ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

ENSAYO

ERRORES PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON ALUMNOS DE TERCER GRADO

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL PRESENTA:

MARÍA GUADALUPE DOMINGO MONROY

ASESOR:
MTRA. PERLA RAMÍREZ ESCOBAR

SAN FELIPE DEL PROGRESO, JULIO DEL 2020

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática normalmente es considerada como una herramienta para la solución de problemas de la vida cotidiana, es por ello que se ha vuelto indispensable para la humanidad. Se encuentra presente en el ámbito académico, durante la formación básica del estudiantado, desde los niveles de preescolar, transitando de las nociones de aritmética hasta el álgebra en la educación secundaria.

El estudio académico de las matemáticas se da de manera gradual basado en los propósitos de desarrollar formas de pensar que permitan a los estudiantes formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos; utilizar diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución y mostrar disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo (SEP, 2011).

En todo momento y con base en los propósitos ya mencionados, los docentes buscan que los alumnos logren competencias matemáticas que les ayuden y faciliten a tener una mejor comprensión de los números y lo que deriva, con ello, también se hace presente la resolución de problemas. En ocasiones, su enseñanza se limita a una serie de pasos útiles para usar correctamente, llevando así a que los mismos alumnos tengan que memorizar información para que después la usen correctamente.

Durante la aplicación de las estrategias didácticas, sean memorísticas o no, se hacen presentes los obstáculos, errores y dificultades, al tener que realizar operaciones, utilizar fórmulas y buscar datos desconocidos, esto puede ocasionar que el trabajo se vuelva “tedioso” o “aburrido” provocando que rechacen aprender algo relacionado con las Matemáticas.

A raíz de dichas situaciones, en el presente trabajo se plantea el problema de analizar los errores y dificultades que presentan los alumnos de tercer grado de educación secundaria al resolver tareas algebraicas, en concreto, las que se relacionan a los “errores procedimentales en la resolución de ecuaciones de primer grado” por alumnos de la Escuela Secundaria 0329 “Pablo

Galeana” ubicada en la comunidad de San Lorenzo Tlacotepec, Municipio de Atlacomulco, Estado de México.

Con el desarrollo de la propuesta didáctica se propuso que los estudiantes lograran transitar del lenguaje común al lenguaje algebraico haciendo uso de la resolución de problemas matemáticos, incluyendo en ello, la resolución de ecuaciones de primer grado, además de que se abordan los contenidos correspondientes al grado escolar y la utilización de reglas y algoritmos para operar correctamente las ecuaciones.

Considerando el álgebra como una herramienta imprescindible para que los estudiantes avancen en los conocimientos matemáticos y, tal como lo expresa Esquinas (2009), su aprendizaje a menudo crea conflictos en los educandos, al tener que enfrentarse a un lenguaje nuevo y con reglas que tienden a confundir; como consecuente, se analizan las posturas que los alumnos tienen con respecto a las matemáticas, y principalmente en su rama, el álgebra, que es de donde derivan los errores o dificultades.

Socas (1997) indica que el error debe ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el estudiante y no únicamente como la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción; para poder erradicarlo, se pretende una manera más fácil en cómo los alumnos logren comprender de manera clara, concisa e incluso que sea relevante para su aprendizaje.

El presente trabajo está estructurado en los siguientes apartados: problema de estudio, desarrollo del tema, conclusiones, anexos y fuentes de consulta.

En el primer apartado se describe de manera clara el problema de estudio que se identificó a raíz de la observación y de un examen diagnóstico, además se incluye el contexto escolar en el que se encontraban los estudiantes del grupo seleccionado, junto con ellos, los referentes teóricos y empíricos que fundamentan el trabajo.

El desarrollo del tema está compuesto por tres capítulos que dan respuesta a las preguntas centrales que dieron origen al estudio, éstos están desarrollados con relación a los referentes teóricos y empíricos en los que se basó la propuesta didáctica.

- ✓ El Capítulo uno está constituido por la importancia que tiene el dominio del lenguaje matemático en la resolución de ecuaciones lineales, además se incluye un apartado que describe cómo se desarrolla este lenguaje en los estudiantes de secundaria.
- ✓ En el Capítulo dos se describen los principales obstáculos, errores y dificultades involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico, así mismo, se mencionan diferentes posturas con respecto al enfoque basado en la resolución de problemas y cómo se favorece el aprendizaje del álgebra.
- ✓ En el Capítulo tres se describe el análisis de la propuesta didáctica con los alumnos de tercer grado de secundaria, las competencias que se deben de adquirir y el perfil de egreso que deben de cumplir los alumnos al culminar el nivel básico de su educación.

Por último, se describen las conclusiones a las que se llegó al desarrollar la propuesta en los alumnos de tercer grado grupo “D”, además de que se incluyen los retos que permitirán seguir estudiando lo relacionado al aprendizaje del lenguaje algebraico a partir de la resolución de problemas. Se presentan también las fuentes de consulta en las que se basó la investigación documental.

PROBLEMA DE ESTUDIO

El presente documento, titulado **“Errores procedimentales en la resolución de ecuaciones lineales con alumnos de tercer grado”** se centrará en la línea temática Il: **Análisis De Experiencias de Enseñanza**, trabajando un contenido relacionado con el área de la especialidad, además de que “un trabajo en esta línea demanda al estudiante poner en juego los conocimientos, la iniciativa y la imaginación pedagógica que ha logrado desarrollar durante la formación inicial”. (SEP, Orientaciones Académicas para la Elaboración del Documento Recepcional. , 2002)

La problemática detectada a partir de los resultados de la aplicación de un examen diagnóstico, así como de la observación e intervención en las escuelas secundarias durante la formación docente hace referencia a **los errores procedimentales que comenten los estudiantes al plantear ecuaciones lineales que dan solución a problemas** propuestos por la docente en formación y cómo estos pueden afectar en el aprendizaje de nuevos contenidos, “la llamada evaluación diagnóstica proporciona “pistas”, “indicios” e información sobre el estado de conocimientos iniciales de los alumnos y sobre los avances del grupo” (Pontones, 2001 p.75)

El examen diagnóstico consistió en 7 ejercicios sobre identificación y resolución de ecuaciones lineales. Los datos obtenidos en el examen diagnóstico se presentan en la siguiente tabla. (*Tabla 1. Resultados del examen diagnóstico*)

EXAMEN DIANGÓSTICO
1. *Señala, en la siguiente ecuación lineal la incógnita:* $$2m + 11 = m - 3$$ *ANÁLISIS:* *Seis alumnos no identificaron de manera correcta la incógnita en la expresión.* *Treinta alumnos, señalaron correctamente la incógnita en la expresión.* *Cuatro alumnos, no señalaron la incógnita.*
2. *Considerando la ecuación anterior, ¿cuál es el valor de m?* ______ *ANÁLISIS:*

Sólo un alumno, respondió de manera correcta el valor de la incógnita. *Dos alumnos, no dieron respuesta.* *Treinta y siete alumnos, dieron respuestas variadas, sin embargo, todas fueron erróneas.*
3. *Si cambiamos* $\boldsymbol{m}$*, por* $\boldsymbol{x}$*. ¿El resultado sería diferente? ______ ¿Cuál sería el valor de* $\boldsymbol{x}$*? ____* *ANÁLISIS:* *Dos alumnos no respondieron ninguna de las dos preguntas.* *Dos alumnos, respondieron que sí, que, si podría ser diferente el valor de la incógnita, y el valor que obtendría sería el mismo que la pregunta anterior.* *Treinta y cinco alumnos, dijeron no, que no podría ser diferente y colocaban un valor diferente al ejercicio anterior.* *Un alumno, respondió correctamente las dos preguntas.*
4. *Resuelve el siguiente ejercicio:* $6\,x = -6$ *ANÁLISIS:* *Nueve alumnos respondieron el ejercicio, pero el resultado obtenido fue erróneo.* *Diecisiete alumnos respondieron correctamente el ejercicio.* *Catorce alumnos no intentaron dar respuesta al ejercicio.*
5. *Resuelve el siguiente ejercicio:* $2x + 20 = 30 + 8$ *ANÁLISIS:* *Siete alumnos respondieron de manera errónea el ejercicio.* *Dos alumnos no respondieron.* *Treinta y un alumnos dieron una respuesta correcta.*
6. *Resuelve el siguiente ejercicio:* $77x + 2x - 9 = 30$ *ANÁLISIS:* *Dos alumnos no respondieron.* *Quince alumnos dieron una respuesta correcta.* *Veintitrés alumnos respondieron de manera errónea el ejercicio.*
7. *Resuelve el siguiente ejercicio:* $99 + 3x = 199$ *ANÁLISIS:* *Siete alumnos respondieron de manera errónea el ejercicio.* *Un alumno no dio respuesta.* *Treinta y dos alumnos dieron una respuesta correcta.*

Tabla 1. Resultados del examen diagnóstico.

Al analizar los datos obtenidos en el examen diagnóstico fue evidente que, a los alumnos, les cuesta trabajo la identificación de la incógnita en una ecuación lineal, y que, por lo tanto, al momento de resolver los ejercicios, hay una desorientación en el procedimiento a seguir para encontrar el valor faltante.

a) Preguntas centrales

Los errores son intentos razonables, pero no exitosos al adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación, tienen su origen en una ausencia de sentido, se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo), es importante saber la forma en cómo los alumnos adquieren el conocimiento para poderlos orientar:

1) **¿Qué tipo de errores aritméticos y algebraicos cometen los alumnos de tercer grado en la resolución de ecuaciones de primer grado?**

Algunos alumnos cometen errores en el desarrollo de ecuaciones lineales, pero no sólo esos errores son de tipo algebraico, les antecede errores que son de tipo aritmético, "los errores básicos cometidos por los alumnos, proveen de información sobre la forma en que éstos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos" (Flores López & Auzmendi Escribano, Los problemas de comprensión del álgebra en estudios universitarios, 2016 p. 56)

2) **¿Qué importancia tiene el dominio del lenguaje algebraico en la resolución de ecuaciones lineales?**

El tránsito del lenguaje común al algebraico, trae consigo varias dificultades, que lleva a los alumnos a cometer errores procedimentales. Es por ello, que los alumnos deben de tener el dominio o conocimiento de lo que comúnmente expresamos, y cómo se representa algebraicamente; "El enfoque lingüístico estudiado por Javier (1987), Kaput (1999) y Duval (1993), considera al lenguaje algebraico como el lenguaje básico de las matemáticas" (Flores

López & Auzmendi Escribano, Los problemas de comprensión del álgebra en estudios universitarios, 2016 p. 55)

3) ¿Qué errores relacionados con el uso del lenguaje matemático se presentan al resolver ecuaciones de primer grado?

Resolver un ejercicio algebraico, para los alumnos, implica un razonamiento más complejo, involucra más que sólo encontrar el valor numérico de una incógnita, involucra el tener claro lo que es el lenguaje algebraico, el uso de leyes de signos e igualdad; es en este tránsito, en donde los alumnos comúnmente llegan a cometer errores, relacionados con los antecedentes ya mencionados.

Como lo menciona Flores López & Auzmendi Escribano, (2016 p. 56)

> "Godino y Font (2004) y Cajaraville *et al.*, (2012) las primeras experiencias con el razonamiento algebraico están relacionadas con la aritmética generalizada y estas experiencias de los estudiantes con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del lenguaje algebraico, y el concepto matemático que hace posible."

b) ***Referentes empíricos y teóricos***

"Para saber algo, no basta con haberlo aprendido."
Lucio Anneo Séneca

Los diferentes componentes del conocimiento han ido en gran avance, sin embargo, hay ocasiones que el conocimiento se ve afectado por diversas causas que intervienen en el proceso de adquisición de estos.

Conocimientos previos

¿Qué es un conocimiento previo?

Como lo menciona Ausubel (1999), los conocimientos previos del estudiante como esquemas de conocimiento, que consisten en la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad" (Jessefh Rafelsson, Moreno Guillermo , & Acevedo Barrios, 2014 p. 121); estos conocimientos que los alumnos deben de poseer, permiten que el nuevo aprendizaje vaya influyendo de manera exitosa en ellos, mejorando el avance de lo ya conocido, pero apoyando a que el conocimiento vaya de manera progresiva.

