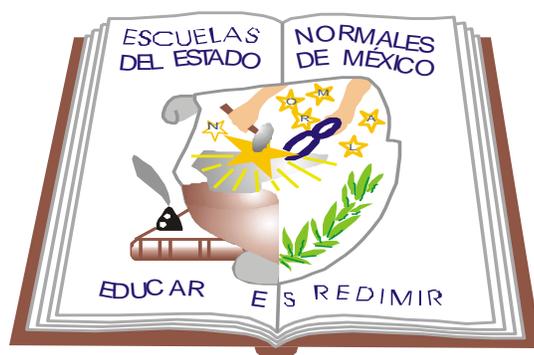


# ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

## LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS



### ENSAYO

#### EL CÁLCULO MENTAL COMO HERRAMIENTA PARA FAVORECER LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

*QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL  
PRESENTA:*

MARIANA GUADALUPE HERNÁNDEZ TAPIA

ASESOR:  
MTRO. ULISES ROMERO DE LA CRUZ

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., JULIO DE 2020

## ÍNDICE

Introducción .....	3
Tema de estudio .....	7
Preguntas centrales .....	12
Referentes teóricos y empíricos .....	14
Contexto .....	19
CAPÍTULO 1: Conocimientos conceptuales y procedimentales deficientes en los estudiantes .....	23
1.1. Conocimientos conceptuales y procedimentales matemáticos. ....	24
1.2. Conocimientos conceptuales y algorítmicos que hacen falta consolidar para la resolución de problemas matemáticos.....	27
CAPÍTULO 2: Conocimientos y procedimientos empleados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.....	34
2.1 Método de Pólya para la resolución de problemas .....	35
2.2 ¿Cuáles son los conocimientos y procedimientos que se utilizan dentro del aula de clases para la resolución de problemas matemáticos? .....	39
CAPÍTULO 3: El uso del cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas matemáticos .....	46
3.1 ¿Cómo favorece el uso del cálculo mental en la resolución de problemas matemáticos? .....	47
3.2 Importancia del cálculo mental en la enseñanza del currículo escolar ...	52
3.3 Estrategias de cálculo mental que ayudan en la resolución de problemas matemáticos .....	54
Conclusiones .....	61
Referencias .....	65

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas se encuentran en todo lo que miramos a nuestro alrededor, desde lo más simple hasta lo más complejo, si tan solo las personas se detuvieran a pensar en la construcción de las viviendas, el manejo de alguna empresa, la elaboración de un platillo, los medios de transporte, los aparatos electrónicos, el internet y toda la tecnología existente, se podrían dar cuenta de que sin las matemáticas nada de eso sería posible. Por ello, es importante conocer y valorar todos los beneficios que el ser humano puede obtener a partir del uso de las matemáticas y considerar que el mal uso o desconocimiento de esta ciencia podría dificultar el desarrollo pleno del individuo dentro de su contexto inmediato.

Con base en lo anterior, se presenta el análisis del “cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas matemáticos”, razón por la cual surge la necesidad de conocer las deficiencias que presentan los alumnos en cuanto al dominio de los conocimientos conceptuales y procedimentales básicos para la resolución de problemas matemáticos, mismos que han provocado en muchas ocasiones un bajo nivel de aprovechamiento y en el peor de los casos la deserción escolar.

Actualmente, las exigencias de la sociedad se inclinan a que sea la escuela la institución encargada de impulsar el desarrollo de las habilidades y capacidades que los alumnos requieren para desarrollarse dentro de la sociedad, de tal manera que al concluir su educación dispongan de los medios y las herramientas indispensables para afrontar los retos a los que se enfrentarán día con día.

Los alumnos a lo largo de su vida y desde las primeras etapas escolares desarrollan ciertas habilidades y conductas de acuerdo a su experiencia, las cuales se relacionan directamente con las situaciones buenas o malas que el estudiante enfrenta a partir de los métodos de enseñanza, el compromiso y responsabilidad por parte del docente a cargo o incluso la falta de atención. Regularmente en casi todos los niveles educativos se puede identificar un alto índice de fracaso escolar originado por las actitudes de rechazo que toman los alumnos frente a algunas asignaturas especialmente la de Matemáticas.

Como consecuencia, es necesario reconocer el papel tan importante que juegan las instituciones de educación, tanto primaria como secundaria en el desarrollo de las habilidades y en el

aprendizaje de los conocimientos básicos, con ello también se debe considerar la acción de los docentes quienes son parte clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje, pues son quienes deberían de generar ambientes favorables para el aprendizaje y adecuar un proceso de enseñanza que incluya métodos prácticos y divertidos que ayuden a los alumnos a desarrollar actitudes positivas en favor de las Matemáticas.

Con base en el perfil de egreso de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, se pretende que los maestros adquieran la formación matemática necesaria para que en el actuar docente ayuden a cada miembro de la comunidad a enfrentar y responder determinados problemas de la vida moderna, dependiendo en gran parte, de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica.

Las competencias que definen el perfil de egreso se agrupan en habilidades intelectuales específicas, dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria, competencias didácticas, identidad profesional y ética y capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela, todas estas competencias tienen como propósito formar a docentes capaces de brindar una educación de calidad, en la que se considere al alumno como el actor principal en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En esta asignatura y de acuerdo al Enfoque didáctico de las Matemáticas presente en el Plan y Programa de estudio 2011 se pretende que los estudiantes logren enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana, lo cual se consigue a partir de una metodología didáctica que consiste en utilizar una secuencia de situaciones problemáticas que propicien el interés de los alumnos por desarrollar diferentes formas de resolver los problemas, formulando argumentos que validen sus resultados.

En el presente trabajo se aborda una temática relacionada con el uso del cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas matemáticos en la escuela secundaria, con la finalidad de identificar las deficiencias conceptuales y procedimentales que dificultan el logro de los aprendizajes esperados en alumnos de tercer grado y a partir de ello diseñar estrategias que contribuyan a desarrollar en los estudiantes las habilidades básicas del cálculo mental que les ayudarán en la resolución de problemas en el ámbito académico y en su vida cotidiana.

La propuesta didáctica que se diseñó para atender la problemática identificada tiene como propósito lograr que los estudiantes analicen y reflexionen acerca de los procesos y conocimientos con los que cuentan al momento de resolver problemas matemáticos, asimismo se pretende que mediante la ejercitación del cálculo mental los alumnos desarrollen la capacidad para descubrir y generar nuevas formas de resolver tales problemas.

En un primer momento, se hace referencia al tema de estudio, las preguntas que surgieron a partir de éste, los referentes teóricos y empíricos que se tomaron en cuenta para el análisis y el contexto escolar, haciendo énfasis en las características escolares y grupales así como los aspectos que influyen en la realización de las actividades diarias, las cuales fueron consideradas como la base para el desarrollo del trabajo docente que se llevó a cabo en la asignatura de Matemáticas en tercer grado de secundaria durante diferentes periodos de tiempo.

Analizando la importancia que tiene el dominio de los conocimientos conceptuales y procedimentales en la resolución de problemas, en el primer capítulo se identifican las deficiencias que tienen los estudiantes respecto a estos dos conocimientos, los cuales se identificaron a partir de un examen diagnóstico y diversas estrategias desarrolladas durante las sesiones de clase, asimismo se destaca la importancia de éstos, ya que su dominio o desconocimiento influye en el aprendizaje de contenidos escolares posteriores y en la acción ante diferentes problemáticas de la vida cotidiana.

A partir de la identificación de los conocimientos conceptuales y procedimentales deficientes en los estudiantes resulta importante conocer cómo es que los alumnos aplican cada uno de éstos al momento de solucionar problemas, pues sólo serán importantes en la medida en que los alumnos los apliquen de manera razonada, de ahí la importancia de conocer los procesos de estudio que realizan los estudiantes. En este sentido, el segundo capítulo menciona aspectos relacionados a la solución de problemas, es decir, la forma de operar y razonar de los estudiantes, los cuales se obtuvieron a través de la solución de diferentes problemas matemáticos realizados en diferentes sesiones de clases.

