar las operaciones a nivel mental y de manera abstracta. Es decir, haciendo uso de los objetos matemáticos <<números>> tal como se han creado, como producto de la mente humana y construido a nivel de abstracción mental.

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

El contenido programático involucrado se refiere a la suma y multiplicación de números naturales es dominado, por los alumnos, esto debido a que la suma requerida se compone únicamente de números de una sola cifra, al igual que en la multiplicación. Además, la propiedad que se demanda en este planteamiento es la llamada propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación, de las propiedades de las operaciones de números naturales, es la más común y frecuente en su uso.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Las operaciones del pensamiento matemático que el alumno de primer grado de la escuela secundaria involucra en relación con la habilidad del cálculo mental son: abstraer, analizar-sintetizar, categorizar, conjeturar. Abstraer está presente cuando el alumno selecciona las operaciones matemáticas expresadas en letra más adecuadas para su análisis, solución y punto de partida para encontrar el valor de cada una de las letras.

Analizar- sintetizar se lleva a cabo durante toda la resolución del planteamiento, porque se tiene que elaborar un examen detallado de la condición inicial y por ende de cada una de las operaciones matemáticas expresadas en letra, para conocer sus características o cualidades y extraer conclusiones. Categorizar se presentó en el momento en que los estudiantes

identificaron el tipo de algoritmo que representaba cada operación (suma o multiplicación) y en las propiedades de las operaciones presentes.

Por último, conjeturar, está presente en cuanto los alumnos dedujeron cuáles números podrían o no, adquirir un valor en cierta letra, como por ejemplo, para hallar el valor correspondiente de la letra A, se analizaron los resultados representados en las operaciones matemáticas expresadas en letra y se dedujo cuales números eran probables como valor de esta letra.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización y ubicación espacial. La resolución de problemas está presente en el momento en que los estudiantes comprendieron la condición inicial “Las letras que van desde la A hasta la F representan los números 1, 3, 4, 6, 8 y 9. ¿Sabrías calcular qué números representan las siguientes operaciones matemáticas expresadas en letra?”, el problema radica en encontrar el valor de cada una de las letras, pero cuidando cumplir la operación en donde están presentes.

La flexibilidad de pensamiento se presenta cuando el alumno es capaz de reconocer que el problema puede resolverse a través de varios intentos, estrategias o procedimientos, sólo es necesario encontrar el más adecuado. Reversibilidad de pensamiento se encuentra inmerso en el momento en que los estudiantes pueden reconocer los pasos que han seguido para lograr llegar al resultado o cumplir la condición inicial, o bien, cuando los alumnos recuerdan cuales son aquellos números que ya ha usado anteriormente como valor de una letra.

La estimación está presente cuando el alumno prevé un posible resultado y realiza una conjetura de cuales números son los más convenientes usar para cada una de las letras de manera que se cumpla con la condición planteada. La generalización se presentó en el momento en que se reconoce que a cada letra le corresponde un único número y que el número correcto tiene que resolver el algoritmo correspondiente que las operaciones matemáticas expresadas en letra representan. Y la ubicación espacial influye en el orden o la ubicación correspondiente de cada valor en cada una de las letras, o bien, en el momento de sustituir el valor numérico de cada letra en cada una de las operaciones. La ubicación de las

letras no debe cambiar de posición, pues lo que se pretende es cumplir con la condición inicial que demanda el planteamiento y así, resolver el problema.

### Problema 3

*Basta aritmético. Se dirá en voz alta un número y, los alumnos deberán realizar las operaciones solicitadas en cada una de las casillas de la columna superior.*

<i>Número propuesto</i>	<i>+ 11</i>	<i>-4</i>	<i>x 9</i>	<i>÷ 2</i>	<i>( )<sup>2</sup></i>	<i>Resultados correctos</i>
7						
11						

Respuestas correctas: ANEXO 3

7: 18, 3, 63, 3.5, 49.

11: 22, 7, 99, 5.5, 121

Estas respuestas fueron únicas, lo que significa que los estudiantes no tuvieron alguna dificultad u obstáculo para su solución a nivel mental.

Las formas de operar las operaciones propuestas por parte de los alumnos, se presentan a continuación:

Operación	Descripción
1. Suma:  7 + 11	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar cuántas unidades y decenas hay en los números 7 y 11 (7 = siete unidades, 11 = una unidad y una decena).</li> <li>• Sumar las unidades <math>7 + 1 = 8</math>, determinar la formación de ocho unidades.</li> <li>• Reagrupar, según el sistema decimal, las decenas resultantes y, enseguida, las unidades. 18</li> <li>• Suma o Total: <b>18</b>.</li> </ul>

<p>2. Resta:</p> $7 - 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Composición: identificar qué número sumado con el número 4, dará como resultado 7. <math display="block">4 + 3 = 7</math> </li> <li>Descomposición: identificar qué número restado de 7, dará como resultado 4. <math display="block">7 - 3 = 4</math> </li> </ul>
<p>3. Multiplicación:</p> $7 \times 9$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sumar 9 veces el 7, es decir, <math>\sum 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = 63</math>, o bien: <math display="block">7 + 7 = 14 + 7 = 21 + 7 = 28 + 7 = 35 + 7 = 42 + 7 = 49 + 7 = 56 + 7 = 63</math> </li> <li>Recordar las tablas de multiplicar. <math display="block">7 \times 1 = 7</math> <math display="block">7 \times 2 = 14</math> <math display="block">7 \times 3 = 21</math> <math display="block">7 \times 4 = 28</math> <math display="block">7 \times 5 = 35</math> <math display="block">7 \times 6 = 42</math> <math display="block">7 \times 7 = 49</math> <math display="block">7 \times 8 = 56</math> <math display="block">7 \times 9 = 63</math> </li> </ul>
<p>4. División:</p> $7 \div 2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Composición: identificar qué número multiplicado por el número 2, dará como resultado 7. <math display="block">2 \times 3.5 = 7</math> </li> <li>Descomposición: identificar qué número dividido entre 7 dará como resultado 2. <math display="block">7 \div 3.5 = 2</math> </li> </ul>

<p>5. Potenciación: <math>7^2</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar el valor del exponente para saber cuántas veces se tiene que multiplicar el 7 por sí mismo.</li> <li>• Realizar la multiplicación correspondiente:</li> </ul> $7 \times 7 = 49$
--	--

Elaboración propia. José, 2020.

### **Análisis del problema**

La actividad consiste en ejecutar una serie de operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) a un número definido, en el menor tiempo posible, buscando obtener el mayor número de aciertos.

- *Cálculo mental*

El cálculo mental se presenta cuando los estudiantes realizan las operaciones a nivel mental, sin hacer uso de lápiz y papel para aplicar el algoritmo y llegar al resultado correspondiente. La memoria visual se hace presente en el momento que los alumnos recuerdan cuál es el procedimiento que pueden seguir, en las operaciones que deben realizar, así como en aquellas que ya se han utilizado.

En la primera operación, el cálculo mental tuvo presencia en el momento en que los alumnos operaron de manera mental el algoritmo correspondiente a la suma de números naturales. Para ello, es necesario dominar y conocer el sistema decimal, viéndose presentado en la medida en que logran ubicar, sin alguna dificultad, las posiciones de las distintas cifras que componen los numerales, unidades y decenas.

En la segunda operación (resta), el cálculo mental se distingue cuando se opera de manera mental alguno de los dos métodos de solución propuestos por los estudiantes: composición y descomposición del resultado. La composición se presenta en el momento que se buscan un número que sumado con 4, diera como resultado 7, siendo este número, 3. El método de descomposición, se observó cuando del resultado (7), se le restan cuatro unidades, teniendo

como sobrantes tres unidades, este método bien podría conocerse como la aplicación del algoritmo correspondiente a la resta de números naturales.

La tercera operación se refiere a una multiplicación de números naturales de un solo dígito. El cálculo mental se presentó en el momento en que el estudiante realiza de manera mental la suma de “nueve veces el siete”, es decir, sumar nueve veces el número siete, o bien, al recordar el algoritmo correspondiente a la multiplicación de números naturales, haciendo uso de la memoria mental para traer a la mente las tablas de multiplicar del número 7 o 9, dado que el orden de los factores no altera el producto ( $7 \times 9 = 63$ ;  $9 \times 7 = 63$ ).

En la cuarta operación (división de números naturales), el cálculo mental se presentó en la elaboración de los métodos de solución a nivel mental o abstracto, siendo estos métodos de solución los siguientes: composición y descomposición del resultado. La composición se presenta en el momento que se buscan un número que multiplicado con 2, diera como resultado 7, siendo este número, 3.5. El método de descomposición, se observó cuando el 7 se divide entre 2, teniendo como cociente 3.5, en este método se lleva a cabo la aplicación del algoritmo correspondiente a la división de números naturales.

Y en la última operación (potenciación), el cálculo mental estuvo presente en los estudiantes al momento de traer a la mente (recordar), cómo se eleva al cuadrado un número y operar el algoritmo. En esta operación, primero, es importante identificar el exponente (2) al que está elevado la base (7) para así, tener presente cuantas veces se va a multiplicar por sí mismo (la base). Una vez identificado, realizar la multiplicación correspondiente o bien aplicar el algoritmo ( $7 \times 7 = 49$ ).