Los conocimientos previos para el desarrollo de contenidos curriculares son indispensables para el progreso de actividades que impliquen tener la base de ello y tener una comprensión más clara. "Ocupan un papel crucial en el aprendizaje ya que constituyen la base para la adquisición y comprensión de otros nuevos. El diseño educativo debe partir siempre de los conocimientos previos de los niños y adecuarse a ellos" (Citoler, 2000 p. 172), por esta razón, se considera que los alumnos necesitan el fundamento base, para poder adquirir o reformular los nuevos conocimientos.

Esto es de gran ayuda dentro del aula de clase, ya que si los docentes, no consideran o parten de lo que los alumnos traen como base, durante el desarrollo de los contenidos, los alumnos tendrán mayor complicación y retrasarán el aprendizaje al que se quiera llegar en el bloque trabajado, sin embargo, los conocimientos avanzados de algunos alumnos, pueden ser de gran ayuda para orientar a los alumnos con mayor dificultad en la adaptación a nuevos conocimientos.

De la Aritmética al Álgebra

Aritmética

Según Apolinar (2011 p. 9), la Aritmética, es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números y sus propiedades bajo las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Es por ello que le antecede al álgebra, ya que permite que los alumnos, tengan las bases para el desarrollo de las operaciones básicas.

Los alumnos, al tener en claro cómo operar con números naturales, podrán tener una mayor fluidez en cuanto al aprendizaje del álgebra, sin embargo, mediante la complicación de diversos factores, algunos estudiantes llegan a tener confusiones que hacen que se presenten dificultades al momento de hacer uso de estas operaciones básicas.

Álgebra

Según Apolinar (2011 p. 2), el álgebra, es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los números reales a través de su abstracción en forma de polinomios y funciones. Así mismo, una Expresión algebraica, es una combinación de símbolos matemáticos (literales, números, operaciones, etc.) que tenga sentido. Es aquí, en donde los alumnos empiezan a manifestar más errores, al momento del despeje de una incógnita, o incluso, al hacer el transito que hay del lenguaje común al lenguaje algebraico.

De la misma forma, se debe encontrar sentido en el uso de los términos o ejemplificación que como docentes se dan a conocer a los alumnos, porque “la falta de significado para los símbolos y para muchas reglas y procedimientos, incide en forma negativa en el proceso de enseñanza – aprendizaje” (Mendoza, 2019 p. 8)

La relación que hay entre la aritmética y el álgebra, se da de manera progresiva a lo largo de la formación de los estudiantes, ocasionando que, si los alumnos no tienen bien cimentado el uso de números para la resolución de ejercicios y problemas, mediante el uso de operaciones básicas, les costará más trabajo que desarrollen un lenguaje algebraico, en donde hagan uso de símbolos, literales, operaciones básicas, entre otras más.

El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante, que va de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Kieran & Filloy Yagüe, 1989). (Jessefh Rafelsson, Moreno Guillermo , & Acevedo Barrios, 2014 p. 122)

Del lenguaje común, al lenguaje algebraico

La formalización del lenguaje matemático dentro del aula de clases hace referencia a que principalmente los alumnos deben de saber cómo poder representar algebraicamente los términos que coloquialmente se mencionan, como “ponle, quítale, mayor que…” y pasar directamente al uso del lenguaje algebraico.

Apropiándose de este lenguaje, permitirá que conozca las bases para cuando se den a conocer nuevos términos, y ellos puedan ser relacionados correctamente, “el valor que se le otorga a la utilización del lenguaje científico. “Es necesario que los alumnos llamen a las cosas por su nombre, si no, no aprenden” (Pontones, 2001 p. 45)

Así mismo, hay alumnos que relacionan rápida y correctamente los términos algebraicos, influyendo de manera favorable en su pensamiento matemático

> al concebir el pensamiento algebraico como una manera de pensar, propone estimular a los estudiantes para extender su pensamiento acerca de objetos matemáticos (números, formas y medidas) y las relaciones entre ellos, así como también darles la oportunidad para que operen mentalmente con números que conocen.

Por lo tanto, Puig (2013, p. 25) nos menciona que,

“la dificultad de los estudiantes al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico se debe a que los mismos no logran identificar con propiedad las cantidades conocidas (datos) o desconocidas (incógnitas), como también las operaciones que se deban realizar entre esas cantidades, así como las relaciones entre ellas”

Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra

Dificultades:

> la mayoría de las dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal. Lo anterior ha tenido como consecuencia una enseñanza del álgebra a partir de fuentes de significado muy limitadas: usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica) (Citoler, 2000 p. 52)

El aprendizaje del álgebra escolar genera en los alumnos muchas dificultades de naturaleza diferente que tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos. (Ma. de las Mercedes, 1999 p.8)

Obstáculos

Según Brousseau (1993 p. 63), un obstáculo se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, no son fugaces, intermitentes, sino reproducibles, persistentes. Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre, para Brousseau, el fruto de una interacción del alumno con su medio y, más precisamente, con una situación que vuelve este conocimiento interesante.

Además de ello, tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como:

"aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas" (Medina & Socas Robayna p. 92)

Los obstáculos según Brousseau (1993), son "un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro"; el mismo autor hace una clasificación de los orígenes de los obstáculos en tres categorías:

- Ontogenético; referidos a aquellas limitaciones ya sean neurofisiológicas, físicas, etc. que hacen que el sujeto en un momento de su desarrollo no adquiera las suficientes habilidades para desenvolverse plenamente en su vida escolar posterior.

- Didáctico; los cuales tienen que ver principalmente en la forma en que está organizado el sistema educativo y en las prácticas pedagógicas de los profesores.

- Epistemológico; éstos hacen referencia a aquellos que uno no puede ni debe escapar al hecho del rol constitutivo en el conocimiento al que está inmerso.

La adquisición de nuevos esquemas conceptuales, por parte del alumno, está salpicada de obstáculos que se pueden considerar cognitivos. Para Bachelard (1938 p. 67),

"el conocimiento científico se edifica salvando obstáculos, no sólo de tipo externo, como los debidos a la complejidad de los fenómenos o a la debilidad de las facultades perceptivas humanas, sino también a los que se producen en el propio acto de conocer y que se manifiestan como una especie de inercia que provoca el estancamiento o, incluso, la regresión del conocimiento"

Errores

Los errores más comunes que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra se dan en el tránsito que tienen que hacer del lenguaje común al matemático, en específico al algebraico. Les resulta complicado entender cómo es que las expresiones “más que”, “mayor que”, “igual a”, “el doble de”, “la suma de” pueden ser representadas utilizando números, símbolos y letras a la vez. Esto puede ligarse a que los conocimientos que anteceden a ello trabajados en la primaria, hayan sido mal estructurados e incluso, que se tuvo poco contacto con el tema.

Cuando se quiere dar respuesta a un ejercicio matemático se llegan a cometer errores, los cuales impiden llegar a un resultado correcto. En ocasiones, los mismos errores que cometemos son los que nos ayudan a entender el porqué, de un resultado erróneo, llevándonos como aprendizaje el no volver a cometerlo**;** “los **errores** forman parte del proceso de construcción del conocimiento y pueden ser el motor que provoque un avance o un cambio” (Lucchini, Cuadrado, & Tapia, 2006 p.3).

Estos ambientes de aprendizaje que los mismos alumnos generan son los que le brindan herramientas para el máximo logro de competencias “los ambientes de aprendizaje requieren brindar experiencias desafiantes, en donde los alumnos se sientan motivados por indagar, buscar sus propias respuestas, experimentar, aprender del error y construir sus conocimientos mediante el intercambio con sus pares.” (SEP, Programas De Estudio 2011. Guia Para El Maestro., 2011)

Así mismo, “Palarea y Socas (1994) tipifican tres tipos de errores: (a) los que se originan por la existencia de obstáculos; (b) los errores del álgebra que están en la aritmética; y (c) los debidos a las características propias del lenguaje algebraico” (Flores López & Auzmendi Escribano, Los problemas de comprensión del álgebra en estudios universitarios, 2016 p. 56)

Aprendizaje

La forma en que podemos percatarnos de que los alumnos ya no llegarán a cometer errores en la resolución de ecuaciones de primer grado es que se logre un aprendizaje en ellos, por lo que “el aprendizaje es un proceso constructivo y no receptivo, la metacognición afecta el aprendizaje y los factores sociales y contextuales ejercen influencia en el aprendizaje (Morales y Landa, 2004)” (Flores Torres & Rincón Flores y Leo, 1998 pp. 2126-2127)

Según Jessefh Rafelsson, Moreno Guillermo, & Acevedo Barrios (2014 p. 50), conciben que la adquisición de nuevos aprendizajes es mediante la adquisición de:

1) **Aprendizaje de proposiciones:** Conoce el significado de los conceptos, puede formar frases que contengan dos o más conceptos en donde afirme o niegue algo. Un concepto nuevo es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos.

Esta asimilación se da en los siguientes pasos:

- **Por diferenciación progresiva:** el concepto nuevo se subordina a conceptos más inclusores que el estudiante ya conocía.

- **Por reconciliación integradora:** el concepto nuevo es de mayor grado de inclusión que los que el estudiante ya conocía. Por combinación: cuando el concepto nuevo tiene la misma jerarquía que los conocidos.

Planificación

1) La planificación en la enseñanza del álgebra

El Programa de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas (SEP,2011), describe cuatro competencias matemáticas que se deben desarrollar durante la educación básica, una de ellas y quizás la más importante es la de **resolver problemas de manera autónoma**; esta implica que los estudiantes logren plantear, identificar y resolver diferentes tipos problemas.

Y como lo mencionan los programas educativos, de las Escuelas Normales,

> para lograr el propósito fundamental de estudiar matemáticas en la educación secundaria es necesario reorientar la función de los tres factores fundamentales que intervienen en el proceso didáctico: el maestro, los alumnos y las actividades de estudio.

Con este propósito, se ponen en práctica diversas estrategias para la enseñanza y aprendizaje del álgebra que pueden ser consideradas en la planificación usando así situaciones del contexto.

2) El rol del docente en la enseñanza de contenidos algebraicos

"El álgebra no debe ser vista de forma abstracta, árida y descontextualizada que desmotive a los estudiantes y los lleve a limitarse a memorizar conceptos y procedimientos sin comprender su verdadero significado: la solución de problemas de la vida cotidiana" (Filloy, 1999 p. 16). Es por ello que el docente es el encargado de brindarles a los estudiantes un ambiente de aprendizaje cargado de significado para su vida presente y futura.

Uno de los objetivos esenciales - y al mismo tiempo una de las dificultades principales- de la enseñanza de la Matemática es precisamente que lo que se enseñe esté cargado de significado. Para G. Brousseau (1983, p. 19) el sentido de un conocimiento matemático tiene que ver con lo siguiente:

> "No solo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc".

3) Concepción del lenguaje algebraico y cómo se llega a él

El tránsito del lenguaje común al lenguaje algebraico se logra en primer lugar identificando cuáles son los principales errores, obstáculos y dificultades que se presentan tanto en los estudiantes como en los docentes; una vez que éstos se manifiestan por completo, es momento de identificar y planificar las estrategias adecuadas para actuar en mejora de ello.

> En este contexto, autores como Niss, (1999) sitúan una serie de competencias ligadas con la habilidad para utilizar el lenguaje matemático, entre las que se encuentran representar objetos y situaciones matemáticas; utilizar símbolos y formalismos matemáticos y comunicar en, con y acerca de las matemáticas (González-Marí, 2004).

Dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos, nos lleva a traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal y viceversa, proporcionando expresiones escritas en lenguaje formal matemático para que los estudiantes las traduzcan al lenguaje natural y viceversa.

c) Contexto escolar

La propuesta didáctico-pedagógica fue llevada a cabo con los alumnos de tercer grado grupo "D" de la Escuela Secundaria Oficial No. 0329 "Pablo Galeana", ubicada en la comunidad de San Lorenzo Tlacotepec, Municipio de Atlacomulco, Estado de México. Los grupos cuentan con un aproximado de entre 43 a 49 alumnos cada uno; en los grupos, la distribución de género es equitativa, lo cual permite una buena distribución de los alumnos dentro del salón de clases.

La escuela cuenta con cuatro grupos por cada grado, es decir, doce salones de clases, área de dirección y subdirección, orientación, sala de maestros, laboratorio, biblioteca, una cancha de futbol, dos de basquetbol y baños para hombres y mujeres lo que ofrece un buen ambiente de convivencia para todos los estudiantes, la escuela cuenta con una infraestructura adecuada para el desarrollo de habilidades, la adquisición de nuevos conocimientos y favorece las estrategias de desenvolvimiento en el ámbito académico y social, sin embargo, no todas las aulas, cuentan con un cañón propio, lo cual, retrasa un poco el trabajo de los docentes, cuando éste se requiere.

La mayoría de los estudiantes del grupo están pasando por la adolescencia temprana y están experimentando cambios tanto físicos como psicológicos, éstos últimos repercuten en gran medida en el comportamiento de los alumnos debido a que quizá en el momento de la clase estén pensando en algunas cosas que causen su curiosidad del exterior, o incluso, estén buscando soluciones con respecto a problemas familiares o laborales.

La comunidad de San Lorenzo Tlacotepec, Municipio de Atlacomulco, Estado de México, es el principal productor de floricultura de la región, por lo que la gran mayoría de la población está sujeta a este trabajo, gran parte de la población estudiantil de la institución, acude después de la jornada académica al desarrollo de actividades, por lo que directivos de la misma acordaron que gran parte de las actividades se desarrollaran dentro del aula de clases y no se dejaran trabajos extraclase.

d) Evaluación

Según la SEP, (Programas De Estudio 2011 Guía Para El Maestro. Educación Básica Secundaria, Matemáticas, 2011 p. 67)

> "El docente es el encargado de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos de Educación Básica y, por tanto, es quien realiza el seguimiento, crea oportunidades de aprendizaje y hace las modificaciones necesarias en su práctica de enseñanza para que los estudiantes logren los aprendizajes establecidos en el presente Plan y los programas de estudio 2011. Por tanto, es el responsable de llevar a la práctica el enfoque formativo inclusivo de la evaluación de los aprendizajes."

Con base en lo anterior, podemos argumentar, que el maestro es quien interviene en el proceso de seguimiento de los trabajos con los cuales el alumno es acreedor a una calificación valorada entre los 6 a 10 puntos, dependiendo en ello, el desempeño en clase y los criterios que evidencian el proceso de enseñanza y aprendizaje.

CAPÍTULO 1: LA IMPORTANCIA QUE TIENE EL DOMINIO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES

DESARROLLO DEL TEMA

Capítulo 1: La importancia que tiene el dominio del lenguaje matemático en la resolución de ecuaciones lineales

“Un error no se convierte en verdad por el hecho de que todo el mundo crea en él”

Mahatma Gandhi

En este capítulo se abordará la importancia que tiene el dominio del lenguaje matemático en la resolución de ecuaciones lineales, basándose en los referentes teóricos necesarios para contrastar dicha información; así mismo, dará pauta para poder analizar las causas por las cuales los alumnos de tercer grado de educación secundaria presentan frecuentemente errores procedimentales en la resolución de ecuaciones de primer grado, convirtiéndose en conocimientos mal concebidos.

En el plan de estudios 2011 el Estándar Curricular de Matemáticas **Sentido numérico y pensamiento algebraico** presenta la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos. Su progresión debe entenderse como **transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático** para explicar procedimientos y resultados, ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.

En el aula de clases, los alumnos suelen hacer uso de un lenguaje matemático básico, que sirve para poder expresarse con sus demás compañeros, en el lenguaje más sencillo, haciendo referencia a términos matemáticos, desde el punto que ellos han comprendido la explicación del docente, por ejemplo, cuando el docente se refiere con la siguiente expresión “tracen una línea de forma horizontal” los alumnos preguntan, ¿qué vamos a hacer? Y los demás añaden, ¿cómo?, en lenguaje sencillo, le responde, vas a trazar una línea acostada, es una situación, un poco usual que se repita, incluso con alumnos de más nivel, y así como este simple término, en álgebra, los alumnos suelen presentar aún más las dificultades para entender y usar un nuevo lenguaje. (Monroy, 2020)

Del lenguaje común al lenguaje algebraico.

En el proceso de enseñanza hay que tener en cuenta lo que el alumno es capaz de hacer y aprender en determinadas situaciones, dependiendo del estadio de desarrollo operativo en que se encuentre (Piaget, 1973 p.32). El docente se convierte en guía, cuyo único fin consiste en ayudar a los alumnos en el proceso de construcción del aprendizaje, proporcionando al estudiante entornos de aprendizaje contextualizados, fomentando la reflexión basada en la experiencia.

El tránsito del lenguaje común al lenguaje algebraico se logra, en primer lugar, identificando cuáles son los principales errores, obstáculos y dificultades que se presentan con los alumnos, identificando dichos términos se opta por plantear métodos de solución con los alumnos, así mismo, se deben de plantear situaciones que lleven a tener un alcance progresivo, en la solución de los ejercicios o problemas.

El lenguaje común

El lenguaje común es el que se utiliza a través de un denominado código o lenguaje, el cual puede ser oral y escrito, por lo que a partir de éste podemos relacionarnos mutuamente.

Puig (2013) hace mención que la dificultad de los estudiantes al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico se debe a que los mismos no logran identificar con exactitud cómo decodificar información para que puedan expresarla de manera diferente en este caso, algebraicamente.

Así mismo, "una más de las dificultades de los alumnos es que no logran identificar con propiedad las cantidades conocidas (datos) o desconocidas (incógnitas), como también las operaciones que se deban realizar entre esas cantidades, así como las relaciones entre ellas", (Marquina Quintero, Alejandro Moreno, & Acevedo Barrios, 2013 p. 120) aprender álgebra no es sólo hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante, que va de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Kieran & Filloy Yagüe, 1989 p. 9).

Durante el desarrollo de una de las clases de matemáticas los alumnos son capaces de identificar y reconocer ciertas cosas que se dicen de manera matemática, sin embargo, hay algunos otros alumnos que les cuesta trabajo realizar la identificación exacta de los términos algebraicos, y es cuando los docentes se tienen que acoplar al lenguaje matemático que los alumnos dominan, para poder buscar la forma en cómo ayudar a que relacione de manera correcta estos términos, por ejemplo; al hacer uso de las operaciones básicas (suma y multiplicación, junto con sus operaciones inversas, resta y división), se relacionan con cuestiones que se asemejan a la idea de agregar o aumentar tantas veces indique el coeficiente del término algebraico.

Para que los alumnos lleguen a tener una comprensión más clara de los términos algebraicos con los que estén trabajando, es importante que se logre una relación entre la interpretación de lo visto en clase y la formalización de los conocimientos para que, con ello, el alumno logre tener un aprendizaje significativo, fortaleciendo con esto, el uso del lenguaje algebraico. Dichas relaciones, se logran a medida que se siguió con el proceso de retención de información

De acuerdo con Niss, (2011 p. 68) para que los alumnos sean capaces de lidiar con el lenguaje y las herramientas matemáticas es importante que construyan y utilicen diferentes representaciones de conceptos matemáticos, fenómenos y situaciones, es por ello que es importante que con los alumnos se trabaje con representaciones simbólicas, así, al momento de recordar dicho trabajo ya realizado, retomen lo que, de alguna manera, manipularon y comprendieron.

El siguiente ejemplo es tomado de un trabajo en clase de matemáticas, con alumnos de tercer grado:

Para empezar con el acercamiento al lenguaje algebraico, se retomó la representación con objetos que se tienen a la mano: En un primer momento, fue la representación con flores, en donde por un tanto se pagaba cierta cantidad, y después se reemplazaban las flores, por una cantidad y una letra (literal), así, cuando el alumno mostraba complicaciones en recordar el trabajo hecho, retrocedía a sus apuntes, para poder comparar cómo era la manera en cómo lo adquirieron y cómo ahora, lo trabajaban. (Anexo 1)

Tabla 2. Ejemplo del acercamiento al lenguaje matemático

El lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico es una forma de expresarse de manera oral y escrita en Matemáticas, éste implica una combinación de símbolos que son reconocidos por las personas que estudian álgebra a nivel mundial; esta manera de representación surgió desde las primeras aportaciones algebraicas establecidas por los árabes; hasta que hoy en día es reconocido ese idioma, así como lo menciona Garriga (2011), los matemáticos tienen un idioma con el cual se pueden comunicar mundialmente: el lenguaje algebraico.

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* Tesis de fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada. (Garriga , 2011)

El lenguaje algebraico es una forma de traducir símbolos y números, con ello, se denota la manipulación de cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar expresiones y también formular ecuaciones que lleguen a modelar diversas situaciones. El uso de éstos permite que los alumnos se vayan acoplando más a hacer uso de dicha denotación para llegar a tener una comprensión más clara.

El lenguaje algebraico sirve para la representación de valores desconocidos, la principal función es estructurar un idioma que ayude a generar las diferentes operaciones básicas que se desarrollan dentro de la aritmética. Por ejemplo:

<table>
<tr><td colspan="2">La siguiente situación se retomó con alumnos de tercer grado, al realizar un repaso para trabajar el contenido de ecuaciones cuadráticas.</td></tr>
<tr><td>Situación:</td><td>M: ¿Cómo poder expresar algún número desconocido?
A1: con una letra.
A2: …(silencio)
M: ¿Con qué letra?
A1: cualquier letra
M: ¿Por qué con cualquier letra?
A3: porque representa al valor que cualquiera de nosotros esté pensando</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con algo tan sencillo, resultó evidente que, para algunos alumnos, el hacer uso de la aritmética y el álgebra a la vez, complica más el proceso de reconocimiento de una letra.</td></tr>
</table>

Tabla 3 Del lenguaje común al lenguaje algebraico

Durante el desarrollo de las clases, los maestros tratan de hacer que los alumnos se lleven algo de lo que se les explica en clase, es decir, estrategias que les resulten eficaces al momento de dar a conocer algún contenido, en algunos casos, los docentes buscan palabras clave que les faciliten la relación con el lenguaje adecuado, buscando así que al recordar una palabra se les venga a la mente lo que fue explicado en clase, despertando así un poco más el interés de los alumnos hacía las clases de matemáticas.

Basado en ello, en alguna clase de matemáticas se trabajó con el tema de área y perímetro de figuras planas, en donde los alumnos tenían que comprender los conceptos de dichos términos, por lo cual se implementó el uso de palabras clave que asimilaran el término que quisiéramos ocupar, por ejemplo, cuando queríamos explicar a qué hacía referencia la palabra área, la relacionamos con la palabra *superficie*, y cuando decíamos la palabra *contorno*, ya sabíamos que se hablaba del perímetro.

Características del lenguaje algebraico.

El lenguaje algebraico es más preciso al momento de expresar algún enunciado de forma breve. También permite expresar relaciones y propiedades numéricas de carácter general. Otros problemas son mencionados en Pizón y Gallardo (2000) al intentar comprender:

a) la concatenación de términos algebraicos, en relación con la del sistema de numeración.
b) transformaciones entre números positivos y negativos en expresiones algebraicas
c) inversión incorrecta de las operaciones (transposición de términos en una ecuación)
d) diferencia de la incógnita respecto a su coeficiente.