El trabajo intelectual fundamental, en el proceso de resolución de problemas, se apoya más en el razonamiento que en la memorización, sin embargo, esto no significa que los ejercicios de práctica o el uso de la memoria para guardar cierta información no sean importantes, al

contrario, son procedimientos necesarios para que los alumnos puedan intervenir en problemas más complejos, de ahí la importancia de promover actividades que permitan a los estudiantes poner en marcha el máximo de sus habilidades y conocimientos al momento de resolver problemas, sin dejar de lado el razonamiento y la argumentación de resultados.

En un tercer capítulo se menciona la importancia del planteamiento de estrategias didácticas que desarrollen habilidades y apoyen el proceso de resolución de problemas, considerando como estrategia principal el uso del cálculo mental, el cual regularmente se conoce como un proceso mediante el cual el alumno lleva a cabo un procedimiento algorítmico o no algorítmico de una operación aritmética en el que no necesariamente se utiliza una escritura formal, con la intención de obtener un resultado rápido y confiable.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas luego de aplicar y analizar la temática abordada en la escuela secundaria, retomando cada una de las experiencias de los estudiantes y los resultados observados después de haber trabajado diversas estrategias relacionadas al uso del cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas.

## **TEMA DE ESTUDIO**

El cálculo mental se define como una actividad que cotidianamente se realiza fuera del aula de clases y no necesariamente requiere de un lápiz y papel, y en muchas ocasiones ni siquiera pretende que se generen resultados exactos basta con la aproximación que se realiza; de acuerdo a Gómez (1989) se caracteriza como un cálculo que es de “cabeza”, se puede hacer rápidamente, se apoya de un conjunto limitado de hechos numéricos y requiere ciertas habilidades como conteos, recolocaciones, compensaciones, descompensaciones, etc.

El objetivo del cálculo mental no es generar en los alumnos la mecanización de operaciones, fórmulas y algoritmos, más bien pretende ampliar en ellos las habilidades matemáticas que les ayuden a simplificar procesos a la hora de resolver problemas en cualquier área de las matemáticas, tales como, la aritmética, la geometría, la geometría analítica, la trigonometría, el álgebra, la estadística, entre otras. Además, el dominio de las habilidades de cálculo mental garantiza a los alumnos poder resolver problemas de su vida cotidiana y desarrollarse de manera plena en cualquier contexto que se les presente.

### **Descripción del problema de estudio**

El logro de los aprendizajes matemáticos en alumnos de educación secundaria permite a cada uno de ellos resolver problemas en su vida diaria, amplía su pensamiento lógico matemático, promueve el desarrollo de competencias matemáticas en educación básica, las cuales permitirán al alumno reflexionar y actuar de manera crítica ante diferentes situaciones de su contexto real.

Sin embargo, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos no son acciones sencillas, ya que requieren, en primer lugar, del compromiso y la disposición por parte de los alumnos para trabajar de manera correcta en el aula de clases y, en segundo lugar, de una planeación estratificada diseñada por el docente, la cual ayudará a comprender y reflexionar sobre los procesos realizados en la resolución de problemas matemáticos.

Dentro de los procesos utilizados por los estudiantes para la resolución de problemas en la asignatura de matemáticas existen múltiples dificultades que obstaculizan el proceso de aprendizaje, y por consiguiente generan en los alumnos deficiencias para resolver problemas de la asignatura y de la vida diaria, lo cual afectará su desempeño académico y social.

Derivado de lo anterior y considerando las observaciones realizadas, en la Escuela Secundaria Federalizada “Lic. Isidro Fabela”, a alumnos del 3° grado grupo E, durante la primer semana de clases del ciclo escolar 2019-2020, en la que además se aplicó un examen diagnóstico y posteriormente se realizaron prácticas de conducción durante cuatro semanas, tomando como evidencias las libretas, diario de clase, exámenes y cuestionarios realizados, se detectó que el principal problema que enfrentan los alumnos para la resolución de problemas refiere al cálculo de operaciones básicas, a continuación se presentan evidencias que describen de mejor manera el problema detectado:

### **Resolución de problemas que impliquen el uso de estrategias de cálculo mental.**

Una de las principales funciones de la escuela y de los profesores es brindar situaciones a los estudiantes en donde utilicen los conocimientos previos que tienen para resolver determinados problemas, el cálculo mental es una actividad que se presenta en todas las áreas de las matemáticas y, por consecuencia, debería de ser una estrategia didáctica que los estudiantes conocieran y aplicaran en cada una de las situaciones que se les presentan para la resolución de problemas.

Sin embargo, para la mayoría de los estudiantes el cálculo mental no es más que la memorización de las tablas de multiplicar y el conocimiento de los algoritmos para la adición, la sustracción y el cociente entre dos números. Todo lo anterior da como resultado la solución errónea de problemas que impliquen relacionar las operaciones básicas y los contenidos de las diferentes áreas de las matemáticas, para visualizar de mejor manera lo descrito anteriormente podemos analizar los siguientes problemas resueltos por los alumnos:

*Se aplicó examen diagnóstico que incluía resolver operaciones básicas como la siguiente:*

*Resolver la siguiente operación:*

$$1 + 1 + 2 =$$

Al analizar la respuesta dada por los alumnos se puede deducir que, difieren en el conocimiento del algoritmo para solucionar problemas que impliquen la adición de números enteros ya que al examinar las respuestas dadas por los estudiantes se encontraron respuestas como la siguiente:

Respuestas equivocadas  
2.  $1 + 1 + 2 = 4$  (5)

Figura 1: Respuestas del examen diagnóstico, correspondientes a un estudiante elegido de manera aleatoria.

Se aplicó cálculo mental durante la sesión de clases y una de las indicaciones fue:

Resolver  $(3)^2 =$

Al analizar la respuesta dada por los alumnos se puede deducir que, la mayoría de ellos carecen de los conocimientos conceptuales básicos para solucionar problemas que impliquen el uso de potencias ya que el primer resultado que se dio en colectivo fue:

$$(3)^2 = 6$$

Es posible considerar que los estudiantes hayan dado un resultado erróneo, ya que la manera de ejecutar esta operación fue multiplicar el número que se encuentra en paréntesis (3) por el exponente (2), sin embargo, el procedimiento correcto para realizar esta operación era multiplicar el número que se encontraba entre paréntesis (3) por sí mismo de acuerdo al número que indicaba el exponente (2).

Cabe destacar que al solicitar a los estudiantes que argumentaran sus resultados, se identificó que no ubican los elementos que componen a una operación con potencias, pues durante la explicación proporcionada por los estudiantes se observó que no distinguían la base y el exponente que conformaban la operación que se les había solicitado resolver.

Se planteó el siguiente problema a los alumnos:

A partir de la expresión algebraica  $y = 2x - 1$ , encontrar los valores de  $y$  cuando  $x = -2, -1, 0, 1$  y  $2$

$x$	$y = 2x - 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Al revisar en colectivo las respuestas para el problema anterior, una alumna dio como resultados:

*A partir de la expresión algebraica  $y = 2x - 1$ , encontrar los valores de  $y$  cuando  $x = -2, -1, 0, 1$  y  $2$*

$x$	$y = 2x - 1$
-2	-3
-1	-1
0	0
1	2
2	5

Sin embargo, se identificó que aproximadamente más del 75 % de los alumnos, mostraban cierta recurrencia en sus resultados, a continuación, se exponen evidencias fotográficas de algunos resultados generados por los estudiantes, las cuales se seleccionaron de manera aleatoria.

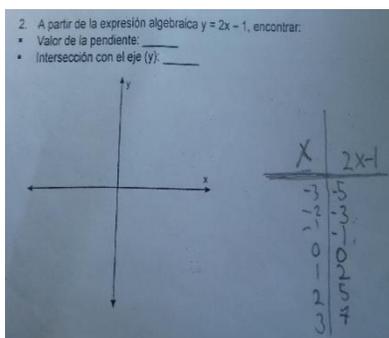


Figura II: Resultados de un estudiante en el que se desconoce el algoritmo utilizado para llegar a la solución.