Como se puede identificar, las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon en la solución consisten en los siguientes aspectos: dominio del sistema decimal (aplicación del algoritmo de la suma), descomposición y composición de un número, la memoria visual y la aplicación de los algoritmos de la multiplicación y potenciación.

Los cálculos realizados por los estudiantes, lograron realizarse de manera mental, sin ayuda de lápiz y papel, cumpliendo con el concepto particular de cálculo mental, logrando obtener un resultado exacto con un procedimiento eficiente.

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

El contenido programático involucrado referido a la suma, resta, multiplicación, división y potenciación de números naturales es dominado, por los alumnos, considerando que el propósito de conocimiento <<dominio del algoritmo de la suma, resta, multiplicación, división y potenciación>> ha sido logrado por parte de los estudiantes, la evidencia consiste en que la solución fue única y el resultado exacto, mismos que son los indicadores esenciales para tal afirmación. Además, la propiedad que se demanda en este planteamiento es la llamada propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

En el momento de analizar cual procedimiento es el más adecuado para obtener con mayor rapidez un resultado se está poniendo en práctica la abstracción. Analizar-sintetizar se muestra en la tercera operación con la multiplicación, al momento de decidir entre cuál de los dos métodos de solución puede seguir, dado que en el primer método se tiene que sumar nueve veces el número siete y, en el segundo método, sólo se tiene que recordar cuanto es la multiplicación de  $7 \times 7 = 49$ , una forma sintetizada de la multiplicación, aunque para ello es necesario saber la tabla de multiplicar del número 7 o 9.

La categorización se presenta cuando el alumno identifica qué tipo de operación representa cada uno de los ejercicios propuestos en el basta numérico y el tipo de algoritmo o estrategia a aplicar para su solución eficaz. Por último, conjeturar se utiliza en el momento en que los alumnos pueden adelantarse a cada uno de los resultados de las operaciones, sin antes aplicar el algoritmo.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización.

La resolución de problemas está presente cuando se busca resolver todas las operaciones en el menor tiempo posible, obteniendo resultados correctos. La flexibilidad de pensamiento se muestra en cuanto el estudiante reconoce que en cada operación, puede seguir un resultado procedimiento diferente para su solución. La reversibilidad de pensamiento se presenta en el

momento en que se analizan los resultados de cada una de las operaciones y los estudiantes son capaces de recordar qué procedimiento usaron para lograr llegar a un resultado correcto o incorrecto.

La estimación se presenta en el proceso mental que permite predecir, o generar una respuesta en cada una de las operaciones propuestas y la generalización se muestra cuando el alumno reconoce que es necesario aplicar un algoritmo en cada una de las operaciones.

#### Problema 4

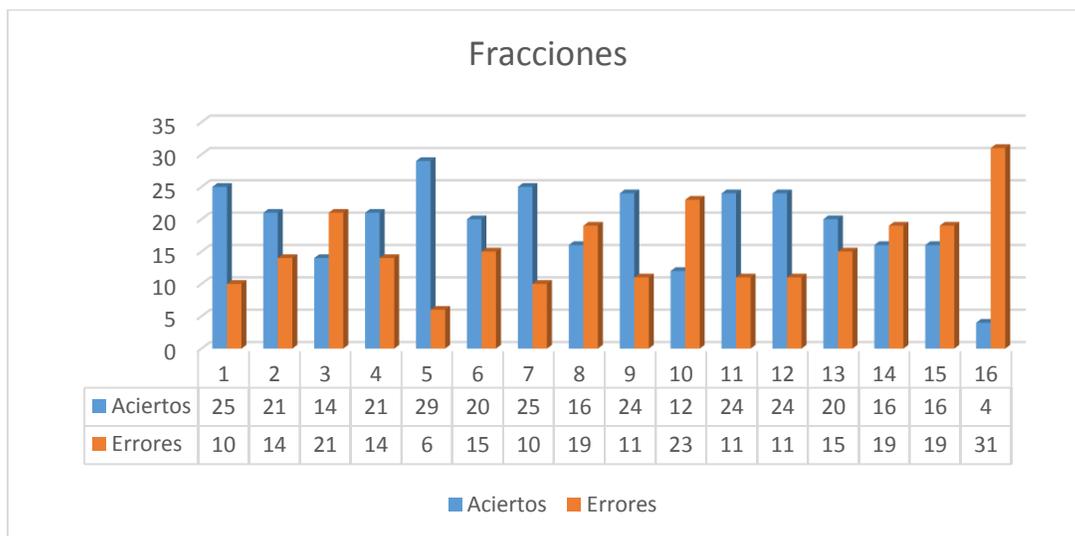
*Cálculo mental: fracciones, números decimales y porcentajes.*

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

N.P	Calcula :	Escribe como un número decimal:		Escribe como una fracción:	
1	$\frac{1}{4}$ de 32 =	$\frac{1}{4}$	0.25	0.5	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$ de 21 =	$\frac{1}{2}$		50%	
3	$\frac{4}{5}$ de 55 =	$\frac{1}{5}$		25%	
4	$\frac{5}{8}$ de 80 =	$\frac{1}{10}$		0.25	
5	$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} =$	$\frac{1}{100}$		10%	
6	$\frac{2}{7} - \frac{5}{7} =$	$\frac{3}{4}$		0.1	
7	$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{2}{5}$		20%	
8	$-\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) =$	$\frac{5}{10}$		0.2	

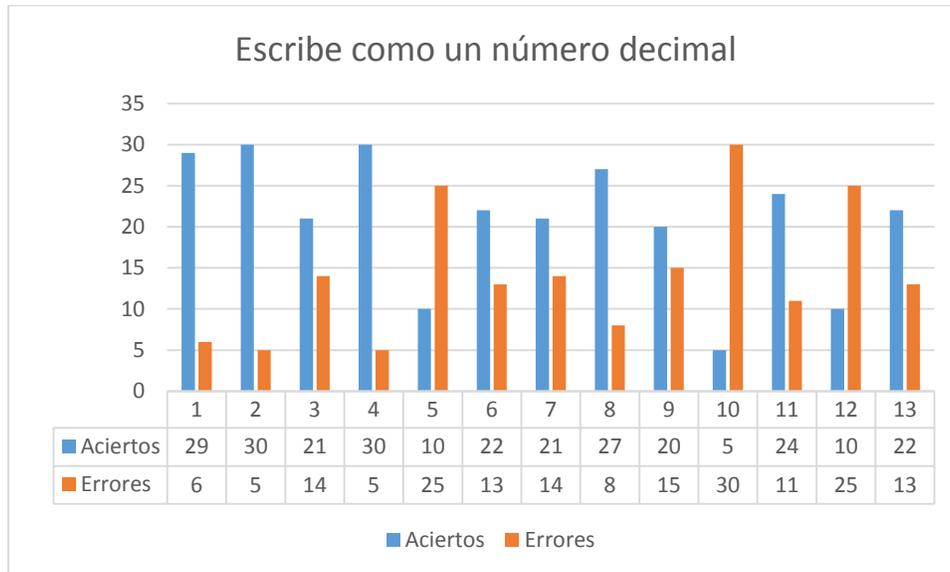
9	$1 + \frac{1}{2} =$		$\frac{20}{100}$		0.01	
10	$1 - \frac{1}{4} =$		$\frac{8}{100}$		0.00 1	
11	$\frac{2}{7} + 1 =$		$\frac{3}{5}$		0.35	
12	$1 - \frac{4}{10} =$		$\frac{6}{3}$		0.11	
13	$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} =$		$\frac{4}{5}$		0.33 ...	
14	$\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{5}{4}\right) =$					
15	$\frac{6}{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) =$					
16	$\frac{3}{11} \cdot (8) =$					
MARCADOR						

Los resultados obtenidos de la actividad anterior se muestran en las siguientes graficas:

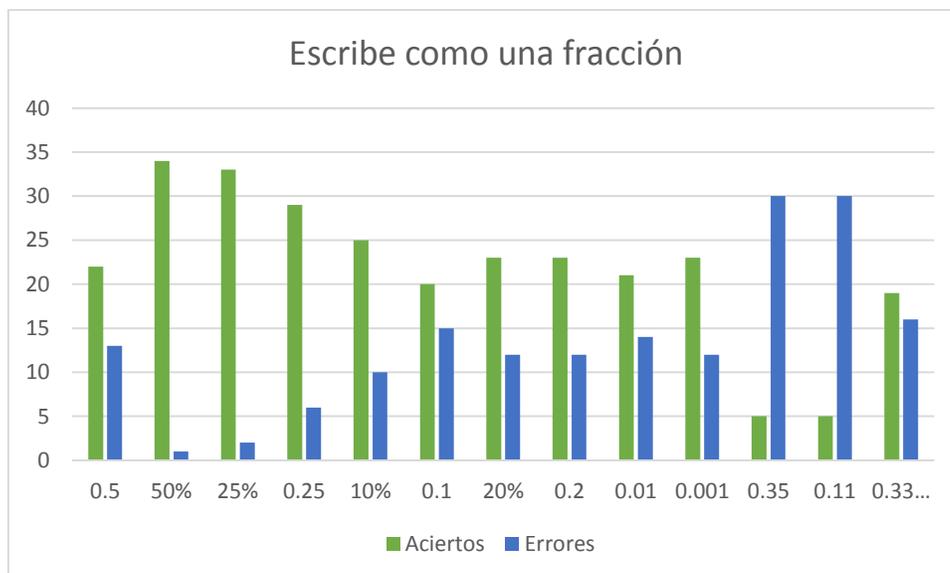


De acuerdo a los datos arrojados se detectó que los tipos de planteamientos en los que aún persisten los errores de cálculo mental son: el valor que representa una fracción en cierta

cantidad ( $\frac{4}{5}$  de 55), suma ( $-\frac{1}{4} + (-\frac{5}{4})$ ), resta ( $1 - \frac{1}{4}$ ) y multiplicación ( $\frac{3}{10} \cdot (\frac{5}{4})$ ,  $\frac{6}{15} \cdot (\frac{1}{2})$ ,  $\frac{3}{11} \cdot (8)$ ) de fracciones.