(Flores López & Auzmendi Escribano, Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios, 2016 p. 56)

Dichas relaciones fueron vistas en el aula de clases, con los alumnos, y se hicieron demasiado notorias, cuando tenían que resolver ejercicios o problemas con términos algebraicos, e incluso, sin ellos, por ejemplo, al momento de realizar una operación tal como

$$1+ (-1)$$

Parecía que las leyes de signos desaparecían, y realizaban la operación de corrido, sin respetar el orden, y cundo se les explicaba o estaban con menos presión la resolvían, hasta sus gestos de disgusto, por una operación como esa, eran presentes. (Anexo 2 y 2.1)

El pensamiento matemático, trata de construir ideas a través del entorno social, mediante situaciones y contextos que se relacionan matemáticamente con cosas semejantes y que a su vez llevan a tener más claro el contenido que se trabaja en el aula, mediante la explicación asociada. Esto permite orientar el aprendizaje del lenguaje algebraico al alumno para iniciar a plantear y comprender la matemática como una disciplina que se requiere para la vida.

El aprendizaje se produce de forma que los que aprenden piensan conscientemente y reflexionan sobre el mundo, sin rechazar otras identidades, habilidades o afiliaciones sociales y yuxtaponiéndolo a nuevos modelos, que pueden entrar en conflicto o relacionarse con ellos por múltiples caminos (Lacasa, 2015 p. 7). (Lacasa, 2015)

El dominio del pensamiento matemático dentro del aula de clases lleva a los alumnos a tener que involucrarse de manera armónica en las actividades que los maestros desarrollen, mediante el uso adecuado de términos, que sirven para poder comprender lo que se indica en una actividad previamente diseñada, ayudando a los alumnos a que generen un aprendizaje matemático basado en la terminología correcta.

Esto puede contrastarse cuando el maestro pregunta a los alumnos algunos datos ya vistos y los alumnos responden de manera correcta a dicha cuestión, es por lo que también al aplicar cálculo mental, los alumnos, deben de recordar de manera correcta los datos solicitados, y resolver rápida y acertadamente. Esto funciona, si como docentes se lo proponen, para poder tener activa la mente del alumno y cada vez sea menos el error cometido.

El lenguaje matemático permite la comunicación apropiada de los diversos conceptos de manera correcta, también es conocido como el lenguaje universal, a su vez, el lenguaje algebraico es una forma de traducir símbolos y números, con ello, se denota la manipulación de cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar expresiones y también formular ecuaciones.

Cuando se solicita a los alumnos que escriban algebraicamente algún dato desconocido, hay quienes de manera rápida y concretamente, escriben la literal x, sin embargo, hay algunos otros alumnos que se confunden todavía con hacer uso correcto del lenguaje algebraico y empiezan a divagar, sin saber cómo o qué responder, pero al momento de identificar que cualquier letra del abecedario puede llegar a tener el valor desconocido, escriben *a, l, j. t, y, etc…*

La formalización del lenguaje matemático dentro del aula de clases hace referencia a que principalmente los alumnos deben de saber cómo poder representar algebraicamente los términos que coloquialmente se mencionan, como "ponle, quítale, mayor que…" y pasar directamente al uso del lenguaje algebraico. "Su función principal es establecer y estructurar un lenguaje que ayude a generalizar las diferentes operaciones que tienen lugar dentro de la aritmética donde sólo ocurren los números y sus operaciones aritméticas elementales" (CONCEPTO DEFINICIÓN, 2018)

Apropiarse de este lenguaje, permitirá que el alumno conozca las bases para cuando se den a conocer nuevos términos, y ellos puedan ser relacionados correctamente, "el valor que se le otorga a la utilización del lenguaje científico. "Es necesario que los alumnos llamen a las cosas por su nombre, si no, no aprenden" (Pontones, 2001 p.68). Cuando los alumnos tienen el dominio del lenguaje algebraico, es importante que comiencen a relacionar lo que escuchan con lo que hablan al momento de realizar operaciones básicas, por ejemplo:

M=Si tengo algún dato desconocido, y le aumento el doble del mismo número más 8, ¿Cómo queda expresado? $A_1 = x+2x+8$ (Monroy, 2019)

Tabla 4 Relación del lenguaje algebraico

Cuando los alumnos ya se apropian del lenguaje algebraico, y han comprendido la relación que tiene con el lenguaje natural, se empieza con la formalización de éstos, identificando claramente cuando se habla de dos datos desconocidos, pero que éstos sean diferentes, asociándolo directamente con otros términos conocidos y de esta forma, poder comprender lo que se requiere trabajar.

Pensamiento algebraico.

Como referente teórico-metodológico, todo docente debe de tener en consideración los diferentes documentos que avalen el ¿por qué? del desarrollo puesto en práctica en el aula de clases, ya que infunde demasiado para lograr aquellas competencias que el estudiante debe tener al culminar el nivel por el cual, esté transitando. Todo esto tomando como referencia el perfil de egreso de educación básica y los propósitos de la asignatura de matemáticas.

Es por lo que para el presente trabajo se retomaron como guía los **"Programas De Estudio 2011 Guía Para El Maestro. Educación Básica Secundaria, Matemáticas",** y los referentes que lo conforman; propósitos, rasgos del perfil de egreso, campos de formación, entre otros, con el fin de darle sentido al trabajo que se presenta.

Respecto a los campos de formación, el relacionado al Pensamiento Matemático, pretende desarrollar el razonamiento para la solución de problemas, la formulación de argumentos para explicar sus resultados y el diseño de estrategias y procesos para la toma de decisiones.

Al concebir el pensamiento algebraico como una manera de pensar, propone estimular a los estudiantes para extender su pensamiento acerca de objetos matemáticos (números, formas y medidas) y las relaciones entre ellos, así como también darles la oportunidad para que operen mentalmente con números que conocen y su proceso de reconocimiento y validez satisfactoria, sea más eficiente.

Como lo menciona Manuel Alcalá (2002 p.19), el **lenguaje matemático** es soporte y a su vez, parte constitutiva del conocimiento matemático mismo; el **aprendizaje matemático** se basa en un proceso de construcción activa dirigida mediante variables que conllevan a la adaptación y uso del lenguaje matemático: la expresión aritmética, es decir, los procesos de simbolización que conducen a la recreación colectiva - individual del código aritmético, su interpretación y su uso.

> "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico**…"** (Godino & Font, 2003 p. 774)

Basado en lo anterior, podemos decir que el razonamiento nos lleva a apoyarnos de ciertas cosas que nos hacen recordar lo que ya hemos trabajado y mediante estas características que se convierten en partes significantes se va desarrollando el pensamiento matemático.

Aprendizajes esperados

Los propósitos marcados en el plan de estudios de las Matemáticas para la educación secundaria, esperan que los alumnos desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos, utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución, además, muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo.

Para lograr lo anterior es conveniente el análisis de los aprendizajes esperados, ya que éstos catalogan los contenidos y permiten orientar el trabajo docente. Para la propuesta de estudio se retoman los siguientes:

1. Manipular símbolos y signos para pasar de una expresión algebraica a otra.
2. Convertir situaciones de la realidad en expresiones algebraicas.
3. Dar a una expresión algebraica un posible significado en la realidad.

Contextualizar a los alumnos, con algunos contenidos respecto al Plan y Programas 2011, es posible, sin embargo, algunos de ellos, no dan pauta para poder ejemplificar de manera concreta; por ello, se retoma el siguiente ejemplo trabajado en alguna clase de matemáticas:

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico *Contenido temático:* Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Objetivo:

contextualizar a los alumnos, mediante el uso de objetos que están en su entorno, para apropiarse de un nuevo lenguaje matemático haciendo uso del uso de ecuaciones de primer grado.

EJEMPLO:

Fui a la tienda y por 12 bolsas de cheetos, voy a pagar $72.
¿Cuánto costó una bolsa de cheetos?

Represéntalo gráficamente.

$$12x = 72$$

$$x = \frac{72}{12}$$

$$x = 6$$

Una bolsa de cheetos, costó $6.

Con un ejemplo tan simple, se pueden formular ecuaciones de primer grado, sin embargo, hubo alumnos que fueron capaces de hacer el proceso mentalmente, precisamente por la facilidad que éste implica, otros más, necesitaron una explicación que consistía en hacer una retroalimentación de términos, pero que al final de cuentas, terminó con encontrar el valor de cada bolsa de cheetos. El siguiente ejemplo es el trabajo que realizaron los alumnos en sus libretas:

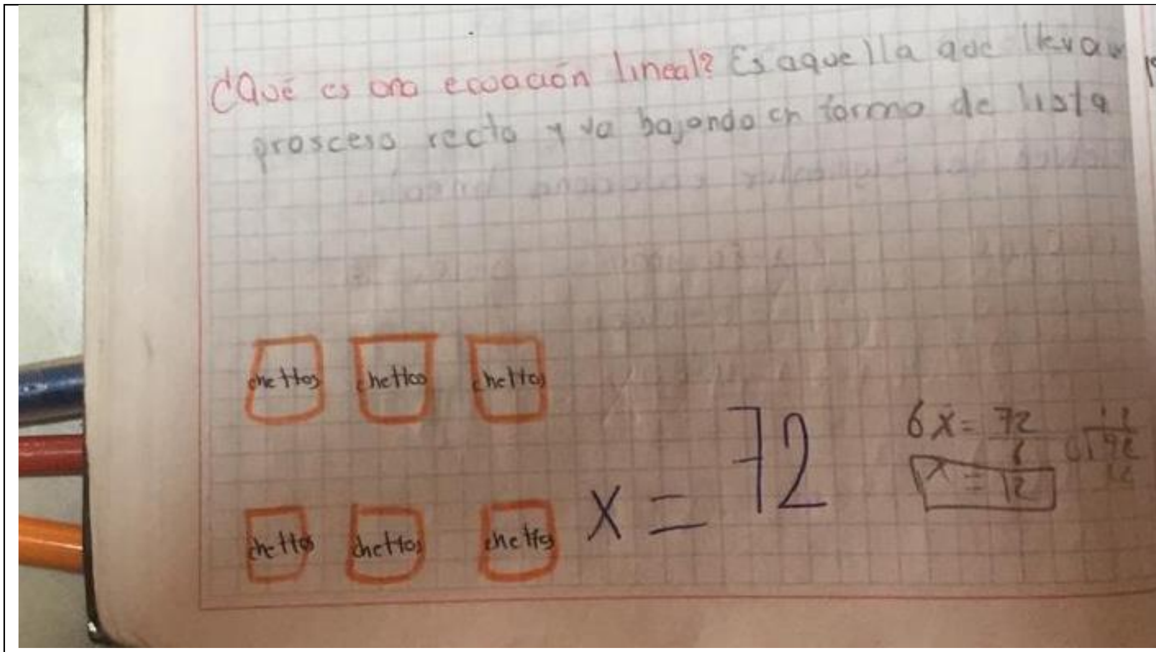


Tabla 5 Ejemplo del contenido trabajado

Dificultades en el desarrollo del pensamiento matemático y el aprendizaje del álgebra

En el desarrollo del álgebra, recurrentemente, se llegan a cometer errores que en ocasiones pasan desapercibidos, sin embargo, como lo menciona el libro para el docente de la SEP (2006), el docente gestiona la clase e interviene en la validación de resultados y formalización de conceptos, así como en la aclaración de dudas. Por eso su papel es fundamental.

Inclusive, los docentes intervienen más cuando se trata de hacer el tránsito entre el lenguaje común con el algebraico, y viceversa, ya que al principio si es un poco confuso el tránsito, pero mediante la práctica resultan ser menores los errores cometidos.

La enseñanza del álgebra genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturaleza diferente, según Palarea (1998 p.258) estas dificultades de procedencia distinta se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos mediante errores.

Pueden ser clasificadas en tres tipos (Wagner y Parker, 1999 p. 98): aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza. Así mismo, el autor Kieran (1989, 1992) resalta que las dificultades de los estudiantes de secundaria en el tránsito de la aritmética al álgebra se centran en la necesidad de manipular *letras* y dotar a esta actividad de significado, lo que supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética y el álgebra.

> "Como indicadores de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas, podemos señalar: expresar ideas matemáticas utilizando el lenguaje algebraico verbalmente o por escrito, comprender e interpretar las ideas matemáticas que se presentan en lenguaje algebraico" (Socas Robayna, camacho Machin, & Hernández Dominguez, 1998 p. 77)

CAPÍTULO 2: DIFICULTADES Y ERRORES, PRESENTADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

Capítulo 2: Dificultades y errores, presentados en la resolución de problemas matemáticos.