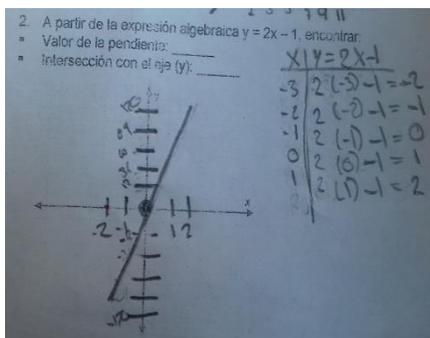


Figura III: Resultados de un estudiante en el que se identifica el algoritmo utilizado, pero con respuestas erróneas

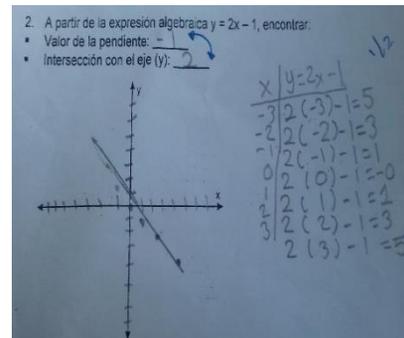


Figura IV: Resultados de un estudiante que domina el algoritmo, pero desconoce las leyes de los signos, por lo tanto, obtiene resultados erróneos.

A partir de la solución dada por la alumna y en contraste con los resultados generados por el resto del grupo, se puede deducir que, los estudiantes conocen la forma aritmética de operar este tipo de funciones, sin embargo, al encontrarse con números de diferente signo aún no se reconocen los procedimientos que se tienen que realizar para obtener el resultado correcto, ya que al solicitar a la alumna que diera la justificación de sus resultados, ella argumentó que:

*Primero sustituí el valor de  $x$  que ya está definido y luego lo multipliqué por el número 2 que indica la función y después resté el 1”*

Con la justificación de la alumna y las respuestas que se generaron en plenaria se confirma que, los estudiantes presentan deficiencias en operaciones básicas que impliquen el uso de diferentes signos.

La problemática descrita anteriormente muestra las debilidades que la mayor parte del grupo presenta respecto al dominio de las habilidades algorítmicas y conceptuales necesarias para la resolución de problemas matemáticos. Por esta razón la propuesta de intervención centra su contenido en consolidar el dominio de las habilidades matemáticas indispensables para la resolución de problemas en alumnos del tercer grado grupo E, de la Escuela Secundaria Federalizada “Lic. Isidro Fabela”.

Con lo anterior se propone analizar los procedimientos que realizan los alumnos al obtener soluciones equivocadas al efectuar cálculos para la resolución de problemas y atender tal dificultad a través del uso del cálculo mental, no como un proceso mediante el cual el alumno debe memorizar reglas sino como una acción con la que se realicen cálculos numéricos de manera sencilla, espontánea y natural.

## **PREGUNTAS CENTRALES**

Las diferentes preguntas que a continuación se presentan, son la base fundamental para la comprensión del tema de estudio, las cuales surgen a partir de las observaciones y el trabajo docente realizado, el cual enfatiza en el desarrollo de habilidades matemáticas indispensables para la resolución de problemas, usando como herramienta principal el uso del cálculo mental y la metodología de George Pólya (1965).

La resolución de problemas implica que los estudiantes comprendan, identifiquen y apliquen conocimientos de cualquier tipo para poder dar solución al planteamiento asignado, por ello es importante conocer ¿Qué conocimientos aritméticos se identifican en los alumnos para la resolución de problemas matemáticos?, en el área de matemáticas los conocimientos aritméticos juegan un papel determinante al momento de resolver problemas, permiten realizar los cálculos y operaciones correspondientes que guiarán a un resultado determinado, sin embargo, la utilidad de este tipo de conocimientos no se reduce únicamente al ámbito educativo, sino también a situaciones de su vida real.

El objetivo de la propuesta didáctica se basa en que todos los alumnos logren dominar y aplicar las habilidades matemáticas como el cálculo mental con la finalidad de que puedan dar solución a problemas de cualquier rama de las matemáticas. Sin embargo, nada de esto sería posible sin antes identificar ¿Cuáles son los conocimientos conceptuales y algorítmicos que hacen falta consolidar para la resolución de problemas matemáticos?, la identificación de estos dos aspectos es fundamental para conocer el nivel de desempeño de cada uno de los alumnos y a partir de ello diseñar las estrategias pertinentes que ayuden a consolidar el máximo de los saberes matemáticos útiles para la resolución de problemas.

Por lo anterior, se pretende que los alumnos consoliden el dominio de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, cocientes, radicales y potencias) con números enteros, decimales y fraccionarios, mismas que les servirán para realizar cálculos y aproximaciones al momento de resolver problemas de aritmética, geometría, geometría analítica, trigonometría, álgebra, estadística, entre otras.

De acuerdo al enfoque didáctico planteado en el Programa de estudios 2011, se propone organizar un trabajo docente basado en la resolución de situaciones problemáticas que

despierten el interés y la motivación de los alumnos y los estimulen a analizar, reflexionar elegir y encontrar diferentes formas de resolver problemas, siendo importante reconocer ¿Cuáles son los procedimientos que se realizan dentro del aula de clases en la resolución de problemas matemáticos?, con el objetivo de identificar los conocimientos matemáticos presentes en los estudiantes y la forma en la que los utilizan al momento de solucionar cualquier tipo de problema matemático.

Asimismo, considerando el enfoque didáctico y con base en los resultados obtenidos a partir del trabajo docente con los estudiantes de secundaria, se reflexiona que para poder generar un aprendizaje significativo es necesario hacer uso de estrategias didácticas que ayuden a los estudiantes en la resolución de problemas, específicamente en el uso de los conocimientos conceptuales y procedimentales más importantes, como las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, división, radicales y potencias), con la finalidad de que los estudiantes puedan realizar cálculos matemáticos de manera sencilla y espontánea, sin perder la veracidad de los resultados.

En este sentido, se propuso como estrategia didáctica el uso del cálculo mental en el aula de clases con el objetivo que impulsar en los estudiantes las habilidades básicas para realizar cálculos matemáticos de manera fluida y correcta, por ello es importante analizar ¿Cómo favorece el uso del cálculo mental la resolución de problemas matemáticos?, con la intención de identificar los beneficios que se obtienen a partir del uso de esta estrategia y su influencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

## REFERENTES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS

### **Problemas matemáticos**

Los problemas son situaciones que requieren que las personas respondan con procedimientos nuevos, casi permanentemente enfrentamos "problemas" en nuestra vida cotidiana, por lo que resolver un problema implica realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad rutinaria, por lo que en otras palabras resolver un problema es darle solución a la situación existente.

En el área de las matemáticas esta definición no queda excluida; se puede precisar que un problema matemático es una incógnita acerca de un contenido específico que debe resolverse a partir de un conocimiento del mismo tipo que hay que descubrir. Para resolver un problema de esta índole, se deben llevar a cabo ciertos pasos que permitan llegar a la respuesta y que, además, sirvan como demostración del razonamiento.

En otras palabras, un problema matemático plantea una pregunta y determina ciertas condiciones que se tienen que respetar para poder resolverlo, por otra parte, requiere que se identifiquen los conocimientos conceptuales y algorítmicos que, cumpliendo con las condiciones establecidas y aplicados de manera correcta, ayuden a encontrar la solución de la incógnita, mismos que ayudarán a justificar y argumentar los resultados encontrados.

Para Schoenfeld (1985), el término problema está ligado con la relatividad del esfuerzo que un individuo realiza cuando trata de resolver un problema, es decir, que mientras para algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo resolver un problema, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario. Sin embargo, el hecho de que exista un problema, en las Matemáticas, lo verdaderamente fundamental es la relación o interacción entre el individuo y la tarea que tiene que realizar.