En la segunda sección correspondiente a escribir como un número decimal fracciones proporcionadas, los estudiantes tuvieron más errores en convertir a decimal las siguientes fracciones  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{8}{100}$  y  $\frac{6}{3}$ . El error se identificó principalmente al momento de ubicar los ceros antecedentes al valor del decimal.



En cuanto a la última sección correspondiente a escribir como una fracción un número decimal y un porcentaje, el error en el cálculo mental persiste en aquellos decimales que no se utilizan con frecuencia como lo son: 0.35 y 0.11.

Para el análisis de la actividad número 4, se retoman los siguientes ejercicios representativos:

N. P.	Calcula	Respuesta	Descripción
1	$\frac{1}{4}$ de 32	8	<ul style="list-style-type: none"> <li>Descomposición: el total (32), se divide en 4 partes iguales. <math display="block">32 \div 4 = 8</math></li> <li>Composición: se busca un número que multiplicado por 4 se obtenga como resultado 32. <math display="block">4 \bullet x = 32</math> <math display="block">4 \bullet 8 = 32</math></li> </ul>
2	$\frac{2}{7} + 1$	$\frac{9}{7}$ o $1 \frac{2}{7}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>El entero se convierte en séptimos, obteniendo <math>1 = \frac{7}{7}</math>. Posteriormente se suman los dos séptimos: <math display="block">\frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1 \frac{2}{7}</math></li> </ul>
3	$1 - \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se observa el valor del denominador de la fracción presente (4).</li> <li>Convertir el entero en fracción con el mismo denominador <math>1 = \frac{4}{4}</math>.</li> <li>Realizar la resta de fracciones con el mismo denominador: <math display="block">\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}</math></li> </ul>
4	$\frac{2}{5} \bullet \frac{5}{2}$	$\frac{10}{10}$ o 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicar el algoritmo correspondiente a la multiplicación de fracciones.</li> <li>Multiplicar los numeradores (2) (5) = 10.</li> <li>Multiplicar los denominadores (5) (2) = 10 <math display="block">\frac{2}{5} \bullet \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1</math></li> </ul>

5	Escribe como número decimal: $\frac{1}{5}$	0.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>El entero se divide entre el valor del denominador (5). <math>1 \div 5 = 0.2</math></li> <li>Se multiplica el valor obtenido por el numerador (0.2) <math>(1) = 0.2</math></li> </ul>
6	Escribe como una fracción: 10%	$\frac{1}{10}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se busca un número que multiplicado por 10 de como resultado 100. Este número adquirirá el valor del denominador. <math>(10) (10) = 100</math></li> </ul>

Elaboración propia. José, 2020.

- Cálculo mental*

El cálculo mental se presenta en cada uno de los cálculos realizados a nivel mental como lo son el cálculo de lo que representa la cuarta parte de 32, la suma, resta y multiplicación de fracciones, así como en la conversión de fracción a decimal y viceversa. La memoria visual juega un papel importante en esta actividad, pues es a través de ella donde los alumnos son capaces de resolver cada ejercicio, teniendo en mente, los pasos que puede seguir, las operaciones que debe resolver y el resultado obtenido.

En la primera operación, el cálculo mental se presentó cuando los alumnos encontraron cuanto representaba la cuarta parte de 32, realizando de manera mental la división de 32 entre 4 o bien, buscando un número que multiplicado por 4 diera como resultado 32, siendo este número el 8.

La segunda operación se refiere a la suma de una fracción con un entero. El cálculo mental tuvo presencia en el momento en que de manera mental se convirtió el entero en séptimos (para tener una suma de fracciones con un mismo denominador) y se sumaron las fracciones.

$$\frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$$

En la tercera operación, el cálculo mental estuvo presente cuando se convirtió en cuartos el entero (para tener una resta de fracciones con un mismo denominador) y se realizó la resta de las fracciones, obteniendo como resultado  $\frac{3}{4}$ .

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

En la siguiente operación el cálculo mental tuvo presencia al momento de recordar y aplicar el algoritmo correspondiente para la solución de una multiplicación de fracciones. La memoria visual obtiene un papel importante en el momento que el alumno recuerda el valor que adquieren los numeradores y denominadores y realiza la multiplicación de ellos para encontrar la fracción resultante.

$$\frac{2}{5} \bullet \frac{5}{2} = \frac{2 \bullet 5}{5 \bullet 2} = \frac{10}{10} = 1$$

En la quinta operación se proporciona una fracción ( $\frac{1}{5}$ ) y el alumno debe escribir cómo se representa en número decimal. El cálculo mental se mostró cuando los estudiantes realizaron el cálculo de cuanto equivalía  $\frac{1}{5}$  en número decimal, dividiendo el entero en cinco partes iguales, o bien, encontrando un número que multiplicado por 5 diera como resultado 1.

$$1 \div 5 = 0.2$$

En la última operación, dado un cierto porcentaje (o un número decimal), se debía escribir en fracción lo que equivalía. El cálculo mental se presentó en el momento en que se buscó un número que multiplicado por 10 diera como resultado 100 (que representaría el 100%) o bien, al momento de analizar que la décima parte de 100 es 10.

$$(100) \div (10) = 10$$

Del análisis anterior se puede decir que las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon en la solución de la actividad número 4, consisten en los siguientes aspectos: descomposición y composición de un número, la memoria visual y la aplicación de los algoritmos de la suma, resta y multiplicación de fracciones.

Los cálculos realizados por los estudiantes, lograron realizarse de manera mental, sin ayuda de lápiz y papel, cumpliendo con el concepto particular de cálculo mental, considerado como una “serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón, 1995, en García, 2014).

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

El contenido programático involucrado referido a la suma, resta y multiplicación de fracciones es dominado de manera parcial por los estudiantes, considerando que el propósito de conocimiento <<dominio del algoritmo de la suma, resta y multiplicación de fracciones>> ha sido logrado en menor grado, la evidencia se presenta en las gráficas con los aciertos y errores obtenidos en cada uno de los ejercicios, mismos que son los indicadores esenciales para tal afirmación. Además, la propiedad que más prevalece en los ejercicios de esta actividad es la llamada propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Las operaciones del pensamiento matemático involucradas en relación con la habilidad del cálculo mental son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar, conjeturar. La abstracción se muestra en el momento en que los alumnos extraen los datos esenciales para la solución del problema, sustituyendo en el algoritmo correspondiente los valores proporcionados. Analizar- sintetizar, se presenta cuando se comprende que el valor de un número puede adquirirse a través de varios procedimientos (composición y descomposición), o bien, en el momento en que se busca la mejor estrategia para su solución.

Categorizar estuvo presente cuando los estudiantes reconocen qué tipo de conocimientos son necesarios para llegar a la solución de cada uno de los planteamientos, por ejemplo: el tipo de operación que se debía resolver (suma, resta, multiplicación y división), las equivalencias representadas por los números decimales y fraccionarios y la conversión de un número entero a una fracción equivalente. Y conjeturar se presentó en el momento en que los alumnos son capaces de obtener algún resultado de manera inmediata sin la necesidad de operar algún algoritmo.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes de primer grado de la escuela secundaria son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización. La resolución de problemas estuvo presente cuando los alumnos buscaron obtener una respuesta a cada uno de los ejercicios propuestos en la actividad, buscando obtener el mayor número de aciertos. La flexibilidad de pensamiento se

mostró en el momento en que reconocieron que para llegar al resultado podían realizar diferentes operaciones (composición y descomposición de un número).

La reversibilidad de pensamiento se vio presente en cuanto los alumnos eran capaces de recordar el procedimiento seguido en cada uno de los ejercicios y cómo lograron obtener su respuesta, para posteriormente analizar si su resultado era correcto o erróneo y buscar otro método de solución o corregir el que aplico. La estimación se muestra en el momento en que los estudiantes hacían una aproximación al resultado, antes de operar algún algoritmo. La generalización estuvo presente cuando el alumno reconocía que era necesario la aplicación del algoritmo correspondiente para su solución, como lo es el de la suma y resta de fracciones con un mismo denominador y con la multiplicación de fracciones.

Derivado del análisis realizado en este capítulo, se puede inferir que el cálculo mental es una habilidad poco desarrollada en los estudiantes de la escuela secundaria, pero que representa un papel importante en la educación y los aprendizajes de los estudiantes, considerando que un “propósito para la educación secundaria es: utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos “ (SEP, 2018; p.6).

El cálculo mental se consideró como una “serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón, 1995, en García, 2014), representado para algunos estudiantes un grado de complejidad, dado que se carece de algunos conocimientos básicos de la aritmética, como es la conversión de fracción a número decimal y viceversa.