Enfoque basado en la resolución de problemas

El **enfoque didáctico** que establece el Programa de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas (SEP, 2011), está centrado en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos, los motiven a reflexionar, a encontrar diferentes estrategias para resolver problemas y formular argumentos que validen los resultados de esos problemas.

Se plantea, como función primordial del docente, la mediación entre los conocimientos y el alumno para la adquisición de los aprendizajes; mediante esto, es necesario que cada formador posea conocimientos disciplinares y pedagógicos, así como actitudes y valores que generen el ambiente adecuado en las aulas de clase.

En cumplimiento con el perfil de egreso se espera que el alumno sea capaz de **resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado. Para ello será necesario determinar el concepto de problema desde la mirada de distintos autores, entre ellos:**

- ✓ Schoenfeld A. (1985) un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; es una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. La resolución de problemas debe ser una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar de manera individual y colectiva, pues propicia un ambiente para lograr un aprendizaje significativo y desarrolla otros procesos de pensamiento como son: la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos.

- ✓ Charnay (1994 p. 70) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da sólo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro.

- ✓ Así mismo, Callejo (1994), citada por Remesal (1999 p. 57), señala que un problema es una situación cuya solución no es inmediatamente accesible al sujeto dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva de manera inmediata, esto implica que es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo.

- ✓ Sin embargo, según Ballestero (2002 p. 21) la solución de problemas es un complejo constructo, que cumple el doble y poderoso papel de aliado y/o enemigo en materia de enseñanza, ya que interfiere directamente en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, por tanto, en los niveles de desarrollo alcanzados por el alumno. Generalmente, para resolver un problema se necesitan de una serie de pasos o procedimientos heurísticos que, así sea inconscientemente, un individuo debe tener en cuenta para llegar a la posible solución del mismo. (Torres, 2013)

De ellos se retoma a Polya (1996 p. 87) quien propuso la resolución de problemas como estrategia didáctica a finales del siglo pasado. Con el fin de resolver problemas de cualquier índole, y aplicándolo en el ámbito matemático se relacionaron las siguientes cuatro etapas:

1. **Entender el problema:** en esta etapa se encuentran las estrategias que ayudan a entender las condiciones del problema, ¿Qué es lo que pide el problema?
2. **Diseño de un plan:** aquí intervienen aspectos que van ayudar a resolver el problema. Se va a realizar un plan de solución, ¿Cómo voy a resolver el problema?
3. **Ejecución del plan:** quien está resolviendo el problema ejecuta el plan que anteriormente diseñó.
4. **Visión retrospectiva:** el sujeto debe verificar si la estrategia que ha hecho para resolver el problema fue adecuada y comprobar que la respuesta que se obtuvo realmente

coincide con el planteamiento principal del problema. ¿El resultado que obtuve es el correcto?

Así mismo, Polya considera que la resolución de problemas tiene relación con la metacognicion, que, de acuerdo con Silva (2006) y Flavell (1976), tiene relación con cómo los seres humanos piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento, así como productos cognitivos (propiedades de la información, datos relacionados con el aprendizaje).

Entre los pasos de la metodología Polya y las fases del proceso metacognitivo del Modelo Pedagógico del Gimnasio Campestre se puede establecer la siguiente relación:

Pasos de la metodología de Polya	Fases del proceso metacognitivo.
Entender el problema.	Apropiación de la meta.
Configurar un plan.	Planificación de estrategias.
Ejecutar el plan.	Desarrollo y control.
Examinar la solución.	Producto y evaluación.

Tabla 6 Las fases del proceso metacognitivo del Modelo Pedagógico del Gimnasio Campestre

Mecánicamente hay ocasiones en las que, al dar solución a un problema, se vienen a la mente, diferentes estrategias, en donde sólo hay que identificar cuál de ellas es la más apropiada para agilizar el proceso y examinar que la solución sea la adecuada para obtener un buen puntaje al momento de la evaluación. Es por ello, que la relación que se presenta en la Tabla 6, especifica el método de los 4 pasos de Polya, y con ello las fases metacognitivas al momento de la resolución de problema.

Con respecto a lo mencionado con el método de resolución de problemas de Polya, podemos ejemplificar con un problema retomado en la clase de matemáticas:

Problema visto en clase:
En una tienda, Gabriel quiere comprar dulces de caramelo, y por 3 diferentes le cobran por la bolsa que adquirió \$3 más. Tiempo más tarde, fue a comprar un caramelo igual y tuvo que pagar \$4 más por la bolsa. ¿Cuánto pagó en total por cada caramelo en ambas idas a la tienda?

<table>
<tr><td colspan="2">Formula la expresión.

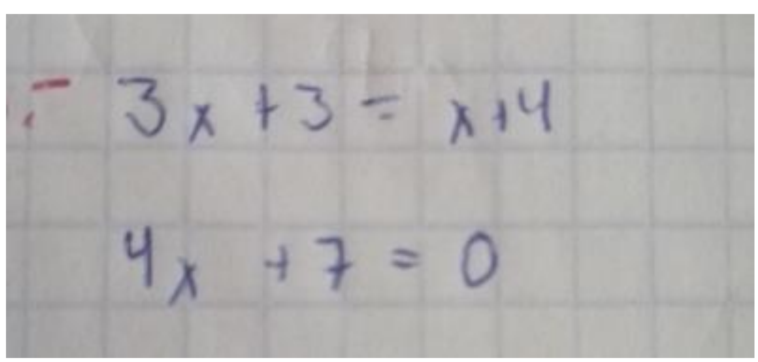
$3x + 3 = x + 4$</td></tr>
<tr><td>Pasos de George Polya</td><td>Obstáculos y errores que se identificaron</td></tr>
<tr><td>1. Entender el problema: Este primer paso trata de imaginarse el lugar, las personas, los datos, el problema. Para eso, hay que leer bien, replantear el problema con sus propias palabras, reconocer la información que proporciona, hacer gráficos, tablas. A veces se tiene que leer más de una vez.</td><td>Los alumnos, al tener frente a ellos un problema, empiezan a tener obstáculos, incluso, algunos de éstos, no tienen ninguna relación con lo que se les presenta.
El primer paso consiste principalmente en comprender lo que se lee y de ahí desarrollar el lenguaje que se presenta, como el siguiente ejemplo que fue desarrollado por un alumno de tercer grado:
$$3x + 3 = x + 4$$
Al momento de expresar la ecuación, lo realiza de manera correcta, en los miembros correspondientes.</td></tr>
<tr><td>2. Diseño de un plan:
En esta etapa se plantean las estrategias posibles para resolver el problema y seleccionar la más adecuada. ¿Cómo voy a resolver el problema?</td><td>Como segundo paso, el alumno idealizó la forma en cómo dar respuesta a dicha ecuación.
Sin embargo, presenta errores en la igualdad, ya que, en lugar de realizar la operación inversa en dichos miembros realiza la adición de términos semejantes:


Ilustración 1 Errores en la igualdad.</td></tr>
</table>

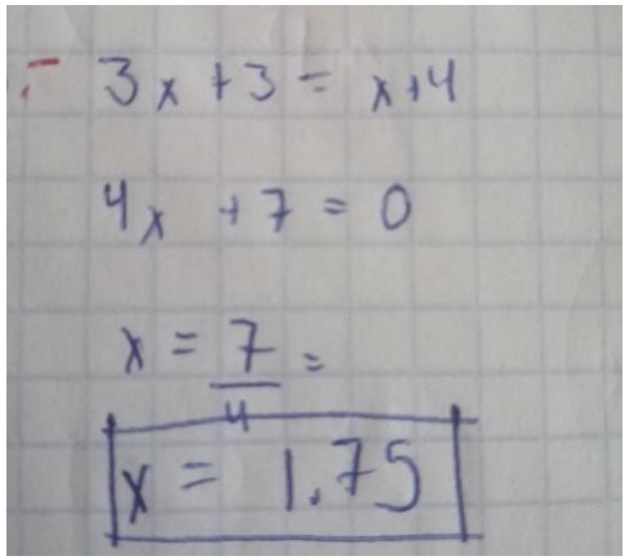
3. **Ejecución del plan:** Ya se tiene el plan seleccionado, así que se aplica. Se resuelve el problema, monitorear todo el proceso de solución.	Después de que el alumno ha desarrollado el primer paso con la relación de términos semejantes, se presentan aún más errores en la igualdad, y con ello, obtiene un resultado incorrecto.  *Ilustración 2 Relación de términos semejantes*
4. **Visión retrospectiva:** Luego de resolver el problema, revisar el proceso seguido. Cerciorarse si la solución es correcta, si es lógica y si es necesario, analizar otros caminos de solución.	El alumno, no realiza una revisión del procedimiento llevado a cabo. Por lo tanto, como lo menciona Brouseau (1983), los obstáculos presentados son, un conjunto de conocimientos y saberes que llevan a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro.

Tabla 7 Problema visto en clase

Error

Durante el proceso de solución de ejercicios de ecuaciones lineales, se apreciaron diferentes tipos de errores, de los cuales, (Brousseau, 1983 p. 61-62). Palarea y Socas (1994) tipifian lo siguiente:

(a) los que se originan por la existencia de obstáculos

(b) los errores del álgebra que están en la aritmética

(c) los debidos a las características propias del lenguaje algebraico

(d) un obstáculo cognitivo

(e) ausencia de sentido de los sistemas de representación

(e) actitudes afectivas y emocionales

Uno de los errores que corresponde a los del inciso e) ausencia de sentido de los sistemas de representación; fue visto a lo largo de una clase de matemáticas, debido a que el alumno se bloqueó y no supo dar respuesta a una pregunta sencilla (Tabla 8), incluso estos errores simples, se hacen presentes en ocasiones por la presión que sometemos en los alumnos a que den respuestas del tema que se esté trabajando, tomando al alumno en un momento de distracción o aburrimiento.

Ausencia de sentido de los sistemas de representación:
M: ¿cómo puedo expresar el perímetro de la siguiente figura irregular?
A: ammm, no, no recuerdo
M: Vuelve a checar la figura y responde lo que te solicito
A: profa, es que no recuerdo cual es, no estaba poniendo atención

Tabla 8 Errores presentados en una clase de matemáticas

Otras faltas más, cometidas por los alumnos, es que, en ocasiones de una clase a otra, se les olvida lo que se trabajó, e incluso se les olvida el nombre matemático, por el cual se denominan ciertas cosas, en especial las que tienen que ver con el tránsito del lenguaje común al lenguaje algebraico, sin embargo, las operaciones con signos contrarios al momento de hacer el procedimiento adecuado, queda en el olvido, sólo por querer resolver rápidamente un ejercicio y querer ganar sellos extras, impiden que tengan que hacer un análisis más profundo de sus resultados.

En algunos estudios de Kieran (1997 p. 87), se señala que en los problemas del álgebra elemental en los que se presenta la variable como un valor desconocido que se debe localizar, las demandas conceptuales de los estudiantes se centran en:

- ✓ Comprender las letras como objeto que se usa para representar incógnitas, números generalizados y relaciones entre cantidades.

En el caso del álgebra, la concepción de una sola letra puede dar infinitas relaciones con otras cosas, por ejemplo: cuando tenemos la letra **x,** se puede dar la relación que corresponde a la inicial de algún nombre, e incluso de algún animal o algún estado, pero poca razón se le da a que corresponde a algún dato desconocido.

- ✓ Traducir los problemas a modelos algebraicos, basados en ecuaciones que representan cantidades desconocidas y los otros datos del problema, según relaciones explícitas o implícitas en el enunciado de la tarea.

El tránsito que ocurre del lenguaje común al algebraico en ocasiones representa obstáculos para poder comprender claramente sobre lo que se está trabajando y más, esto ocurre cuando los alumnos intentan representar algebraicamente los datos que se presentan en la resolución de problemas.