### **Resolución de problemas.**

La resolución de problemas es considerada como una actividad de especial importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por su valor formativo. Lo esencial para comprender la característica más representativa de esta actividad está en la idea siguiente: resolver un problema

es aquello que se hace para dar solución a una necesidad, pues si no existe una necesidad difícilmente se resolverá un problema.

En consecuencia, la resolución de problemas matemáticos en el aula rompe con la idea de que sea una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias ya dominadas por los estudiantes y deja claro que el reto principal es que el individuo se enfrente a situaciones que lo pongan a prueba, por su novedad y por la diversidad de posibilidades que se obtienen al cambiar las condiciones en que se manifiesta esa situación.

Santos Trigo (1997), afirma que,

Quando los estudiantes encuentran un ambiente que les permite pensar y razonar acerca de las Matemáticas y comunicar sus resultados a otros sobre la base de un argumento, se enfrentan a la necesidad de organizar y presentar sus ideas de una forma convincente. (p.73)

De ahí la importancia de implementar el uso de propuestas didácticas que bajo el enfoque “resolución de problemas” ayuden a los estudiantes a desarrollar un pensamiento crítico que les permita razonar y comunicar información matemática que con base en un argumento valide sus resultados de manera convincente. A partir de lo anterior, es necesario analizar una metodología que ayude a los estudiantes a solucionar problemas de un modo más eficaz, y que, además, les permita analizar los procedimientos realizados para llegar a la solución de dicho problema en caso de errores.

Pólya (1965), plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida diaria, y para lo cual establece una serie de fases que contribuyen a ser más eficiente el proceso de resolución, las fases propuestas son: la comprensión del problema, diseño del plan, ejecución y verificación de la solución obtenida, mejor conocidas como “método de los cuatro pasos”.

- Comprensión del problema:

En esta fase el alumno tiene que comprender el problema apoyándose de las siguientes preguntas, ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos? y ¿Cuáles son las condiciones?

- Concepción de un plan

En esta etapa el estudiante debe descubrir las relaciones entre los datos existentes y la incógnita, aquí el alumno puede tomar en cuenta algún problema familiar que tenga una incógnita igual o parecida que le permita llegar a la solución, si, por el contrario, el problema implica procedimientos totalmente nuevos, deberá obtener un plan de resolución.

- Llevar a cabo el plan

Este es el momento exacto en que el alumno lleva a cabo su plan de resolución y comprueba cada paso realizado, en esta fase se puede ayudar de preguntas como ¿Puedo ver claramente que el paso es correcto? y ¿Puedo demostrar que lo que hice es correcto?

- Revisión

Como última etapa se tiene que examinar la solución obtenida, con la finalidad de comprobar el resultado y el razonamiento.

### **Cálculo mental**

Desde hace tiempo el cálculo mental se enseñaba como reglas que los alumnos debían de memorizar y aplicar a la hora de resolver problemas, sin embargo, en la actualidad se ha asociado con cálculos numéricos mentales sencillos que los estudiantes deben realizar conforme a su experiencia, sus conocimientos numéricos y la naturaleza del problema que se pretende resolver. De acuerdo a Vázquez (2001), “El cálculo mental es utilizado como un sistema de conteo espontáneo y variado por las personas” (p. 9), es decir, que no requiere estrictamente de una metodología que ayude a encontrar los resultados.

Asimismo, según Vázquez (2001),

El cálculo mental se apoya en un grupo limitado de hechos numéricos básicos como son la “automatización” del conocimiento de las tablas, estrategias de conteo, descomposiciones compensaciones y redondeo de números, estrategias heurísticas, etc., que buscan alterar o sustituir los datos iniciales de un problema por otros más cómodos o más fáciles de usar. (p. 9)

Por lo tanto, es importante reconocer que el objetivo primordial del cálculo mental no es generar en los alumnos la mecanización de operaciones, fórmulas y algoritmos, más bien pretende ampliar en ellos las habilidades matemáticas que les ayuden a simplificar procesos matemáticos,

como la ejecución de las diferentes operaciones básicas a la hora de resolver problemas y que, además, tengan el razonamiento necesario para argumentar y defender la veracidad de sus resultados.

Por otra parte, es esencial considerar el cálculo mental como una actividad que cotidianamente se realiza fuera del aula de clases y no necesariamente requiere de un lápiz y papel, en muchas ocasiones ni siquiera pretende que se generen resultados exactos, basta con la aproximación que se realiza; a lo anterior Gómez (1989) lo caracteriza como un cálculo que es de cabeza, se puede hacer rápidamente, se apoya de un conjunto limitado de hechos numéricos y requiere ciertas habilidades como conteos, recolocaciones, compensaciones, descompensaciones, etc.

Con base en lo anterior se puede determinar que los resultados que se obtienen a partir de las estrategias aplicadas sobre cálculo mental en la resolución de problemas muestran que los procedimientos manejados en esta actividad son herramientas muy valiosas que pueden utilizarse en la enseñanza de los contenidos matemáticos. Para fortalecer la idea anterior, Vázquez (2001), establece que:

Los métodos de cálculo mental tienen un gran valor didáctico para ser utilizados en la clase de matemáticas ya que, aparte de dejar intrigados a los estudiantes despiertan su curiosidad y estimulan el desarrollo de factores intelectuales como la atención, la perseverancia, el interés, la memoria a corto y mediano plazo, etc., tan necesarias en el estudio de otras ciencias. (p. 10)

En referencia a lo anterior, se puede confirmar que el uso del cálculo mental es una estrategia didáctica que beneficia de manera significativa los procedimientos que se realizan para resolver problemas y además permite comprender los conocimientos conceptuales y algebraicos que se requieren para llegar a la solución deseada.

Por otra parte, es importante analizar las características más representativas de las estrategias de cálculo mental para poder aplicar las estrategias y procedimientos que mejor destaquen en esta actividad. Comúnmente al escuchar la palabra cálculo mental, inmediatamente imaginamos que la actividad consiste en realizar operaciones matemáticas de manera mental y por consiguiente nos lleva a crear un estado de inseguridad y preocupación por los procedimientos que se llevarán a cabo.

Sin embargo, Vázquez (2001), establece que las características fundamentales del cálculo mental son las siguientes: es una actividad mental que con frecuencia no requiere de algoritmos escritos, a menudo dispone de métodos variables, lo que significa que las personas pueden seguir diversos caminos para llegar a la misma respuesta, permite una gran flexibilidad pues un mismo problema puede ser resuelto por los estudiantes mediante diferentes estrategias y finalmente se considera como un proceso holístico en donde el sujeto ve y comprende la totalidad del problema.

Finalmente, como aspecto no menos importante, es primordial señalar que el uso del cálculo mental en el aula de clases no se limita al dictado y solución de operaciones básicas, por el contrario, es una estrategia que permite diseñar actividades lúdicas en las que los estudiantes por medio del juego y el entretenimiento pueden consolidar los conocimientos conceptuales y algorítmicos que les ayuden en la resolución de problemas.

## **CONTEXTO**

### **Contexto local**

La zona donde se ubica la escuela es urbana, se habla español y algunos alumnos entienden mazahua y otomí. La mayoría de las familias es de clase media baja, los padres de familia se dedican al comercio, agricultura, a prestar servicios de transporte, obreros, entre otros. Son de costumbres arraigadas por lo que en algunas fechas del año los alumnos se ausentan de clases, como lo es el 12 de diciembre, donde una gran parte de ellos asisten a la peregrinación a la basílica de la Virgen de Guadalupe.

Los medios de comunicación van desde el correo postal, casetas telefónicas, centros de envíos y mensajería, cibercafés, una estación de radio, servicio de agua, drenaje, luz, zonas deportivas, centros culturales, bibliotecas públicas, alameda y un cine teatro. Los servicios de transporte con los que cuenta la cabecera de Atlacomulco son una terminal de autobuses y varias bases de taxis con rutas hacia las comunidades aledañas de los distintos municipios.