La aritmética “es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números y sus propiedades bajo las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (Soto, 2010, p. 6)”, en este capítulo se analizaron una serie de problemas que involucraron operaciones aritméticas. Los alumnos del primer grado de la Escuela Secundaria General “Xicoténcatl” dominan las operaciones de suma y resta de números naturales de dos dígitos en el cálculo mental, pero, siguen prevaleciendo algunas dificultades en las operaciones de multiplicación, división y en la potenciación.

En relación a las fracciones y los números decimales, los alumnos son capaces de calcular de manera mental la equivalencia de una fracción y un número decimal y viceversa, pero, sólo en números reales que son comunes, por ejemplo:  $\frac{1}{4}$ ,  $0.5$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $0.5$ . En las operaciones de suma y resta de fracciones con el mismo denominador presentan un mayor dominio en comparación a la multiplicación de fracciones, porque resulta complicado recordar el algoritmo correspondiente a la operación y sobre todo aplicarlo sin ayuda de papel y lápiz.

La propiedad de las operaciones que más prevaleció en la solución de cada uno de los planteamientos, es la conocida como propiedad conmutativa de las operaciones, considerando que es la más conocida por los estudiantes, además de que al momento de resolver cualquier problema u operación, siempre está presente. Una segunda propiedad utilizada de manera directa por los estudiantes es la llamada propiedad de la cerradura que postula que los números reales son un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de números reales da como resultado otro número real.

El cálculo mental en aritmética adquiere un papel importante, pero requiere de la implementación de actividades interesantes para los alumnos y de acuerdo a su edad mental, considerando que la práctica ayudará a su mejor desarrollo.

En la habilidad del cálculo mental se involucran operaciones del pensamiento matemático que permiten a los estudiantes tener los medios para llegar a la solución de un problema, o bien, obtener un resultado, estas operaciones del pensamiento matemático son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar, conjeturar. El pensamiento matemático en el cálculo mental cumple lo definido por Aldama (2016), donde señala que

... es una forma de pensar y actuar, cuya configuración y despliegue refleja la estructura, los métodos, procedimientos y lenguaje propios de la disciplina; esta forma de pensar sostiene, también, una faceta contextual que se muestra en la eficacia de su aplicación en los diferentes ámbitos del desempeño social, sea para resolver problemas o comprender y explicar fenómenos de diversa índole (Aldama, 2015. Memoria del Congreso...)

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, es a través del Pensamiento Matemático donde el alumno es capaz de reconocer su forma pensar y actuar y es consciente de la estructura,

los métodos, procedimientos y lenguaje propios que ha seguido para resolver un problema o explicarlo.

Para la solución de los problemas planteados los alumnos siguieron una serie de estrategias que los hicieron llegar a un resultado, siendo este erróneo o correcto. Una de las estrategias más utilizadas en el cálculo mental en aritmética, es el denominado como “ensayo y error”, porque se operaba en forma intuitiva, y mediante tanteos, logrando obtener paulatinamente el resultado correcto, llegando a una serie de pasos repetidos que es un procedimiento con pasos bien definidos desde el principio, y repetitivos, que se van acercando a la respuesta. Otra de las estrategias usadas por los estudiantes es la conocida como “pasos del algoritmo”, que se refiere a la aplicación mental del algoritmo escolarizado.

La “composición-descomposición” de un número, es otra estrategia que permite a los alumnos operar con el total de un valor, o bien, sólo con alguna de sus partes. La memoria visual es una de las estrategias más usadas porque permite tener en mente los valores o pasos seguidos al buscar llegar a la respuesta de un problema.

# CAPÍTULO III

### CAPÍTULO III. CÁLCULO MENTAL EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS SIMPLES

En el capítulo anterior se analizó el cálculo mental en la solución de problemas aritméticos, en este capítulo, se analizará el cálculo mental en la solución de ecuaciones algebraicas simples y su relación con las habilidades del pensamiento matemático. Para ello, es importante conocer el significado de la palabra álgebra, considerada como “la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los números reales a través de su abstracción en forma de polinomios y funciones” (Soto, 2010, p. 2).

En el Cálculo Mental, a manera de sugerencia, para su mejor desarrollo, Jiménez (2012) especifica que “...es necesario que el alumno analice cada caso en particular, busque la estrategia más pertinente, tome decisiones con respecto a cómo descomponer los números y qué cálculos hacer, así como valorar el resultado” (Jiménez, 2012; p. 12). Posteriormente, de manera continua, diseñar estrategias generales de cálculo mental.

Del análisis realizado se establece que, en este documento, el cálculo mental es considerado como una habilidad del pensamiento matemático que permite realizar operaciones sin ayuda exterior, sólo haciendo uso del razonamiento mental.

En la definición descrita anteriormente se explica que el cálculo mental permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos, pero, en este capítulo, el cálculo mental permitirá obtener la respuesta exacta de problemas algebraicos simples de la forma  $ax = b$ ,  $x + a = b$  y  $ax + b = c$ , considerando la serie de operaciones con los diferentes conjuntos de números, incluyendo el de los números reales, sus operaciones y propiedades.

Como parte de la habilidad del cálculo mental y, al interior de los procesos que se desarrollan, se cuentan e involucran el resto de las habilidades que son la resolución de problemas, estimación, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, generalización y, en menos medida en el campo del álgebra, la ubicación espacial.

Por otra parte, el enfoque didáctico a través del cual se desarrolla la propuesta didáctica y los contenidos programáticos, es el denominado *Resolución de Problemas*, expuesto por Santos Trigo, este investigador señala en su obra *Resolución de Problemas. Fundamentos*

*Cognitivos* (2007), que un modelo de enseñanza basado en la resolución de problemas ofrece oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos y favorece que los estudiantes desarrollen o construyan procesos asociados al Pensamiento Matemático Avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar.

El Pensamiento Matemático se seguirá concibiendo como Aldama (2015) lo señala, siendo esta una forma de pensar y actuar, que permite reflejar la estructura de los métodos, procedimientos y lenguajes propios para resolver problemas o comprender y explicar fenómenos.

Para lograr el propósito de la propuesta didáctica denominada Cálculo Mental y Habilidades del Pensamiento Matemático, se retomaron los contenidos del eje temático Número, Álgebra y Variación, que se describen a continuación:

CONTENIDOS	DESCRIPCIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.</i></li> </ul>	<p>El alumno resuelva problemas sencillos de ecuaciones algebraicas de primer grado y haga uso de la literal o incógnita como un valor desconocido.</p> <p>Implica la solución de operaciones que se puedan resolver a través de ecuaciones algebraicas de la forma <math>ax = b</math>, <math>x + a = b</math> y <math>ax + b = c</math>.</p>

Los problemas planteados a los alumnos de primer grado de educación secundaria, para su resolución, se enlistan en seguida:

1. Pensé un número, lo multipliqué por 6 y al resultado le sume 1; obtuve 73. ¿Qué número pensé?
2. Si Rosa tiene 3 años más que su hermana y sus edades suman 17, ¿qué edad tiene Rosa?

3. Basta algebraico. Se dirá en voz alta un número, los alumnos deberán sustituir este valor en la literal  $x$  y realizar las operaciones solicitadas en cada una de las casillas de la columna superior.

Número propuesto	$\frac{x + 4}{2}$	$x^2 + 3$	$\frac{x^2}{2}$	$x - 3$	$2x + 2$	Resultados correctos

### Análisis de resultados

#### Problema 1.

*Pensé un número, lo multipliqué por 6 y al resultado le sume 1; obtuve 73. ¿Qué número pensé?*

En relación al primer planteamiento (problema 1), se distinguieron, en general, dos métodos de solución al interior del grupo de estudiantes, estos métodos se presentan a continuación:

Método 1.1 “Ensayo-error”	Método 1.2 “Reversibilidad”
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Asignar un valor &lt;&lt;tanteo&gt;&gt; al número desconocido.</li> <li>- Sustituir en las operaciones descritas.</li> <li>- Operar las operaciones.</li> <li>- Comprobar los resultados.</li> <li>- Analizar si el número elegido es el correcto, si no es así, cambiar de número.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Considerar el último valor dado en el planteamiento (total).</li> <li>- Realizar la operación inversa (resta) a la descrita al final del planteamiento (suma).</li> <li>- Realizar la operación inversa (división) a la descrita al final del planteamiento (multiplicación).</li> <li>- Obtener el valor desconocido.</li> </ul>

	- Verificar que el valor encontrado sea correcto.
<b>Descripción</b> Se opera en forma intuitiva, y mediante tanteos se logra obtener paulatinamente el resultado correcto.  Este método es el más usado por los estudiantes, porque sólo se juega con los números.	<b>Descripción</b> La reversibilidad se considera a los procesos inversos o reversibles. Se opera de manera inversa a las operaciones planteadas, hasta llegar al número inicial.

Elaboración propia. José, 2020.

### **Análisis del Método 1.1**

- *Cálculo mental*

En este método de solución, el cálculo mental se basó prioritariamente en la memoria visual, que consiste en “tener en mente” cada uno de los números elegidos como valor desconocido, así como la progresión de la aplicación del algoritmo correspondiente.

Para su mejor análisis, las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon el método 1.1 de solución se describen en los siguientes MOMENTOS:

MOMENTO 1:

Primer número propuesto: 11.