- ✓ Resolver dichas ecuaciones. Estas demandas generan dificultades de aprendizaje en muchos estudiantes.

Esto es, que mediante el uso de símbolos y objetos utilizados del exterior los alumnos nos ayudan a que al formalizar los conocimientos hagan uso de la memoria para el reconocimiento de manera correcta de la forma en la cual se fueron desarrollando los procesos de aprendizaje.

Obstáculos

La adquisición de un nuevo lenguaje lleva consigo un sinfín de complicaciones que retrasa el proceso de retenimiento de información y ello conlleva a tener un conocimiento donde una de las mayores dificultades que encuentran los alumnos está en el aprendizaje, la comprensión y uso del simbolismo. La matemática para muchos de ellos se reduce a un lenguaje esotérico e incomprensible, compuesto por números y otros signos, palabras inconexas … cuya finalidad desconocen. Esto se refleja en hechos frecuentes en determinados niños como:

No asociar signo numérico con cantidad e, inversamente, cantidad con signo, es decir, no dar significado al número. Interpretaciones erróneas de la escritura aritmética (4+ … =7)

Hacer uso de estrategias y <<trucos>> personales para resolver cálculos y problemitas y obviar por completo la escritura aritmética y los algoritmos <<personales>>. (Alcalá, 2002 p. 157)

Identificación de errores

En la escuela secundaria se deben de cumplir varios filtros por los cuales los alumnos deben de pasar y aprobarlos, algunos de ellos en matemáticas son, la apropiación de las operaciones básicas, identificación y resolución de diversos problemas haciendo uso de diferentes algoritmos, sin embargo, también hay un requisito que debe ser persistente en todas las materias, y que resulta ser medible cuantitativamente, pero no por ello, significa que no haya cumplido con las competencias matemáticas, y es la evaluación.

Según, el Plan de estudio 2011. Educación Básica, la evaluación debe ser una fuente de aprendizaje que permita detectar el rasgo escolar de manera temprana y, en consecuencia, que la escuela desarrolle estrategias de atención y retención garantizando que los estudiantes sigan aprendiendo y permaneciendo en el sistema educativo durante su trayecto formativo.

La escuela en su conjunto, y en particular los maestros y las maestras, los padres y los tutores deben contribuir a la formación de las niñas, los niños y los adolescentes mediante el planteamiento de desafíos intelectuales, afectivos y físicos, el análisis y la socialización de lo que éstos producen, la consolidación de lo que se aprende y su utilización en nuevos desafíos para seguir aprendiendo.

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA CON LOS ALUMNOS DE TERCER GRADO DE SECUNDARIA.

Capítulo 3: Análisis de la propuesta didáctica con los alumnos de tercer grado de secundaria.

La propuesta didáctica se desarrolló con los alumnos de tercer grado, grupo “D”, con un total de 43 alumnos, con el fin de identificar los errores que se cometían en el proceso para dar respuesta a ejercicios y problemas de ecuaciones lineales. Como primer instrumento se utilizó la aplicación de un examen diagnóstico, para identificar los métodos que utilizaban los alumnos para dar respuesta a ejercicios de ecuaciones lineales, así como, el reconocimiento de una ecuación y el nivel o grado que ocupa la expresión algebraica.

Después de la aplicación del examen se analizaron las respuestas que los alumnos dieron para que, con base en ello, se pudiera desarrollar una planeación, la cual tenía como propósito la aplicación y el uso de habilidades del pensamiento algebraico en los alumnos. Conforme el desarrollo de ésta, en el aula de clases se recolectaron datos mediante las experiencias, retos y desafíos que cada alumno tuvo que superar para poder conseguir los fundamentos necesarios para la adquisición de un nuevo lenguaje matemático.

Competencias de Educación Básica

Las competencias en Educación Básica constan de diferentes conocimientos y habilidades, pensamientos, carácter y valores de manera integral, siendo aquellas capacidades que un alumno debe de cumplir al término de un nivel educativo, que le permitirá tener las bases y los fundamentos para la nueva adquisición de conocimientos, dentro y fuera del aula de clases

> Una competencia permite identificar, seleccionar, coordinar y movilizar de manera articulada e interrelacionada un conjunto de saberes diversos en el marco de una situación educativa en un contexto específico … el concepto de competencia enfatiza tanto el proceso como los resultados de aprendizaje, es decir, lo que el estudiante o el egresado es capaz de hacer al término de su proceso formativo y en las estrategias que le permiten aprender de manera autónoma en el contexto académico y a lo largo de la vida. (México, 2012)

En la rama de la matemática, implica cumplir con el desarrollo de competencias y habilidades para poder desarrollar el uso de números y razonamiento matemático, dando de manera certera y asertiva respuesta a problemas que implique razonamiento. Las cuatro competencias matemáticas que deben de cumplirse en Educación Básica son: **Resolver problemas de manera autónoma; Comunicar información matemática; Validar procedimientos y resultados; Manejar técnicas eficientemente,** como se ejemplifican en la Tabla 9.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS	
1. Resolver problemas de manera autónoma.	Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son los métodos más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.

¿Cómo se logró esta competencia en el aula de clases?	Esta competencia pudo ser observada con los alumnos de tercer grado ya que durante el desarrollo de las clases los mismos alumnos, por iniciativa propia, mostraban el interés por querer dar respuesta a un problema matemático, otros más, intentaban dar respuesta al problema, aunque por algunos momentos, se les dificultaba, pero encontraban la manera de solucionar sus dudas y poder verificar con ayuda de la docente o incluso con uno de sus compañeros sus respuestas.

2. Comunicar información matemática.	Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan nexos entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.
¿Cómo se logró esta competencia en el aula de clases?	Durante el desarrollo de esta competencia, los alumnos, tenían que establecer nexos, según las bases

	que se trabajaban una clase anterior con los problemas y ejercicios posteriores, los cuales tenían la función de retarlos, para que así pudieran validar exitosamente los resultados, así mismo, tenían que exponer con claridad ante ellos mismos la forma o el algoritmo que tendrían que utilizar para dar solución al planteamiento.

3. Validar procedimientos y resultados.	Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
¿Cómo se logró esta competencia en el aula de clases?	Conforme los problemas iban de forma gradual en su complejidad, los alumnos tenían mayor confianza en ellos mismos, sobre la forma en cómo era la situación de dar respuesta a ejercicios de ecuaciones lineales, sin embargo, para otros más, así como avanzaban, se mostraban mayores dificultades en la adquisición de los conocimientos y los errores eran más notorios en su desarrollo. Por lo que se implementó que las personas que no lograban comprender más a fondo, fueran las que tenían que explicar los pasos para dar solución y en conjunto con el resto del grupo, ayudar a aclarar sus dudas.

4. Manejar técnicas eficientemente.	Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación; en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas.
¿Cómo se logró esta competencia en el aula de clases?	Mediante la comprobación, los alumnos se daban cuenta en qué estaban mal, y así, permitía que ellos hicieran una breve reflexión, sobre cuáles fueron sus errores, cometidos en la resolución de ecuaciones lineales.

Tabla 9 Competencias de Educación Básica

Estrategia aplicada.

Durante el desarrollo de las clases, los alumnos manifestaban que, para ellos, era de gran importancia que se les dieran observaciones en cuanto al trabajo que estaban desempeñando, porque, de esta manera, ellos identificaban y se daban cuenta de los errores que llegaban a cometer, algunas de estas observaciones eran incluso de la rama de Aritmética, por el simple hecho de equivocarse en una multiplicación, por lo cual, se implementó la siguiente estrategia, basada en los mismos errores de los alumnos (Tabla 10).

<table>
<tr><td colspan="2">Durante las clases de matemáticas, se retomó el hacer conciencia a los alumnos de los errores que ellos llegaban a cometer en ejercicios pasados, por lo cual, se implementó hacer uso del cálculo mental al iniciar las clases de matemáticas.
Esta actividad servía para iniciar las clases y permitía que los alumnos se concentraran en dar solución a los ejercicios, procurando hacer una reflexión y hacer notar en dónde estaban fallando.
Los diferentes tipos de cálculo mental aplicados, promovían en ellos, la curiosidad por saber cuál de todos los ejercicios tendría valor,</td></tr>
<tr><td>Cálculo mental
10 ejercicios = 10 aciertos</td><td>Ejemplos:
✓ 1+1-1=1
✓ 1-(-1) +1= 3</td></tr>
<tr><td>Cálculo mental
10 ejercicios = aciertos menos errores</td><td>Ejemplo:
Si se realizaban 10 ejercicios y de ellos, sólo 7 fueron los aciertos, se contaban aciertos menos errores, es decir, 7-3= 4
Se registraban 4 aciertos buenos.</td></tr>
<tr><td>Cálculo mental
10 ejercicios y sólo 1 ejercicio seleccionado al tanteo, valdría</td><td>Ejemplo:
Se realizaban los 10 ejercicios del día, de ellos, sólo 1 ejercicio, era válido, y</td></tr>
</table>

	si los alumnos no lo resolvieron bien, los demás no tenían valor.

Tabla 10 Análisis de la propuesta

Análisis de la propuesta

El uso frecuente del leguaje matemático adecuado con los alumnos de tercer grado, permitía que ellos mismos se acoplaran a utilizarlo de manera frecuente durante las clases, y a pesar de que en ocasiones ellos mismos expresaban en lenguaje común términos matemáticos, se podía observar que en el trabajo diario aumentaban su vocabulario, por ejemplo, después de trabajar con ecuaciones de segundo grado, los alumnos identificaban las partes de una ecuación, el grado y los métodos de solución que se trabajaron.

La propuesta que se llevó a cabo permitió que los alumnos relacionaran situaciones del entorno social, para poder ejemplificar los ejercicios y problemas planteados por la docente, aunque en ocasiones los obstáculos impedían que el proceso se cumpliera favorablemente, sin embargo, el acompañamiento en la revisión rápida entre filas promovía que los alumnos se sintieran supervisados y retroalimentados en las dudas que surgían en el trabajo, también fue de gran apoyo que al realizar su trabajo fueran incentivados, y por su cumplimiento y responsabilidad se les otorgara mayor número de firmas durante el trabajo, esto permitía que los alumnos quisieran tener mayor cantidad de firmas para que no fueron afectados en la valoración trimestral.

La dedicación, por parte de alumnos y docente, fue mutua, ya que ambas partes cumplían con la responsabilidad que les tocaba, y con ello, el gran número de errores que se manifestaron en la resolución del examen diagnóstico, fueron cada vez siendo menos, sin embargo, cuando algunos alumnos ya tenían claros los procesos a seguir, siguieron surgiendo dudas en el trabajo acompañadas de errores en los elementos básicos de la aritmética. Por eso, se propuso que los ejercicios fueran acompañados de los elementos necesarios para ir progresivamente de un paso a otro, sin omitir alguno, ya que, en este tránsito, había una mayor probabilidad de llegar a cometer errores.