### **Contexto escolar**

La Escuela Secundaria Federalizada “Lic. Isidro Fabela” C. C.T 15DES0001R, clave 154-1, zona 30, sector 8, se ubica en Juan N. Reséndiz No. 1 Col. centro Atlacomulco, dentro de la cabecera municipal. El horario escolar del Turno Matutino es de 7:00 a 13:00 hrs. El turno cuenta con 34 docentes distribuidos en las diferentes asignaturas, dos directivos, un director y una subdirectora, tres prefectos, un trabajador social, siete administrativos, un contralor, cuatro conserjes. La matrícula del ciclo escolar 2019-2020 es de 705 alumnos 354 mujeres y 353 hombres.

Dentro de la infraestructura la institución tiene una barda perimetral, una dirección, oficinas administrativas, 18 salones, dos laboratorios, una biblioteca, dos aulas de medios, una sala de maestros, seis aulas para talleres tecnológicos, tres prefecturas, seis baños, una papelería y una tienda cooperativa escolar. Los salones cuentan con butacas para cada alumno, pizarrón, escritorio, silla para el docente, algunos con proyector (ocho) e iluminación adecuada. La escuela está equipada con servicios de agua potable, bebederos, drenaje, luz e internet para el área administrativa, telemática y biblioteca.

En referencia a la matrícula de la institución se pudo encontrar que un 65% proviene de comunidades aledañas, un 25% de alumnos proviene de la cabecera municipal y el 10% viven en Atlacomulco.

La preparación académica de los padres va desde la primaria, secundaria, preparatoria y universidad. La mayor parte de estos se encuentran con escolaridad de preparatoria, lo cual facilita que estén más pendientes en las tareas de sus hijos y puedan apoyar a realizarlas. El 65% de los alumnos proviene de una familia nuclear, compuesta por padre, madre e hijos, el 30% es miembro de familias monoparentales (esto debido a que muchos adolescentes únicamente viven con su papá o su mamá), también existen familias reconstruidas (los padres se casan con nuevas parejas) y, por último, el 5% de los alumnos son de familias ampliadas, dado que los jóvenes viven con abuelos o tíos debido a la migración que hay por parte de los padres.

Es importante mencionar que la participación de la familia en la escuela es pasiva; acuden y aceptan en la mayoría de los casos lo que se les propone, aunque algunos de los padres o tutores que trabajan todos los días para proveer el sustento del hogar dejan de lado las visitas escolares perjudicando el seguimiento en el desarrollo educativo de sus hijos.

### **Contexto grupal**

El grupo de 3° “E” está conformado por 37 alumnos, 21 mujeres y 16 hombres donde el rango de edad es de 13 a 14 años; una alumna de 15 años y otra de 12 años. Un 60 % de ellos vive en Atlacomulco y el resto en las comunidades aledañas: Acambay, San Lorenzo, Ejido del Tunal Nenaxi, La Palma, San Miguel Tenochtitlán, San Francisco Tepeolulco, Bassoco, Cuendó y Bombatevi.

La mayoría de los alumnos viven con ambos padres, y sólo un 10 % está conformado por familias monoparentales. En cuanto al ámbito laboral el 70% de los padres son empleados de alguna empresa o dependencia, y amas de casa; el resto de ellos son doctores, profesores, campesinos, comerciantes y un pensionado. El nivel máximo de estudios que más prevalece es el nivel secundaria, seguido del nivel preparatoria. Aproximadamente ocho papás mencionan niveles de estudio en Licenciatura, y sólo cuatro mencionan tener un postgrado.

Los promedios que predominan en el grupo son en su mayoría entre 7 a 8.5. Un 40% tiene promedio entre 8.7 a 9.8. Las asignaturas que más les agradan desde primer grado hasta la fecha son: Ciencias, Español, Historia, Artes, y Educación Física. Las que menos agradan son: Matemáticas, Inglés y Geografía. Las aptitudes sobresalientes que predominan son la práctica de algún deporte, tocar un instrumento (flauta, guitarra y violín), y la declamación. Ningún alumno menciona trabajar durante la tarde o los fines de semana; mencionan que llevan a cabo algunas actividades extraescolares como: box, fútbol, tae kwon do y basquetbol. Así mismo, la mayoría suelen escuchar música mientras estudian o realizan su tarea.

# Capítulo 1

## **Capítulo 1: Conocimientos conceptuales y procedimentales deficientes en los estudiantes**

El cálculo mental es un proceso mediante el cual el alumno lleva a cabo un procedimiento algorítmico o no algorítmico de una operación aritmética, en el que no necesariamente se utiliza una escritura formal, con la intención de obtener un resultado rápido y confiable. Asimismo se considera al cálculo mental como una parte fundamental de las matemáticas, ya que gracias a él, las personas pueden encontrar las herramientas necesarias para responder de forma flexible y adecuada a distintas situaciones de la vida cotidiana.

Tradicionalmente la enseñanza del cálculo mental se ha enfocado en la repetición de operaciones para lograr resolverlas lo más rápido posible “en la cabeza“, sin necesidad de utilizar lápiz y papel. Sin embargo, se considera que ser bueno en cálculo mental significa algo más que memorizar una serie de hechos numéricos, es decir, para ser ágil en el cálculo hay que ser capaz de relacionar, entender y dominar una gran cantidad de ideas y conceptos.

Por lo tanto, el desarrollo del cálculo mental tiene un papel fundamental en la vida diaria y escolar de todas las personas, el dominio de estas habilidades provee de las herramientas necesarias para resolver cálculos y problemas de la vida cotidiana. Sin embargo, su práctica en la escuela no garantiza que se consiga un aprendizaje significativo en cada uno de los alumnos, por ello la necesidad de que los docentes diseñen y apliquen situaciones didácticas que impulsen el logro de aprendizajes significativos en los estudiantes, que tengan como objetivo el dominio de las habilidades básicas del cálculo mental.

Ligado a lo anterior, se considera importante que los estudiantes dominen y apliquen la mayoría de los contenidos temáticos expresados en los Planes y programas de estudio de Matemáticas para educación básica, no obstante, aún con los múltiples esfuerzos que día con día hacen los maestros para lograr el máximo de los aprendizajes en sus estudiantes, todavía sobresalen conocimientos que los alumnos no logran asimilar de manera correcta y que en el peor de los casos prevalecen durante los ciclos escolares posteriores.

De manera específica, de acuerdo a lo mencionado anteriormente, es necesario consolidar en los estudiantes el dominio de las habilidades matemáticas referidas a la elaboración y utilización de

procedimientos algorítmicos a partir algoritmos conocidos y las referidas a la formación y utilización de conceptos y propiedades indispensables para la resolución de problemas, lo que implica atender los procedimientos que realizan los alumnos al efectuar cálculos para la resolución de problemas, es decir, el dominio de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, cocientes, radicales y potencias) con números enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos.

Tal problemática se encuentra estrechamente relacionada con la escasez de la práctica de los cálculos de manera mental y al dominio superficial de las operaciones básicas aprendidas en la educación primaria y fortalecidas en la educación secundaria, por lo tanto, es indispensable que al alumno se le presenten problemas matemáticos que les permitan desarrollar ampliamente las diferentes habilidades y procedimientos de cálculo mental y que al mismo tiempo las puedan aplicar en actividades de su entorno más próximo.

Con base en lo anterior, es importante identificar y analizar los conocimientos necesarios para llevar a cabo la resolución de problemas, de acuerdo a Baroody (como se citó en Castro, Prat y Gorgorió 2016), nuestro comportamiento está determinado por al menos dos tipos diferentes de conocimiento, un tipo de conocimiento proporciona una comprensión abstracta de los principios y el otro permite resolver con eficacia y rapidez los problemas. Estos conocimientos, denominados respectivamente por la investigación actual como conocimiento conceptual y conocimiento procedimental, han sido ampliamente reconocidos y estudiados a través de los años desde los diferentes dominios matemáticos.