Utilizarlo en la primera operación: multiplicar por 6.

$$(11)(6) = 66$$

MOMENTO 2:

Sumar 1 al resultado obtenido.

$$66 + 1 = 67$$

MOMENTO 3:

Comparar si el resultado obtenido es igual al dado en el planteamiento (73).

$$67 \neq 73$$

MOMENTO 4:

Elegir otro número: 12.

Utilizarlo en la primera operación: multiplicar por 6.

$$(12)(6) = 72$$

MOMENTO 5:

Sumar 1 al resultado obtenido.

$$72 + 1 = 73$$

MOMENTO 6:

Comparar si el resultado obtenido es igual al dado en el planteamiento (73).

$$73 = 73$$

Problema resuelto.

El concepto de cálculo mental considerado en este ensayo se cumple en el sentido en que los cálculos se logran realizar a nivel mental sin ayuda de lápiz y papel y con el grado de abstracción que le demanda la resolución del problema. Las propiedades de las operaciones presentes en la solución de este problema son la propiedad de la cerradura y conmutativa, es decir el orden en que se realice una operación no alterará el resultado.

$$(12)(6) = 72$$

$$72 + 1 = 73$$

$$(6)(12) = 72$$

$$72 + 1 = 73$$

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Considerando que en el cálculo mental se realizan una serie de procedimientos a nivel mental, durante ese proceso se llevan a cabo operaciones del Pensamiento Matemático. La abstracción se ve presente en el momento en que los alumnos son capaces de elegir un número << al azar >>, que cumpla con las operaciones descritas en el planteamiento. Analizar - sintetizar se muestra cuando se hace un estudio detallado del problema y de cada uno de los elementos que se aportan en el planteamiento, como lo son: el valor de los números, las operaciones (suma y multiplicación) y el resultado o total (73).

Categorizar se relaciona con el análisis, porque es a través de ella donde se reconoce cuáles son los conocimientos que se deben poner en práctica para su solución, siendo estos los siguientes: el tipo de operaciones (suma y multiplicación) y sus opuestos (resta y división), las propiedades de las operaciones, hallar un valor desconocido (incógnita). Y conjeturar, ayuda a deducir cual número no podría adquirir el valor de la incógnita y cual se acercaría más al total.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Las habilidades del pensamiento utilizadas por los estudiantes de primer grado de la Escuela Secundaria en este primer método de solución son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación y generalización. En el momento en que los estudiantes reconocen que deben obtener el valor de un número desconocido (incógnita), a través de un método o estrategia que ellos mismos deben diseñar, están dándole solución a un problema. La flexibilidad de pensamiento permite a los alumnos reconocer que existen diferentes procedimientos que pueden usar para llegar a la solución del problema y que pueden hacer uso del que le parezca más apropiado.

La reversibilidad de pensamiento, ayuda a recordar o tener en mente (memoria visual) cuáles son los números que ya se han usado como valor de la incógnita para no volver a hacer uso de ellos, de la misma manera permite recordar el procedimiento que ha seguido para comprobar si el número elegido cumple con las operaciones descritas en el planteamiento. La estimación se presenta en el momento en que se hace un análisis de cual número se acerca más al resultado (73) una vez ejecutada las operaciones definidas en el problema. Por último,

la generalización se muestra cuando el alumno reconoce que en el planteamiento hay un valor desconocido llamado “incógnita”.

### **Análisis del Método 1.2**

- *Cálculo mental*

El cálculo mental se presentó en el momento en que los estudiantes traían a su mente (memoria visual) las operaciones y los números que debían operar, principalmente en definir cuáles serían las operaciones opuestas o inversas necesarias para obtener el valor del número desconocido, es decir, al poner en práctica la habilidad de reversibilidad del pensamiento.

Las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon el método 1.2 de solución se describen en los siguientes MOMENTOS:

MOMENTO 1:

Definir el valor correspondiente al total: 73.

MOMENTO 2:

Definir la operación opuesta a la última operación descrita.

Suma → Resta

Sume 1 → Resta 1

MOMENTO 3:

Aplicar la operación opuesta al total.

*A 73, restarle 1*

$$73 - 1 = 72$$

MOMENTO 4:

Definir la operación opuesta a la primera operación mencionada.

*Multiplicación → División*

*Multiplicar por 6 → Dividir entre 6*

MOMENTO 5:

Aplicar la operación propuesta al resultado obtenido anteriormente.

*A 72, dividirlo entre 6*

$$72 \div 6 = 12$$

MOMENTO 6:

Comprobar el número encontrado con las operaciones originales.

*Pensé un número: 12*

*Lo multipliqué por 6:  $(12)(6) = 72$*

*Y al resultado le sume 1:  $72 + 1 = 73$*

*Obtuve 73. ¿Qué número pensé?  $R= 12$*

Planteamiento resuelto.

El concepto considerado en este ensayo, se cumple en el momento en que los estudiantes realizaron de manera mental las operaciones inversas correspondientes para hallar el valor del número desconocido, sin hacer uso de algún apoyo del exterior (lápiz y papel). La propiedad de las operaciones presente, es la denominada propiedad de la cerradura, debido a que los números que se operan pertenecen a los números reales, el resultado será también un número real y la segunda propiedad es la conmutativa, porque el orden de los sumandos y factores no alteran el resultado o producto.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

En el cálculo mental se llevan a cabo operaciones del Pensamiento Matemático, estas son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar y conjeturar. En un principio, los alumnos van analizando y sintetizando la información descrita en el planteamiento, deduciendo el procedimiento más conveniente de seguir (abstracción/ conjeturar), de manera que se llegue

a la solución correcta del problema. Durante este proceso los estudiantes realizan de manera mental las operaciones inversas a las mencionadas, eligiendo el tipo de operación que van a ocupar para llegar a la solución del planteamiento (categorizar).

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Al finalizar el planteamiento se hace una pregunta que detona el problema “¿*Qué número pensé?*”, los alumnos tienen que encontrar el valor de un número desconocido que se denominará como incógnita (generalización) y esto lo realiza a través de varios procedimientos (flexibilidad de pensamiento) que le permitirán tener una aproximación (estimación) o la respuesta al valor buscado. La reversibilidad de pensamiento se presenta al transcurso del proceso de solución del problema, recordando paso a paso la operación que se debe aplicar, es decir, teniendo en mente la operación inversa a las descritas en el planteamiento.

*Suma → Resta*

*Multipliación → División*

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

En los dos métodos de solución analizados anteriormente, el contenido programático involucrado referido a, la resolución de problemas sencillos de ecuaciones algebraicas de primer grado es dominado por los estudiantes, considerando que el propósito de conocimiento <<que el alumno haga uso de la literal o incógnita como un valor desconocido>> ha sido logrado, la evidencia consiste en que la solución fue única y el resultado exacto.

## **Problema 2**

*Si Rosa tiene 3 años más que su hermana y sus edades suman 17, ¿qué edad tiene Rosa?*

En este segundo planteamiento se encontraron, en general, dos métodos de solución que se presentan a continuación:

<p style="text-align: center;"><b>Método 2.1</b></p> <p style="text-align: center;"><b>“Pasos repetidos”</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Método 2.2</b></p> <p style="text-align: center;"><b>“Despeje”</b></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinar como “x” la edad de la hermana de Rosa.</li> <li>- Buscar un número que será denominado al valor de la “incógnita”.</li> <li>- Usar el número elegido para operar como una posible solución del planteamiento.</li> <li>- Observar si el número se aproxima o cumple con lo descrito en el problema.</li> <li>- Elegir otro número que se acerque más al resultado, las veces que sean necesarias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinar como “x” (valor desconocido) la edad de la hermana de Rosa.</li> <li>- Establecer la edad de Rosa como “x + 3”.</li> <li>- Establecer una igualdad con los datos obtenidos. <ul style="list-style-type: none"> <li><math>x + x + 3 = 17</math></li> </ul> </li> <li>- Agrupar términos semejantes. <ul style="list-style-type: none"> <li><math>2x + 3 = 17</math></li> </ul> </li> <li>- Despejar a “x”.</li> <li>- Restarle 3 en ambos lados de la igualdad. <ul style="list-style-type: none"> <li><math>2x + 3 - 3 = 17 - 3</math></li> <li><math>2x = 14</math></li> </ul> </li> <li>- Dividir ambos miembros entre 2. <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}</math></li> <li><math>x = 7</math></li> </ul> </li> <li>- Determinar la edad de Rosa. <ul style="list-style-type: none"> <li><math>x + 3 = 7 + 3 = 10</math></li> </ul> </li> </ul>

Descripción	Descripción
<p>Es un procedimiento con pasos bien definidos desde el principio, y repetitivos, que se van acercando a la respuesta.</p> <p>Este método es similar al método de ensayo y error.</p>	<p>La reversibilidad se considera a los procesos inversos o reversibles. Se opera de manera inversa a las operaciones planteadas, hasta llegar al número inicial.</p>

Elaboración propia. José, 2020.

### Análisis del Método 2.1

- *Cálculo mental*

El cálculo mental se basó principalmente en la resolución de las operaciones de manera mental, es decir sin uso del lápiz y papel, así como de ninguna otra ayuda del exterior, como lo señala el concepto del cálculo mental considerado en este ensayo. La memoria visual igualmente estuvo presente en el proceso de cálculo mental, en el momento en que los alumnos, recordaban cada uno de los números ya elegidos como valor desconocido, así como el proceso de la aplicación de cada una de las operaciones.