CONCLUSIONES

Después de haber llevado a cabo la propuesta didáctica que tiene por título "**Errores procedimentales en la resolución de ecuaciones lineales**" en el grupo de tercer grado grupo "D" se llegaron a las siguientes conclusiones:

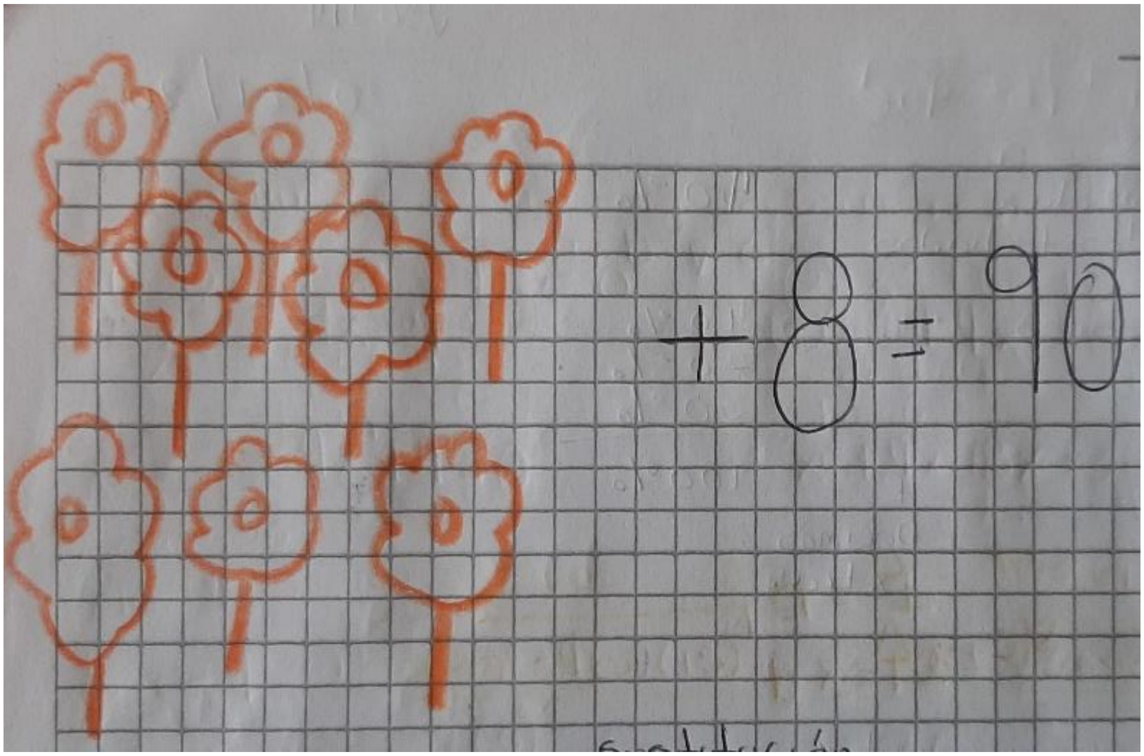
- Los alumnos deben de sentir, por parte del docente, el interés y la motivación por adquirir y aprender los conocimientos respecto a cualquier tema de la matemática, para poder cumplir con la expectativa motivacional de los educandos.
- Los contenidos trabajados deben tener relación con situaciones del contexto en las que se encuentra la mayoría de los alumnos, para que tomen en cuenta que los aprendizajes adquiridos pueden ser significativos dentro y fuera del aula de clases.
- Los docentes deben de tener en cuenta el nivel de aprendizajes con los que cuentan sus alumnos mediante la evaluación diagnóstica, y basado en esto, hacer flexible la planificación de contenidos a trabajar; considerando los errores y aciertos que los alumnos tengan para poder potenciar el aprendizaje de todos a un mismo ritmo.
- Durante el transcurso del ciclo escolar, se implementó y trabajó con el uso adecuado del lenguaje matemático en sus diferentes ramas, logrando con ello que los alumnos extiendan su vocabulario matemático siendo así, más entendible y de fácil comprensión.
- Mediante el enfoque, resolución de problemas, en el área del álgebra, se permite que los alumnos, pongan en práctica el lenguaje matemático desarrollando la habilidad de transitar del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa, no sólo en ejercicios sino también en problemas matemáticos, y que sean capaces de reflexionar sobre sus propios conocimientos y la aplicación correcta de algoritmos.
- Las ecuaciones lineales son un pilar base de las matemáticas en el ámbito algebraico, por ser unos de los contenidos de mayor interés para los docentes y alumnos, debido a que permite ser el contenido de transición de la aritmética al álgebra.
- La base del álgebra es la aritmética, por lo tanto, se debe de trabajar con los alumnos en el uso del cálculo mental, adquiriendo con ello, la habilidad de poder realizar operaciones de manera rápida y precisa sin importar el nivel de dificultad que represente.

- Para la enseñanza del álgebra se requiere interpretar una expresión algebraica desde un punto de vista real y contextualizado, no hacer tanto énfasis en el aprendizaje de métodos algorítmicos.
- Se deben de retroalimentar los avances que vayan teniendo los alumnos en la adquisición de nuevos conocimientos del álgebra e incluso en cualquier área derivada de las matemáticas, mediante la explicación que dan los docentes, los mismos alumnos, van detectando cuáles fueron sus aciertos y cuáles fueron sus errores, lo cual resultaría ser más contrastante en cualquier algoritmo que el alumno desarrolle.
- La implementación de los problemas como estrategia de enseñanza no debe ser propuesta de manera aislada, debido a que si se hace de esta manera el estudiante se verá obligado a dejar la tarea ya que no posee las herramientas necesarias para darle una solución acertada. Lo que se debe hacer es familiarizar al estudiante con el contenido del problema.
- El conocimiento de que pueden ocurrir obstáculos, errores y dificultades en el proceso enseñanza-aprendizaje del álgebra se debe considerar por todos, y aún más con los alumnos ya que les permitirá ir mejorando gradualmente su habilidad en el pensamiento algebraico.

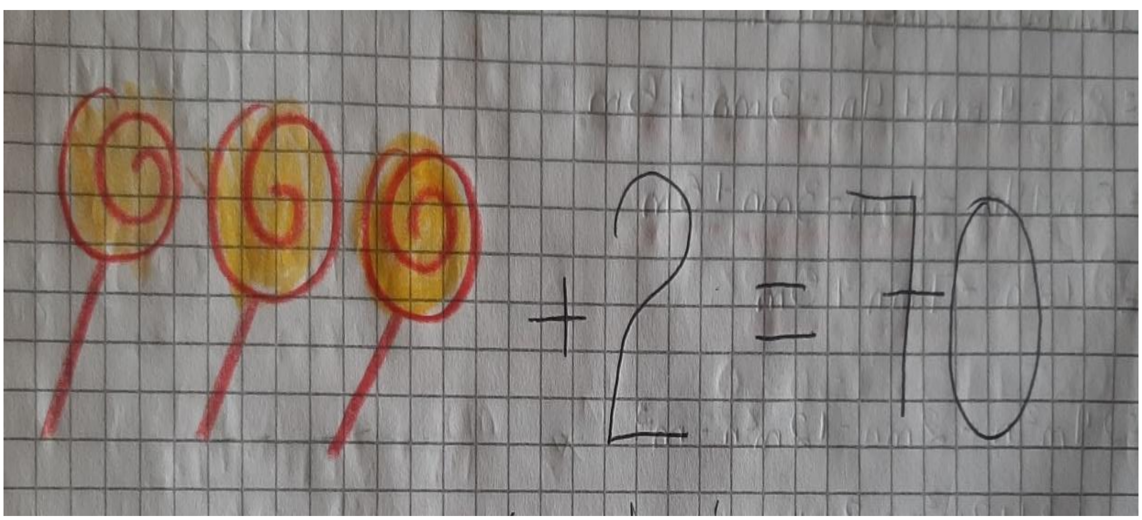
Mediante el desarrollo de la propuesta didáctica en los estudiantes de tercer grado grupo “D”, se logró identificar la importancia que tendría para el aprendizaje del álgebra que los mismos estudiantes ayudaran a un grupo pequeño de sus compañeros a explicarles con su “propio lenguaje” el contenido que se les dificulta.