### **1.1 Conocimientos conceptuales y procedimentales matemáticos.**

La revisión de las diferentes caracterizaciones de los términos conocimiento conceptual y conocimiento procedimental en matemáticas sugiere que el conocimiento conceptual suele identificarse como un conocimiento profundo, ricamente conectado, flexible y asociado a conocimiento significativo, mientras que el conocimiento procedimental es comúnmente asociado a un conocimiento escasamente conectado, automatizado y no profundo. Sin embargo, no se niega la existencia de una estrecha relación entre ambos tipos de conocimiento ya que casi siempre tienen que tratarse a la par y muy difícilmente pueden separarse.

En este análisis para definir de manera concreta cada uno de los conocimientos indispensables para la resolución de problemas, se encontraron perspectivas correspondientes a diferentes autores, en la que cada uno proporciona algunas aproximaciones respecto a estos conceptos, sin embargo, el uso generalizado de estos términos se le atribuye a Hiebert y Lefevre (1986), quienes caracterizan el conocimiento conceptual como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información (saber qué o por qué).

El conocimiento procedimental, es descrito por Hiebert y Lefevre (1986) como un conocimiento compuesto por dos partes distintas. La primera de ellas, conformada por el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. Mientras que, la segunda parte, se compone por los algoritmos o reglas utilizados para resolver las tareas matemáticas; instrucciones ejecutadas en una secuencia linealmente predeterminada, que paso a paso establecen cómo completar tareas (saber cómo).

Con base en la definición anterior, el conocimiento procedimental se ha considerado hasta cierto punto como un conocimiento automatizado, por lo que su aplicación requiere de una atención consciente. La automatización se logra a través de la práctica, lo que permite que tales conceptos se puedan ejecutar de manera cada vez más rápida.

Por otra parte, es importante analizar la relación existente entre ambos conceptos, tal como se mencionó anteriormente, existe una estrecha relación entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental en matemáticas, ya que es necesaria la consolidación de uno de los dos conceptos para poder fijar el otro. Baroody, Feil y Johnson (2007) sugieren que, si bien puede existir de manera parcial conocimiento conceptual y procedimental superficial independientes, el conocimiento procedimental profundo sólo existe con un conocimiento conceptual profundo y viceversa.

Estos autores proponen que necesariamente debe de existir una conexión o dependencia entre ambos tipos de conocimientos, aunque se pueden trabajar de manera independiente, su aprendizaje sólo se puede considerar totalmente consolidado sí los dos conocimientos se han entendido de manera profunda.

Específicamente en el área de matemáticas estos autores definen el conocimiento procedimental como las acciones o manipulaciones mentales que incluyen reglas, estrategias y algoritmos para completar una tarea, mientras que el conocimiento conceptual se define como el conocimiento

acerca de los hechos, generalizaciones y principios, ambos ligados entre sí, ya que es necesario comprender qué o por qué se tienen que realizar determinadas acciones y cómo se van a realizar. Por otra parte, es necesario enfatizar en la definición de habilidad procedimental, la cual ha sido definida como el conocimiento de múltiples maneras de resolver problemas y el conocimiento de cuándo utilizarlo (Kilpatrick, 2001); o como la habilidad para emplear múltiples métodos de solución, resolver el mismo problema utilizando distintos métodos, y elegir estratégicamente entre los métodos más eficientes. Con esto se pretende que el estudiante al momento de resolver problemas tenga un conocimiento de varios procedimientos de resolución, y la capacidad de inventar o innovar para crear algunos nuevos.

Anteriormente, en las instituciones educativas de todos los niveles escolares, se sugería que los alumnos inicialmente deberían de adquirir o desarrollar la comprensión de los conceptos que se utilizarían para generar y seleccionar los procedimientos necesarios para la resolución de problemas en un determinado momento y a partir de la práctica se obtendría el conocimiento procedimental del concepto.

Sin embargo, actualmente se concibió la idea de que el desarrollo de las habilidades antecede al desarrollo de los conceptos, proponiendo que los alumnos inicialmente deben adquirir las habilidades en un contenido específico y a partir de la reflexión de la práctica obtener el conocimiento conceptual. Lo cierto es que, no hay un orden fijo en este proceso todo está atribuido al enfoque con el que se trabaje para el estudio de los conocimientos conceptuales y procedimentales.

Con base en lo anterior, Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (como se citó en Castro, Prat y Gorgorió 2016), argumentan que estos conocimientos se influyen mutuamente durante todo su desarrollo, proponiendo que los incrementos de un tipo de conocimiento conducen a incrementos en el otro, es decir, el aumento en el conocimiento conceptual puede conducir a generación de procesos; y, el conocimiento procedimental puede conducir a ganancias en la comprensión conceptual, que sucesivamente pueden conducir a más incrementos en el primero.

Bajo esta perspectiva, se puede destacar que la vinculación entre estos tipos de conocimientos puede beneficiar la adquisición y aplicación de ambos conocimientos. Así, la construcción significativa de relaciones entre el conocimiento conceptual y los procedimientos puede beneficiar al conocimiento procedimental pues contribuye a recordar los procedimientos,

favorece su uso efectivo, permite adaptar los procedimientos existentes en función de las demandas del problema; o influye en la generación de nuevos procedimientos.

Por su parte, el conocimiento procedimental puede influir en la comprensión conceptual, mejorando la representación de problemas, incrementando la disponibilidad de recursos mentales, la identificación de conceptos erróneos y la reflexión acerca de las causas que hacen que los procedimientos funcionen (Baroody, 2003)

## **1.2 Conocimientos conceptuales y algorítmicos que hacen falta consolidar para la resolución de problemas matemáticos**

La resolución de problemas implica el uso y la coordinación de experiencias anteriores (conocimiento, creatividad, intuición y habilidad), para encontrar una solución desconocida, incluso puede afirmarse que al resolver un problema, el alumno lo interpreta con sus propios términos, se plantea nuevas preguntas, experimenta diversas estrategias, elabora conjeturas y da validez a su solución para saber si cumple o no con las condiciones establecidas, en caso de no ser así, deberá de replantear su estrategia tomando en cuenta los errores cometidos, mismos que ayudarán a adquirir nuevos aprendizajes al momento de detectarlos y corregirlos.

Durante el trayecto en educación primaria los estudiantes debieron de haber consolidado aquellos conocimientos necesarios para resolver problemas aritméticos aplicados en la escuela y en su vida diaria, especialmente aquellos que involucran la aplicación de cualquiera de las operaciones básicas, tanto de manera escrita como de manera mental, tales contenidos curriculares importantes para el desarrollo y dominio de conocimientos matemáticos posteriores.

Al ingresar a la escuela secundaria, los estudiantes deben dominar conceptual y algorítmicamente las operaciones básicas como la adición, la sustracción, el cociente y la multiplicación, sin embargo, son conocimientos que no se encuentran consolidados en todos los alumnos, por lo tanto, difieren en el trabajo de operaciones un tanto más complejas como los radicales y las potencias, sin considerar que, al utilizar números decimales, fraccionarios, positivos y negativos, los estudiantes se envuelven en un estado de duda e incertidumbre al no saber operar con números de este tipo.

Tal es el caso de los estudiantes del tercer grado grupo E, quienes al iniciar el ciclo escolar 2019-2020, fueron sujetos a un examen diagnóstico que daría cuenta de los conocimientos algorítmicos y conceptuales que cada uno de los alumnos poseía hasta ese momento, sin embargo, los resultados que arrojó dicho examen demostraron que la mayoría de los estudiantes presentaban fuertes carencias en cuanto al dominio del algoritmo para realizar operaciones básicas trabajadas durante su estancia en la escuela primaria y durante los dos primeros años de educación secundaria.

De acuerdo a Gómez (1989), técnicamente un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos. Por lo tanto, un algoritmo no resuelve solamente un problema único sino toda una clase de problemas que no difieren más que por los datos, pero que están gobernados por las mismas prescripciones.