En este primer método denominado “pasos repetidos”, los estudiantes comienzan por reconocer que hay un valor que necesitan buscar para dar solución al problema. En el planteamiento se hace una pregunta *¿qué edad tiene Rosa?*, aunque la edad que el problema requiere es el de Rosa, el primer valor desconocido es la edad de la hermana de Rosa, por lo que se empieza por determinar un valor a esa edad, por ejemplo, el 10, posteriormente se menciona que *Rosa tiene 3 años más que su hermana*, es decir:

Edad de la hermana de Rosa: 10

Edad de Rosa: 3 años más que la edad de su hermana

$$10 + 3 = 13$$

Se continúa sumando las edades obtenidas de manera que se compruebe que *sus edades suman 17*.

$$\text{edad de la hermana de Rosa} + \text{edad de rosa} = 17$$

$$10 + 13 = 23$$

Los resultados no coinciden, por lo que se debe elegir otro número, repitiendo cada uno de los pasos anteriores hasta encontrar el valor correcto.

Edad de la hermana de Rosa: 8

Edad de Rosa: 3 años más que la edad de su hermana

$$8 + 3 = 11$$

Se suman las edades obtenidas de manera que se compruebe que *sus edades suman 17*.

$$\text{edad de la hermana de Rosa} + \text{edad de rosa} = 17$$

$$8 + 11 = 19$$

El número elegido no cumple con lo descrito en el planteamiento, se continúa buscando otro.

Edad de la hermana de Rosa: 7

Edad de Rosa: 3 años más que la edad de su hermana

$$7 + 3 = 10$$

Se suman las edades obtenidas de manera que se compruebe que *sus edades suman 17*.

$$\text{edad de la hermana de Rosa} + \text{edad de rosa} = 17$$

$$10 + 7 = 17$$

El resultado obtenido es el mismo, la edad que la hermana de Rosa tiene es de 7 años y la de Rosa es de 10 años, el problema está resuelto.

La propiedad de las operaciones presente en la solución de este problema es la llamada propiedad conmutativa, porque el orden de los sumandos no alteraba el resultado, es decir,

los estudiantes podían sumar primero  $10 + 7 = 17$  o  $7 + 10 = 17$  y el resultado era el mismo.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

En la resolución del problema, a través del cálculo mental, los estudiantes hicieron uso de las operaciones del Pensamiento Matemático que son abstraer, analizar- sintetizar, categorizar y conjeturar. Los alumnos eligieron un número que sería sustituido en las operaciones que se mencionaban en el planteamiento (abstraer), haciendo un análisis de cada uno de los resultados obtenidos al operar (analizar- sintetizar), para posteriormente inferir qué número podría acercarse o ser el resultado correcto (conjeturar). La categorización se muestra al transcurso de la resolución del problema, en la elección de las operaciones a utilizar, así como en la representación de cada una de las edades de los personajes involucrados.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

El problema busca ser resuelto a través de una pregunta, *¿qué edad tiene Rosa?*, es a partir de ahí, que los alumnos buscan idear una estrategia o método de solución y elegir el más conveniente que le permita obtener un resultado correcto (flexibilidad de pensamiento). Aplicando el primer número elegido en la estrategia escogida, los estudiantes son capaces de hacer una estimación de cuál número podría ser la solución al problema y, por medio de un análisis del proceso seguido, se puede reconocer de dónde surgen algunos errores que se lleguen a presentar.

La generalización se mostró en el momento en que se determinó que había un valor desconocido que se requería encontrar, llamado incógnita, así como al reconocer el tipo de operaciones que se resolverían y la propiedad de las operaciones presente.

## **Análisis del Método 2.2**

- *Cálculo mental*

El cálculo mental se presentó en el momento en que los alumnos utilizaron el despeje para encontrar el valor de un número desconocido, del mismo modo se mostró cuando se dedujeron cada una de las ecuaciones descritas en el problema. Durante todo este proceso, la

memoria visual jugó un papel importante permitiendo a los estudiantes recordar cada uno de los pasos a seguir para llegar a la solución del problema a través del despeje.

Este método de solución mostrado por los estudiantes se basó en los siguientes momentos:

MOMENTO 1:

Pasar del lenguaje común, al lenguaje algebraico.

Si Rosa tiene 3 años más que su hermana

*Edad de la hermana de Rosa:  $x$*

*Edad de Rosa:  $x + 3$*

MOMENTO 2:

Establecer una igualdad con los datos obtenidos.

Sus edades suman 17

$$x + x + 3 = 17$$

MOMENTO 3:

Agrupar términos semejantes.

$$2x + 3 = 17$$

MOMENTO 4:

Despejar a "x". Restarle 3 en ambos lados de la igualdad.

$$2x + 3 - 3 = 17 - 3$$

$$2x = 14$$

MOMENTO 5:

Dividir ambos miembros entre 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

MOMENTO 6:

Determinar la edad de Rosa.

$$x + 3 = 7 + 3 = 10$$

Planteamiento resuelto

Este método de solución presentado por los alumnos cumple con el concepto mencionado en apartados anteriores, porque los cálculos se realizaron a nivel mental, con el nivel de abstracción que demanda, sin ayuda de papel y lápiz y la propiedad de las operaciones que predominó es la propiedad conmutativa.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

En la resolución de este problema a través del cálculo mental se llevan a cabo operaciones del Pensamiento Matemático que son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar y conjeturar. Los estudiantes comienzan por analizar y sintetizar la información proporcionada en el planteamiento, de manera que se elijan los datos que representaran la edad de cada una de las personas mencionadas y así lograr dar solución al problema. Al transcurso de este proceso los alumnos van elaborando conjeturas sobre los pasos a seguir, así como una categorización de la expresión algebraica que representaría a cada una de las edades de Rosa y su hermana.

Si Rosa tiene 3 años más que su hermana

*Edad de la hermana de Rosa:  $x$*

*Edad de Rosa:  $x + 3$*

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

Los alumnos de primer grado de la Escuela Secundaria en este segundo método, utilizaron una serie de habilidades del pensamiento que son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación y generalización.

La resolución de problemas se presenta desde el momento en que se idea una estrategia y se aplica (flexibilidad de pensamiento), durante este proceso se lleva a cabo una estimación del posible resultado, así como la generalización de conceptos involucrados, como lo son: incógnita, ecuación, igualdad, propiedad de las operaciones y pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico (reversibilidad de pensamiento).

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

En los dos métodos de solución analizados en el segundo problema, el contenido programático involucrado referido a la resolución de problemas sencillos de ecuaciones algebraicas de primer grado, es dominado por los estudiantes, considerando que el propósito de conocimiento <<que el alumno haga uso de la literal o incógnita como un valor desconocido>> ha sido logrado.

### Problema 3

*Basta algebraico. Se dirá en voz alta un número, los alumnos deberán sustituir este valor en la literal  $x$  y realizar las operaciones solicitadas en cada una de las casillas de la columna superior.*

<i>Número propuesto (<math>x</math>)</i>	$\frac{x + 4}{2}$	$x^2 + 3$	$\frac{x^2}{2}$	$x - 3$	$2x + 2$	<i>Resultados correctos</i>
3						
8						

Respuestas correctas: ANEXO 4

3: 3, 5, 12, 4.5, 0, 8

8: 6, 67, 32, 5, 18

Las respuestas dadas por los alumnos de primer grado de la escuela secundaria fueron únicas, lo que significa que no tuvieron alguna dificultad u obstáculo para su solución a nivel mental.

Las formas de operar cada una de las operaciones expuestas por los estudiantes se muestran a continuación:

$$x = 3$$

Operación	Descripción
1. $\frac{x + 4}{2}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sustituir el valor asignado en la literal <math>x</math>.  <math display="block">\frac{x + 4}{2} \rightarrow \frac{3 + 4}{2}</math> </li> <li>• Resolver las operaciones.  <math display="block">\frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5</math> </li> </ul>
2. $x^2 + 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sustituir el valor asignado en la literal <math>x</math>.  <math display="block">x^2 + 3 \rightarrow 3^2 + 3</math> </li> <li>• Identificar el valor del exponente para saber cuántas veces se tiene que multiplicar el 3 por sí mismo.</li> <li>• Realizar la multiplicación correspondiente:  <math display="block">x^2 = 3 * 3 = 9</math> </li> <li>• Colocar el valor encontrado de <math>x^2</math>.  <math display="block">3^2 + 3 = 9 + 3</math> </li> <li>• Resolver la operación.  <math display="block">9 + 3 = 12</math> </li> </ul>
3. $\frac{x^2}{2}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sustituir el valor asignado en la literal <math>x</math>.  <math display="block">\frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{3^2}{2}</math> </li> <li>• Identificar el valor del exponente para saber cuántas veces se tiene que multiplicar el 3 por sí mismo.</li> <li>• Realizar la multiplicación correspondiente:  <math display="block">x^2 = 3 * 3 = 9</math> </li> <li>• Colocar el valor encontrado de <math>x^2</math> y resolver la operación.</li> </ul>

	$\frac{3^2}{2} \rightarrow \frac{9}{2} = 4.5$
4. $x - 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sustituir el valor asignado en la literal <math>x</math>. <math display="block">x - 3 \rightarrow 3 - 3</math></li> <li>Resolver la operación. <math display="block">3 - 3 = 0</math></li> </ul>
5. $2x + 2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sustituir el valor asignado en la literal <math>x</math>. <math display="block">2x + 2 \rightarrow 2(3) + 2</math></li> <li>Resolver la multiplicación presente. <math display="block">2(3) = 6</math></li> <li>Sustituir el valor encontrado en la operación inicial y resolverla. <math display="block">2(3) + 2 \rightarrow 6 + 2 = 8</math></li> </ul>

Elaboración propia. José, 2020.