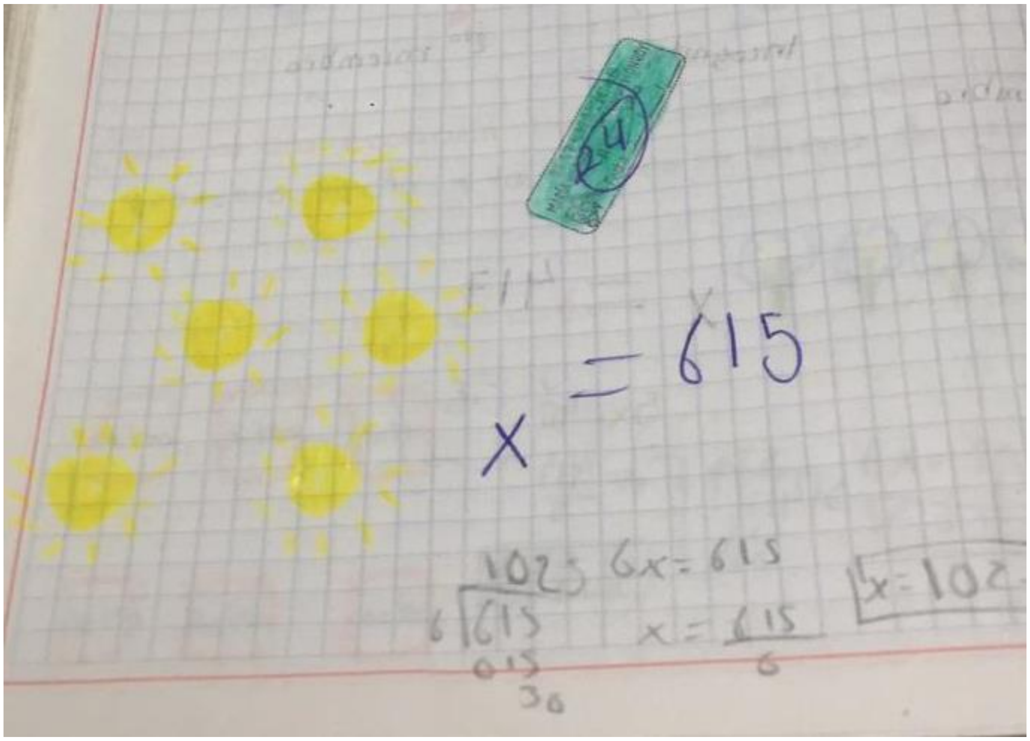
ANEXOS

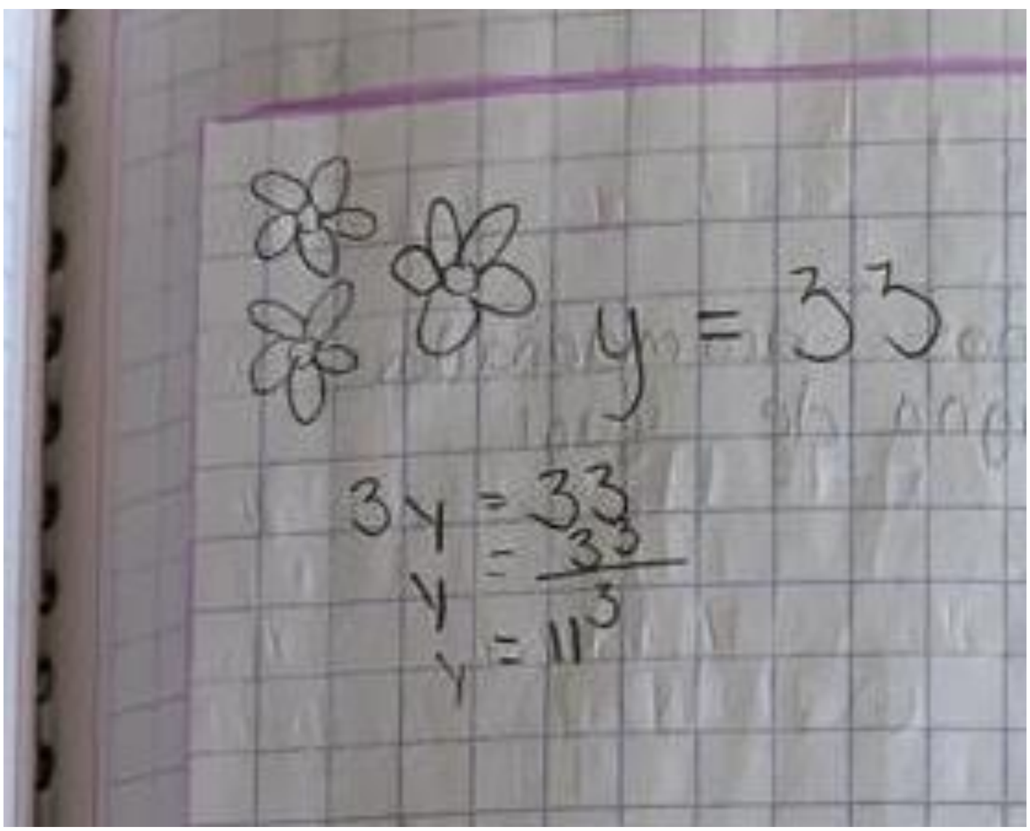
Anexo 1



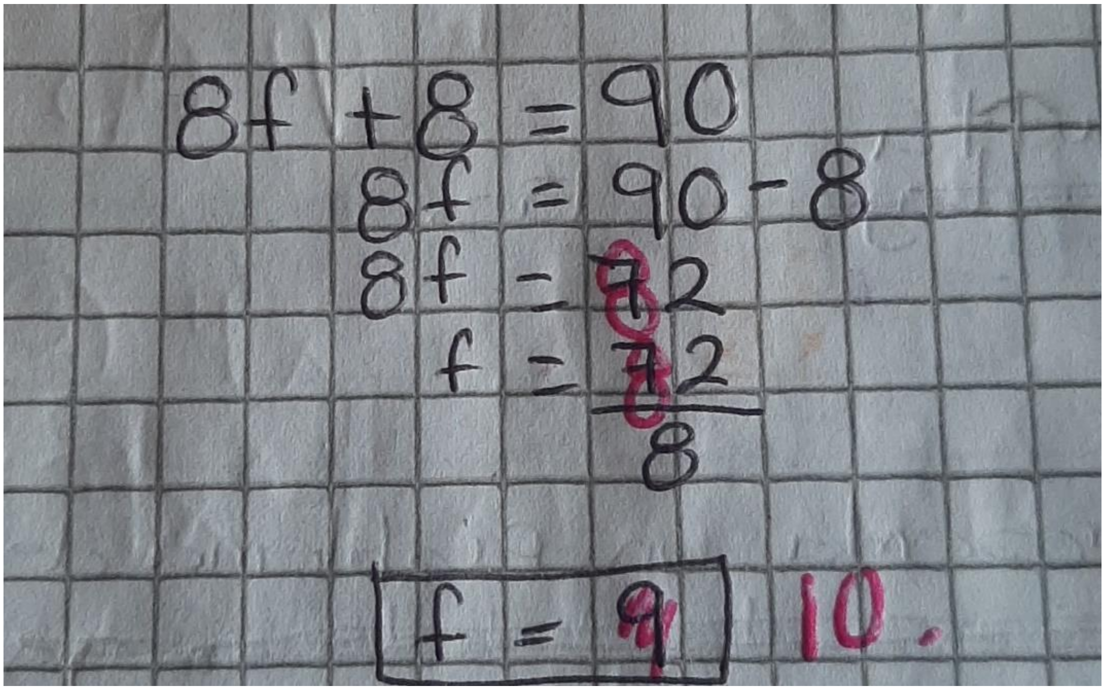
Anexo 1 Ejemplos del acercamiento al lenguaje matemático



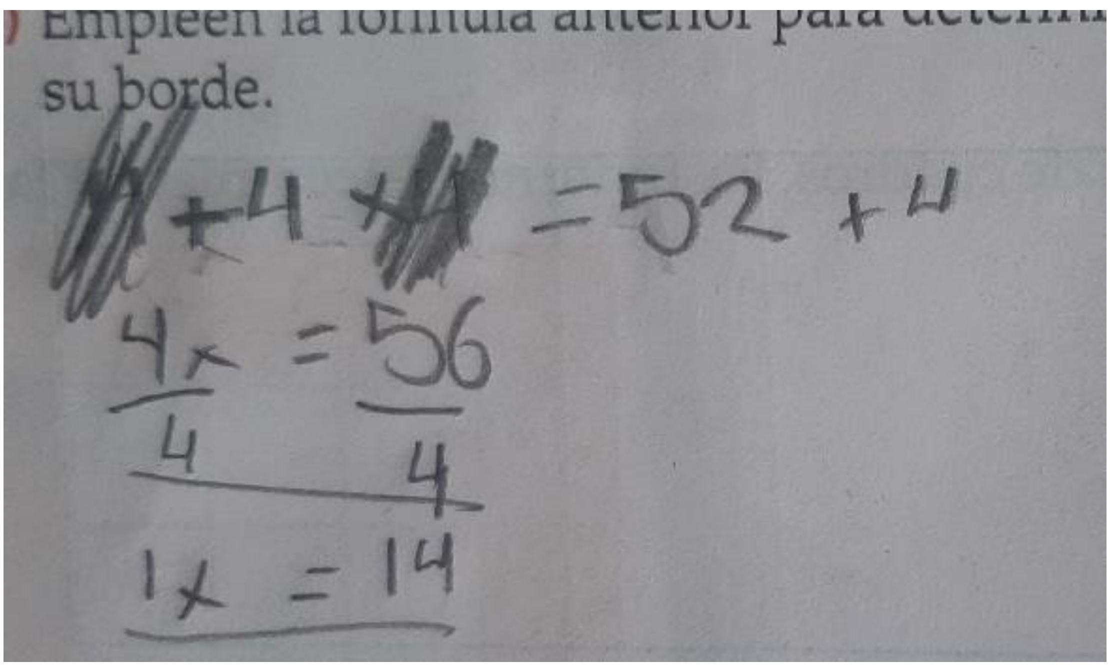

x = 615
6x = 615
x = 615/6
x = 102


y = 33
3y = 33
y = 33/3
y = 11

Anexo 2



Anexo 2 Ejemplos de errores con operaciones básicas



FUENTES DE CONSULTA

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático.* España: Biblioteca de uno.

Brousseau, G. (1993). Los obstáculos epistemológicos en los problemas de matemáticas. . *Investigación en didáctica de las matemáticas. Vol. 4.2*.

Citoler, S. D. (2000). *Las dificultades de aprendizaje: un enfoque cognitivo.* Málaga: ALJIBE.

CONCEPTO DEFINICIÓN. (29 de 08 de 2018). Obtenido de https://conceptodefinicion.de/lenguaje-algebraico/

Fillloy, E. (1999). Obastrucciones a la adquisición de conceptos algebaicos elementales y estrategias de enseñanza. *Actas de la novena reunión anual del PME, Utrecht*, 154-158.

Flores Torres, L., & Rincón Flores y Leo, E. (1998). *El ABP en la enseñanza de las matemáticas como estrategía didáctica para el desarrollo del pensamiento crítico en el nivel básico y modalidad telesecundaria.* México: Clame.

Flores López, W. O., & Auzmendi Escribano, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *CIENCIA E INTERCULTURALIDAD, Volumen 19, Año 9, No. 2, Julio-Diciembre, 2016.*, 64.

Garriga , J. (2011). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de etareas algebraicas por alumnos de primer grado en nuvel licenciatura* . Granada.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros.* Granada: REPRODIGITAL.

González Marí, J. L. (s.f.). *Competencias básicas en Educación Matemática.* Didáctica de la Matemática. UMA.

Jessefh Rafelsson, M., Moreno Guillermo , A., & Acevedo Barrios, A. (2014). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general. *La revista Venezolana en Educación*, 132.

Kieran , C., & Filloy Yague, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Obtenido de http://ddd.uab. es/pub/edlc/02124521v7n3p229.pdf.: http://ddd.uab. es/pub/edlc/02124521v7n3p229.pdf.

Lacasa, P. (2015). Perfumes de mujer: más allá de los "Objetivos de aprendizaje". *RED Revista de Educación a Distancia*, 2-7.

Lucchini, G., Cuadrado, B., & Tapia, L. (2006). *Errar no siempre es un error. Los errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática.* Obtenido de es.slidesare.net/ZeebaXtian/errar-no-es-siempre-un-error

Ma. de las Mercedes, P. M. (1999). La adquisición del lenguje algebraico, reflexiones de una investigación. *NÚMROS. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol 40*.

Marquina Quintero, J. R., Alejandro Moreno, G., & Acevedo Barrios, A. A. (2013). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*.

Medina, m. M., & Socas Robayna, M. M. (s.f.). *Algunos obstaculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico.* Obtenido de Algunos obstaculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Mendoza, F. R. (22 de 10 de 2019). *Resolviendo las Ecuaciones Lineales con el uso de Modelos.* Obtenido de http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagogico/Resolviendo%20las%20ecuaciones.pdf: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagogico/Resolviendo%20las%20ecuaciones.pdf

México, G. d. (2012). *Planes de Estudio*. Obtenido de Enfoque basado en Competencias: dgespe.sep.gob.mx

Monroy, M. G. (2019). *diario del profesor.* México.

Niss, M. (2011). Competencias y descripción de la asignatura. *Uddanneise 9*, 21-29.

Piug, L. (11 de julio de 2013). *poner un problema en ecuaciones.* Obtenido de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf: http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Polya, G. (1996). *Cómo plantear y resolver problemas .* México: Trillas.

Pontones, M. D. (2001). *Estrategias de enseñanza en la Escuela Secundaria: Un Estudio Etnográfico.* México: Departamento de Investigaciones Educativas.

Programas De Estudio 2011 Guía Para El Maestro. Educación Básica Secundaria, Matemáticas. (2011). México: SEP.

Remesal , A. (1999). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la escuela obligatoria: perspectivas de profesores y alumnos.* Barcelona.

Schoenfeld A. (1985). Sobre investigación pura y aplicada. *Mathematics Educational Journal of Mathematial Behavior, 10*, 263-276.

SEP. (2002). *Orientaciones Académicas para la Elaboración del Documento Recepcional. .* MÉXICO: SEP.

SEP. (2006). *Matemáticas 3. Recursos Didácticos.* México: SANTILLANA.

SEP. (2011). *Programas De Estudio 2011. Guia Para El Maestro.* MÉXICO: SEP.

SEP. (2019). *Matemáticas 3. Libro de recursos para el profesor.* México: SANTILLANA.

Socas Robayna, M. M., camacho Machin, M., & Hernández Dominguez, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraic en la enseñanza secundaria. *Interuniversitaria de Formación del Profesorado No. 32*, 73-86.

Socas, M. (1997). *La enseñanza del álgebra en la educación bligatoria. Aportes de la educación.* Obtenido de http://www.sinewton.org/numero/numeros/77/Apertura.pdf.: http://www.sinewton.org/numero/numeros/77/Apertura.pdf.

Torres. (2013). *La heurística en la enseñanza de la matemática.* Obtenido de http://edumate.wordpress.com/2013/10/28/la-heuristica-resolución-de-problemas-en-la-enseñanza-de-la-matemática/

GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

EDOMÉX
DECISIONES FIRMES, RESULTADOS FUERTES.

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense".

ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LA COMISIÓN DE TITULACIÓN CON FUNDAMENTO EN LOS LINEAMIENTOS PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE TITULACIÓN EXPIDE EL:

DICTAMEN No. 47

A la C. María Guadalupe Domingo Monroy

QUIEN PRESENTÓ SU DOCUMENTO RECEPCIONAL CONCLUIDO Y FUE APROBADO CONFORME A LOS CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LA COMISIÓN DE TITULACIÓN. POR LO CUAL, CONOCEDORES DE SU RESPONSABILIDAD SE LE INVITA A CONTINUAR CON LOS TRÁMITES ESTABLECIDOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS, FORTALECIENDO ASÍ LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN.

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., A 09 DE JULIO DE 2020.

Mtra. Luz María Serrano Orozco

Presidenta de la Comisión de Titulación

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y NORMAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN NORMAL Y FORTALECIMIENTO PROFESIONAL
SUBDIRECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL
ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

AV. DE LOS MAESTROS No. 1, SAN FELIPE DEL PROGRESO, COL. CENTRO, SAN FELIPE DEL PROGRESO, ESTADO DE MEXICO, C.P. 50640
TEL. (01 712) 10-4-21-93
normalsanfelipe@edugem.gob.mx

Elaboró

____
María Guadalupe Domingo Monroy

DOCENTE EN FORMACIÓN

Autorizó

Mtra. Perla Ramírez Escobar

Revisó

Mtra. Claudia Argelia Colín García **Mtra. Georgina González Ramírez**

Dictaminó

Mtra. Luz María Serrano Orozco
Presidente del Comité de Titulación