Históricamente, los algoritmos en su origen fueron los que se elaboraron para resolver las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, sin emplear elementos auxiliares como el ábaco o los dedos y contando únicamente con los datos de las tablas correspondientes para cada una de las operaciones y unas pocas reglas, dichas reglas de cálculo permiten extender las operaciones con dígitos a operaciones entre números de cualesquiera cifras con los algoritmos de las operaciones.

A partir de la perspectiva de Gómez y con base en el examen diagnóstico aplicado a los estudiantes se puede deducir que existe en ellos una deficiencia en cuanto a la aplicación de los algoritmos indispensables para la resolución de problemas, los reactivos incluidos en el examen únicamente incluían contenidos relacionados a la aplicación de las operaciones básicas, sin embargo, las respuestas de la gran mayoría de los estudiantes daban cuenta de que desconocían parcial o totalmente cómo se deberían de realizar algunas operaciones, tal como se muestra en las siguientes evidencias:

Respuestas equivocadas  
 2.  $1 + 1 + 2 = 4$  (5)  
 3.  $1 + (-6) + 5 = 0$  (30)  
 6.  $-5 + 1 + (-9) = -13$  (-14)  
 7.  $-5 + 1 + (-11) = -15$  (10)  
 9.  $1 + (-9) + 7 = -1$  (64)  
 10.  $1 + (-4) + 2 = -1$  (-9)

Figura V: Respuestas correspondientes a un examen diagnóstico

Respuestas equivocadas  
 1.  $1 + (-9) + 3 = -5$  (13)  
 3.  $1 + (-6) + 5 = 0$  (13)  
 5.  $1 + (-5) + (-2) = -6$  (8)  
 6.  $-5 + 1 + (-9) = -13$  (15)  
 7.  $-5 + 1 + (-11) = -15$  (5)  
 9.  $1 + (-9) + 7 = -1$  (17)  
 10.  $1 + (-4) + 2 = -1$  (7)

Figura VI: Respuestas correspondientes a un examen diagnóstico

Respuestas equivocadas  
 1.  $1 + (-9) + 3 = -5$  (-13)  
 3.  $1 + (-6) + 5 = 0$  (12)  
 5.  $1 + (-5) + (-2) = -6$  (8)  
 6.  $-5 + 1 + (-9) = -13$  (15)  
 7.  $-5 + 1 + (-11) = -15$  (-10)  
 9.  $1 + (-9) + 7 = -1$  (-17)  
 10.  $1 + (-4) + 2 = -1$  (-7)

Figura VII: Respuestas correspondientes a un examen diagnóstico

Respuestas equivocadas  
 1.  $1 + (-9) + 3 = -5$  (-13)  
 3.  $1 + (-6) + 5 = 0$  (12)  
 7.  $-5 + 1 + (-11) = -15$  (-17)  
 9.  $1 + (-9) + 7 = -1$  (17)  
 10.  $1 + (-4) + 2 = -1$  (7)

Figura VIII: Respuestas de un alumno correspondientes al examen diagnóstico

Respuestas equivocadas  
 1.  $1 + (-9) + 3 = -5$  (-7)  
 6.  $-5 + 1 + (-9) = -13$  (13)  
 9.  $1 + (-9) + 7 = -1$  (  
 10.  $1 + (-4) + 2 = -1$  (  
 )

Figura IX: Respuestas de un alumno correspondientes al examen diagnóstico

Cabe mencionar que el examen diagnóstico fue diseñado y aplicado mediante la plataforma académica Thatquiz, lo cual proporcionaba a los estudiantes las posibles respuestas a cada planteamiento, sin embargo, se puede observar que en los exámenes seleccionados de manera aleatoria existe cierta recurrencia en las respuestas generadas por los estudiantes, mismas que fueron consideradas como incorrectas. En cada una de las evidencias expuestas anteriormente se puede identificar que la mayoría de los estudiantes muestran carencias conceptuales y algorítmicas al realizar operaciones básicas de adición y sustracción cuando incluyen números con diferentes signos.

Posiblemente el origen de tales deficiencias puede radicar en que los estudiantes no lograron consolidar de manera concreta las leyes de los signos utilizadas en operaciones con números de diferentes signos (positivo y negativo), conocimiento indispensable para trabajar contenidos temáticos posteriores como la resolución de ecuaciones de cualquier grado, la tabulación de funciones o la resolución de cálculos numéricos que implican usar la jerarquía de las operaciones, por mencionar algunos.

De esta manera se puede establecer que los conocimientos adquiridos por los estudiantes repercutirán en los procesos de aprendizaje posteriores, ya que al no haber dominio de un contenido base como las leyes de los signos, los estudiantes desarrollarán vacíos conceptuales y algorítmicos que muy posiblemente aplicarán en un futuro al momento de resolver problemas escolares y de su vida cotidiana.

A partir de la aplicación de problemas matemáticos, se logró identificar que en los estudiantes hace falta consolidar el concepto de raíz cuadrada, el cual se analiza de manera concreta durante el primer año de educación secundaria de acuerdo al Plan de Estudios 2011, sin embargo, después de algunos minutos destinados para la resolución del problema, se identificó que la mayoría de los estudiantes no recordaban el algoritmo necesario para encontrar la respuesta correcta al problema, por lo que se procedió a analizar en plenaria la operación que se tenía que realizar.

Con base en las preguntas generadas por la docente en formación y los comentarios realizados por los estudiantes respecto a la operación mencionada anteriormente, se determinó que la mayoría de los alumnos desconocían qué era la raíz cuadrada y cómo se podía obtener su resultado, ya que al hacerles dichas preguntas el silencio del grupo denotó la duda que existía en gran parte del colectivo.

Posteriormente al dar una explicación breve del concepto y algoritmo de la raíz cuadrada algunos de los estudiantes recordaron el contenido y lograron aplicar de manera correcta el algoritmo con los datos del problema para llegar a la solución, no obstante, algunos otros todavía no lograban asimilar la explicación por lo que solucionaron el problema con ayuda de la calculadora, tal como se muestra en las siguientes imágenes:

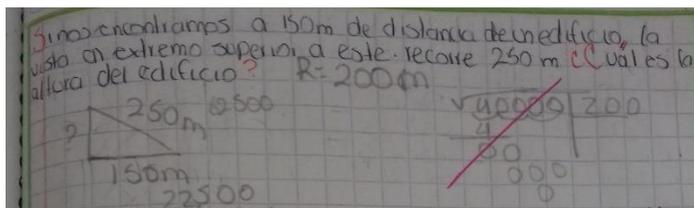


Figura X: Solución de un alumno que aplicó el algoritmo correspondiente a la raíz cuadrada

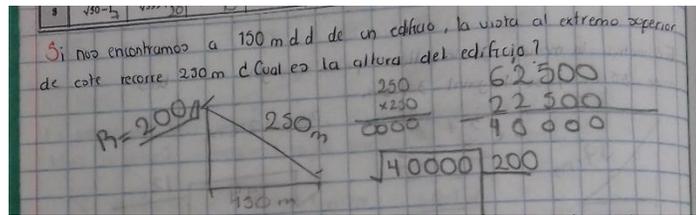


Figura XI: Solución de un alumno en la que se desconoce el algoritmo utilizado

En la asignatura de matemáticas, la raíz cuadrada de un número es aquel número que al ser multiplicado por sí mismo da como resultado el valor, lamentablemente en muchas ocasiones los estudiantes no prestan la atención necesaria para poder asimilar los conocimientos conceptuales que darán pie a la comprensión de los procedimientos necesarios para que puedan resolver otros problemas que, si bien difieren en los datos, la lógica sigue siendo la misma.

Además, es importante que el estudiante comprenda el significado de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación), ya que éstas guardan una estrecha relación entre sí, es decir, existe una clasificación para éstas operaciones, la cual establece que para cada una de las operaciones directas como la suma, la multiplicación y la potenciación existe una operación inversa como la resta, la división, la radicación y la logaritmicación respectivamente.