### Análisis del problema

La actividad consiste en ejecutar una serie de operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación), sustituyendo un valor definido en la literal  $x$  en el menor tiempo posible, buscando obtener el mayor número de aciertos.

- Cálculo mental*

El cálculo mental se mostró principalmente en la sustitución del valor dado en la literal  $x$  de cada una de las expresiones algebraicas mostradas y en la resolución de la operación involucrada. La memoria visual influye de manera significativa en el desarrollo del cálculo mental en esta actividad, porque es por medio de ella que los alumnos pueden operar los algoritmos correspondientes en cada una de las operaciones y lograr llegar al resultado correcto

En la primera expresión algebraica, el cálculo mental tuvo presencia en momento en que los alumnos sustituyeron de manera mental el valor dado en la literal.

$$\frac{x + 4}{2} \rightarrow \frac{3 + 4}{2}$$

Para, posteriormente operar de manera mental el algoritmo correspondiente a la suma ( $3 + 4 = 7$ ) y división de  $\left(\frac{7}{2} = 3.5\right)$ .

En la segunda expresión algebraica ( $x^2 + 3$ ), el cálculo mental se presenta cuando se trae a la mente (recordar), cómo se eleva al cuadrado un número y operar el algoritmo. En esta operación, es importante identificar el exponente (2) al que esta elevado la base (3) para así, tener presente cuantas veces se va a multiplicar por sí mismo (la base). Una vez identificado, realizar la multiplicación correspondiente o bien, aplicar el algoritmo ( $3 * 3 = 9$ ) y al resultado obtenido (9) se le suman tres unidades, obteniendo como resultado final 12.

La tercera expresión algebraica  $\left(\frac{x^2}{2}\right)$  se refiere a una potenciación y división de números naturales. El cálculo mental se presentó en el momento en que el estudiante realiza de manera mental la multiplicación de  $3 * 3 = 9$ , o bien, al recordar el algoritmo correspondiente a la potenciación de números enteros, posteriormente el resultado, se divide entre dos unidades  $\left(\frac{9}{2}\right)$ , obteniendo como resultado final 4.5.

En la cuarta expresión algebraica (resta de números naturales), el cálculo mental se presentó en la sustitución del valor dado en la literal ( $x - 3 \rightarrow 3 - 3$ ) y en la aplicación del algoritmo correspondiente a la resta de números naturales. Se realiza la resta  $3 - 3$  y da como resultado 0.

Y en la última expresión algebraica ( $2x + 2$ ), el cálculo mental estuvo presente en la sustitución de número 3 en la literal ( $2x + 2 \rightarrow 2 * 3 + 2$ ) para, posteriormente, aplicar el algoritmo correspondiente a la multiplicación de números naturales, multiplicando  $2 * 3$  o  $3 * 2$  (considerando la propiedad conmutativa de las operaciones) se obtiene un resultado de 6 unidades. Por último, se suman las dos unidades expuestas en la expresión algebraica.

$$2(3) + 2 \rightarrow 6 + 2 = 8$$

De acuerdo al análisis anterior, las estrategias diseñadas por los alumnos que emplearon en la solución consiste en los siguientes aspectos: dominio del sistema decimal (aplicación del

algoritmo de la suma y resta), la memoria visual y la aplicación de los algoritmos de la multiplicación, división y potenciación.

En relación al concepto de cálculo mental considerado en este ensayo, los alumnos cumplen con realizar las operaciones a nivel mental, con el nivel de abstracción que cada expresión algebraica demanda, logrando obtener un resultado exacto con un procedimiento eficiente. Las propiedades de las operaciones que más predominaron son las denominadas como propiedad conmutativa y la propiedad de la cerradura.

- *Cálculo mental y Operaciones mentales*

Las operaciones del pensamiento matemático permiten a los alumnos llegar al resultado de manera eficaz a través del cálculo mental, estas operaciones son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar, conjeturar, cada una de ellas se presentan al transcurso de la resolución de las expresiones algebraicas. Analizar y sintetizar se presenta al principio, cuando los estudiantes identifican el valor asignado a la literal de las expresiones algebraicas (abstraer) y este lo sustituyen en cada una de ellas para su solución, es decir, para la aplicación del algoritmo correspondiente (categorizar). Conjeturar, se realiza al principio de cada resolución de las expresiones algebraicas, haciendo de manera rápida una aproximación al resultado probable, corroborándolo con la aplicación del algoritmo que la operación representa.

- *Cálculo mental-habilidades del pensamiento*

En el cálculo mental se involucran habilidades del pensamiento que son: resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización.

La resolución de problemas está presente cuando se busca resolver todas las operaciones en el menor tiempo posible, obteniendo resultados correctos. Los alumnos deben resolver cada una de las operaciones con procedimientos diferentes (flexibilidad de pensamiento) y es a través de la reversibilidad de pensamiento que se analizan los resultados de cada una de las operaciones y los estudiantes son capaces de recordar qué procedimiento usaron. La estimación permite predecir, o generar una respuesta en cada una de las operaciones propuestas y la generalización se muestra cuando el alumno reconoce que es necesario aplicar

un algoritmo en cada una de las operaciones y que en la actividad se está interactuando con expresiones algebraicas de primer y segundo grado.

- *Logro de contenidos* (aprendizajes esperados).

El contenido programático involucrado referido a la resolución de problemas sencillos de ecuaciones algebraicas de primer grado es dominado, por los alumnos, considerando que el propósito de conocimiento <<que el alumno haga uso de la literal o incógnita como un valor desconocido>> ha sido logrado por parte de los estudiantes, la evidencia consiste en que la solución fue única y el resultado exacto, mismos que son los indicadores esenciales para tal afirmación.

El cálculo mental en álgebra hay un nivel de complejidad mayor a comparación del cálculo mental en aritmética, dado que hay valores que son desconocidos para los estudiantes, además de que posee un lenguaje que necesita ser interpretado para su comprensión.

Como la solución de cada planteamiento debe ser obtenida a través del cálculo mental, es decir, a través de una serie de procedimientos mentales sin la ayuda de papel ni lápiz, resulta ser difícil llegar a recordar los datos a operar, así como el proceso a seguir, pero representa un reto que los alumnos son capaces de asumir.

El álgebra en el cálculo mental requiere del dominio de la aritmética, porque en ella se incluye una combinación de operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) que requieren ser resueltas para llegar a obtener la solución correcta. Dentro del álgebra también se consideran las propiedades de las operaciones, las que más predominaron son las siguientes: propiedad de la cerradura y la propiedad conmutativa.

La propiedad de la cerradura, está presente porque, las operaciones (suma y multiplicación) se realizan con números reales y el resultado que se obtendrá, también estará expresado en números reales. La otra propiedad de las operaciones que se usa, es la propiedad conmutativa, puesto que el orden de los sumando o factores no altera el resultado o producto, es decir el orden en que se realice una operación no alterará el resultado.

Para llegar a la resolución de cada uno de los problemas algebraicos planteados, los estudiantes hicieron uso de las habilidades del pensamiento matemático (resolución de

problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización), que facilitaron llegar al resultado de manera eficaz.

Los alumnos de primer grado de la escuela secundaria hacen uso de una serie de estrategias para dar solución a ecuaciones algebraicas simples, que son: la reversibilidad (aplicar la operación opuesta o inversa e iniciar resolviendo la última operación a la primera), el ensayo y error (operar en forma intuitiva), pasos repetidos (procedimiento con pasos bien definidos desde el principio, y repetitivos, que se van acercando a la respuesta) y el despeje (obtener el valor de una incógnita).

## CONCLUSIONES

La metodología que se utiliza en este ensayo para promover la comprensión en matemáticas es la resolución de problemas a través del cálculo mental y las habilidades del pensamiento matemático, específicamente en aritmética y álgebra.

El proceso de investigación- intervención aporta, a nivel personal, los elementos necesarios para tomar decisiones en el aula de clase, con base en fundamentos recabados en la indagación de alguna problemática detectada, me permitirá actuar de manera apropiada y disminuir o derogar el problema.

Este ensayo aporta a la didáctica de las matemáticas una oportunidad de considerar el cálculo mental como una habilidad que permita desarrollar el pensamiento matemático de una forma eficaz, así como de reforzar la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

Del mismo modo, aporta a los maestros en servicio el conocimiento de la aplicabilidad del cálculo mental en alumnos de primer grado y algunas de las estrategias que los alumnos utilizan para dar solución de manera mental a problemas que involucran conocimientos aritméticos y algebraicos. A los docentes en formación, permite sugerirles algunos problemas que se pueden considerar en la planeación de una clase, adecuándolos al aprendizaje esperado que requieran.

Haciendo un análisis de las definiciones recuperadas de distintos autores, se establece que, en este documento, el cálculo mental es una *habilidad del pensamiento matemático que permite realizar operaciones sin ayuda exterior, sólo haciendo uso del razonamiento mental.*

Los alumnos del primer grado de la Escuela Secundaria General “Xicoténcatl” dominan las operaciones de suma y resta de números naturales de dos dígitos en el cálculo mental, pero, siguen prevaleciendo algunas dificultades en las operaciones de multiplicación, división y en la potenciación. En las operaciones de suma y resta de fracciones con el mismo denominador presentan un mayor dominio en comparación a la multiplicación de fracciones, porque resulta complicado recordar el algoritmo correspondiente a la operación y sobre todo aplicarlo sin ayuda de papel y lápiz.

La propiedad de las operaciones que más prevaleció en la solución de cada uno de los planteamientos, es la conocida como propiedad conmutativa de las operaciones, puesto que el orden de los sumando o factores no altera el resultado o producto, es decir el orden en el que se realice una operación no alterará el resultado. Esta propiedad es la más conocida por los estudiantes, además de que al momento de resolver cualquier problema u operación, siempre está presente. Una segunda propiedad utilizada de manera directa por los estudiantes es la llamada propiedad de la cerradura.

En la habilidad del cálculo mental se involucran operaciones del pensamiento matemático que permiten a los estudiantes tener los medios para llegar a la solución de un problema, o bien, obtener un resultado, estas operaciones del pensamiento matemático son: abstraer, analizar- sintetizar, categorizar, conjeturar. Es a través del Pensamiento Matemático donde el alumno es capaz de reconocer su forma pensar y actuar y es consciente de la estructura, los métodos, procedimientos y lenguaje propios que ha seguido para resolver un problema o explicarlo.

El cálculo mental en álgebra hay un nivel de complejidad mayor a comparación del cálculo mental en aritmética, dado que hay valores que son desconocidos para los estudiantes, además de que posee un lenguaje que necesita ser interpretado para su comprensión.

El álgebra en el cálculo mental requiere del dominio de la aritmética, porque en ella se incluye una combinación de operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) que requieren ser resueltas para llegar a obtener la solución correcta.

Para llegar a la resolución de cada uno de los problemas aritméticos y algebraicos planteados, los estudiantes hicieron uso de las habilidades del pensamiento matemático (resolución de problemas, flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento, estimación, generalización), que facilitaron llegar al resultado de manera eficaz.

Una de las estrategias más utilizadas en el cálculo mental en aritmética, es el denominado como “ensayo y error”, porque se operaba en forma intuitiva, y mediante tanteos, logrando obtener paulatinamente el resultado correcto. Otra de las estrategias usadas por los estudiantes es la conocida como “pasos del algoritmo”, que se refiere a la aplicación mental del algoritmo escolarizado. La “composición-descomposición” de un número, es otra

estrategia que permite a los alumnos operar con el total de un valor, o bien, sólo con alguna de sus partes. La memoria visual es una de las estrategias más usadas porque permite “tener en mente los valores o pasos seguidos al buscar llegar a la respuesta de un problema.

Las estrategias para dar solución a ecuaciones algebraicas simples son: la reversibilidad (aplicar la operación opuesta o inversa e iniciar resolviendo la última operación a la primera), el ensayo y error (operar en forma intuitiva), pasos repetidos (procedimiento con pasos bien definidos desde el principio, y repetitivos, que se van acercando a la respuesta) y el despeje (obtener el valor de una incógnita).

Durante la aplicación de la propuesta, se presentó el desafío de lograr captar y mantener el interés de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas, posterior a ello, el reto consistió en capturar la información proporcionada por los estudiantes en cada una de las estrategias usadas, porque al resolverse los problemas de manera mental, es difícil lograr registrar paso a paso el método seguido. Uno logro presentado fue que los alumnos alcanzaron resolver de manera mental cada uno de los problemas aritméticos, incluso los algebraicos, considerándolos como un reto al buscar contestarlos de manera rápida y correcta.

No obstante, aunque en cada problema planteado exista una estrategia definida o escolarizada, es importante propiciar el cálculo reflexivo o pensado en el que cada vez se utiliza distintos procedimientos, tratando de relacionar los cálculos, números y operaciones, para ello hay que saber seleccionar las estrategias más adecuadas.

## FUENTES DE CONSULTA

- Aldama E. (2015). Memoria del V Congreso de Prospectiva en Educación, Innovación, Gestión y Competitividad. Pto. Vallarta, Jal. México
- Jiménez J. (2012). Estrategias de Cálculo Mental. IES Alhama de Corella
- José S. (2020). Cálculo mental y habilidades del pensamiento. México
- Josueh R. (2001). Matemática y educación básica. Cálculo mental. Historia, métodos y sugerencias para su enseñanza (Primera parte)
- López G. (2009). Habilidades matemáticas. Matemática y educación básica 3. México: Ángeles.
- Ortiz, M., y Ortega del Rincón, T. (2009). Cálculo mental. Primer ciclo de educación primaria. Badajoz, España.
- Ortiz, M. (2013). Cálculo mental en el aula en el tercer ciclo de educación primaria. Alcalá, España: CCS.
- Piaget J. (1968). Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Guadalupe.
- Santos Trigo, Luz Manuel. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México, Trillas.
- SEP (2017) Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Primera edición. México: Secretaría de Educación Básica.

SEP. (2018). *Aprendizajes Clave. Guía para el maestro*. México: Secretaría de Educación Básica.

SEP (2018). *Guía para el docente. Matemáticas. Secundaria. Primer grado*. Ciudad de México: Castillo

SEP (2018). *Manual exploración de habilidades básicas en lectura, Producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela*. Ciudad de México. Trillas.

Simón Mochón y Josueth Vázquez Román. Artículo (1995). *Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza*.

Soto E. (2010). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Monterrey, N. L. México.

## ANEXOS

### Anexo 1

En la figura, coloca en cada círculo uno de los siguientes dígitos; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de manera que la suma horizontal y las sumas verticales den el mismo resultado (11)

### Anexo 2

Las letras que van desde la A a la G representan los números del 1 al 9 excepto el 2 y el 7. Sabrías calcular que números representan las siguientes operaciones matemáticas expresadas en letra?

$A + A = B$      $4 + 4 = 8$   
 $C + C = DB$      $9 + 9 = 18$   
 $A \times A = DF$      $4 \times 4 = 16$   
 $C \times C = BD$      $9 \times 9 = 81$   
 $A + C = DE$      $4 + 9 = 13$   
 $A \times C = EF$      $4 \times 9 = 36$

### Anexo 3

**BASTA NUMÉRICO**

Número Propuesto	+11	-4	$\times 9$	$\div 2$	$\times 2$	Total
8	+19	-18	72	4	64	5
13	24	9	117	6.5	169	5
7	18	3	63	3.5	49	4
20	31	16	180	10	400	5
15	26	11	135	7.5	225	5
11	22	7	99	5.5	121	5
9	20	5	81	4.5	81	5
25	36	21	225	12.5	625	4
12	23	8	108	6	144	5
30	41	26	270	15	900	5
						48

Anexo 4

BASTA ALGEBRAICO

Numero Propuesto	$\frac{x+4}{2}$	$x+3$	$\frac{x^2}{2}$	$x-3$	$2x+2$	Total
1	2.5	4	0.5	-2	4	5
4	4	7	8	1	10	5
6	5	9	18	3	14	5
7	5.5	10	24.5	4	16	5
8	6.5	11	40.5	5	20	5
8	6	9	32	5	18	5
10	7	13	35	7	22	5
12	8	15	72	9	26	5
16	9.5	22	148	13	38	5
17	10.5	24	175.5	14	40	5
20	12	27	200	17	48	5

## **Hoja de firmas**

**Elaboró**

---

**Sarai José González**

**Autorización**

---

**Dr. Efrain Aldama García**

**Revisión**

---

**Mtra. Dulce Perla Flores Cruz**

---

**Mtra. Yanizeth Montoya Medina**

**Dictaminó**

---

**Mtra. Luz Maria Serrano Orosco**  
**Presidente del Comité de Titulación**



GOBIERNO DEL  
ESTADO DE MÉXICO

**EDOMÉX**  
DECISIONES FIRMES, RESULTADOS FUERTES.

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense".

## ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LA COMISIÓN DE TITULACIÓN CON FUNDAMENTO EN LOS LINEAMIENTOS PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE TITULACIÓN EXPIDE EL:

### DICTAMEN No. 33

*A la C. Saraí José González*

QUIEN PRESENTÓ SU DOCUMENTO RECEPCIONAL CONCLUIDO Y FUE APROBADO CONFORME A LOS CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LA COMISIÓN DE TITULACIÓN. POR LO CUAL, CONOCEDORES DE SU RESPONSABILIDAD SE LE INVITA A CONTINUAR CON LOS TRÁMITES ESTABLECIDOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS, FORTALECIENDO ASÍ LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN.

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., A 07 DE JULIO DE 2020.

*Mtra. Luz María Serrano Orozco*

*Presidenta de la Comisión de Titulación*

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN  
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y NORMAL  
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN NORMAL Y FORTALECIMIENTO PROFESIONAL  
SUBDIRECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL  
ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

AV. DE LOS MAESTROS No. 1. SAN FELIPE DEL PROGRESO, COL. CENTRO, SAN FELIPE DEL PROGRESO, ESTADO DE MEXICO. C.P. 50640  
TEL. (01 712) 10-4-21-93  
normalsanfelipe@edugem.gob.mx