A partir del problema anterior, también se identificó una deficiencia más en los estudiantes, la cual radica en el conocimiento y la aplicación de las potencias con números positivos y negativos, al analizar el Teorema de Pitágoras, se establecieron las relaciones entre el cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos, en las cuales necesariamente tenían que hacer uso de las potencias, sin embargo, al realizar las operaciones correspondientes para comprobar el teorema, los alumnos confundían el algoritmo de una potencia al cuadrado con el de una multiplicación.

Por lo tanto, al analizar problemas como el presentado anteriormente, se determinó que la mayoría de los estudiantes no comprendían que para obtener una raíz cuadrada se tiene que buscar un número que multiplicado por sí mismo sea igual (en caso de ser exacta) o se aproxime (si es una raíz cuadrada inexacta) al radicando, pues se trata de la operación inversa de la

potenciación, la cual consiste en multiplicar un número, por sí mismo, tantas veces indique el exponente.

Con base en las deficiencias mencionadas, es importante atender los conocimientos conceptuales y procedimentales que hace falta consolidar en los estudiantes, debido a que el aprendizaje profundo de ambos conocimientos permitirá a cada uno de los alumnos resolver problemas posteriores en cada una de las ramas de las matemáticas, además, su comprensión ayudará a que no solamente se resuelvan problemas específicos, sino que también se pretende que el estudiante, al momento de resolver problemas, tenga un conocimiento de varios procedimientos de resolución, y la capacidad de inventar o innovar para crear nuevos procedimientos.

De acuerdo a Howard (2004) los problemas se pueden simplificar de varias maneras, los números no son cosas rígidas y estáticas; son maleables y fluidos y se pueden moldear para adaptarlos a nuestras necesidades. Una amplia variedad de problemas sucumbirá a unos cuantos métodos fáciles de usar, como por ejemplo reordenar los números, ponerlos de un modo distinto, subdividirlos en partes más pequeñas, usar equivalencias e identidades, aproximar y redondear.

Para resolver problemas “de cabeza” es necesario practicar con números expresados verbalmente, sin embargo, también se necesita de una alternativa en la que se pueda confiar hasta que se haya dominado la habilidad de no visualizar las cifras. Durante la niñez, al transitar por la educación primaria, la mayoría de las personas aprenden (o quizá memorizan) las tablas de sumar o multiplicar, pero no se toma en cuenta que las tablas no son solo un montón de hechos aislados y quienes las memorizan pueden pasar por alto muchas de las relaciones entre los números.

# Capítulo 2

## **Capítulo 2: Conocimientos y procedimientos empleados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos**

La resolución de problemas es una actividad que con frecuencia realizan todas las personas en su vida diaria en ámbitos, personales, laborales, sociales y escolares con la finalidad de dar solución a una situación o tarea específica, por lo tanto, se puede considerar que es una acción que casi naturalmente los seres humanos están obligados a realizar en cualquiera de las actividades que realicen, ya sea de manera consciente o inconsciente.

De acuerdo a Pérez y Beltrán (2011).

Los problemas son situaciones nuevas que requieren que la gente responda con comportamientos nuevos, casi permanentemente enfrentamos "problemas" en nuestra vida cotidiana, por lo que resolver un problema implica realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad rutinaria, es decir, es darle solución a la situación existente. (pp. 77-78)

Con base en lo anterior, la resolución de problemas es considerada como una actividad de especial importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por su valor instructivo y formativo. Lo esencial de esta actividad reside en la idea siguiente: resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe qué hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer ya no hay problema. Esto, evidentemente, rompe con la idea de que sea una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias ya asimiladas y deja claro el reto de que el individuo se enfrenta a situaciones que lo deben poner a prueba, por su novedad, por la diversidad de posibilidades al cambiar las condiciones en que se manifiesta esa situación.

En el área de matemáticas, los alumnos pueden decidir con rapidez si saben resolver o no los problemas, ya que casi siempre se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar, pero, una vez localizado se aplica y se llega a la solución. Tal actividad ha provocado que los estudiantes en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una breve reflexión, contesten "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado para el problema.

Sin embargo, enfrentarse a la resolución de problemas es buscar conscientemente alguna acción o estrategia para lograr el objetivo, en otras palabras, se entienden como habilidades cognitivas

de carácter superior tales como el análisis, la síntesis, la transferencia de conocimiento y la creatividad, necesarias para que los individuos puedan resolver problemas (García, 1997).

## **2.1 Método de Pólya para la resolución de problemas**

De acuerdo con Pólya (1965) en su obra "Como plantear y resolver problemas", un problema es aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente establecido, pero no alcanzable de manera inmediata, por lo tanto, considera que para poder resolver un problema se necesita: comprender el problema: entender claramente lo que se pide, concebir un plan: identificar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que se relaciona con la incógnita a fin de encontrar una idea, ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos y visión retrospectiva: verificar el resultado, una vez encontrada la solución revisarla y discutirla.

Para comprender más claramente lo que George Pólya (1965) establece como la resolución de un problema, se describen a grandes rasgos, las siguientes cuatro fases:

**La comprensión del problema:** es la fase en la que el alumno debe analizar si comprende todo lo que se plantea en el problema, si puede transcribirlo a su lenguaje, si logra reconocer los datos que le facilitarán su resolución, si es capaz de discriminar la información necesaria de la que no lo es y si se asemeja a algún problema antes resuelto.

En este sentido al analizar el contenido Explicitación y uso del teorema de Pitágoras, ubicado en el bloque II, del Plan de Estudios 2011, Matemáticas, se pidió a los estudiantes que resolvieran el siguiente problema:

*Juan debe construir una rampa con una altura de 2 metros y se debe ubicar a 5 metros de distancia. ¿Qué distancia caminará Juan si desea recorrer la rampa completa?*

Después de algunos minutos de haber dictado el problema, se solicitó a los alumnos que externaran sus resultados con el resto del grupo, sin embargo, se identificó que más de la mitad del total de alumnos no habían comprendido los datos del problema y, por lo tanto, no entendían los procedimientos que se deberían de seguir.

Ante esta situación, se invitó a los estudiantes a que leyeran nuevamente el problema y tomaran nota de todos los datos que se establecían en el problema y posteriormente realizarán un esquema que les ayudaría a identificar y entender la incógnita del problema, la cual corresponde a la distancia que caminaría Juan si recorriera la rampa completa, en otras palabras, pertenece a la hipotenusa del triángulo rectángulo formado con los datos de la altura y la distancia, tal como se muestra en la siguiente evidencia:

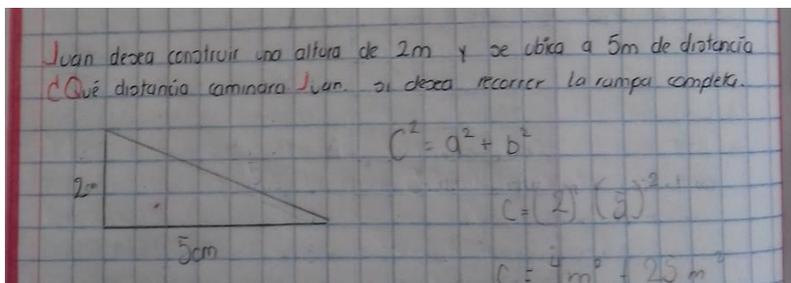


Figura XII: Cuaderno de un alumno en el que se reconoce la comprensión del problema presentado

**Concebir un plan:** en esta etapa el estudiante debe reconocer el tipo de operación aritmética que debe emplear, así mismo relacionar los elementos implícitos en el problema y confirmar que los datos se vinculen con la incógnita. Para ello el alumno puede ayudarse de las siguientes preguntas:

- ¿Qué se debe encontrar?
- ¿Se conoce un problema relacionado?
- ¿Cuál es el camino más viable a seguir?
- ¿La estrategia seleccionada es la única posible?, ¿es la adecuada?, ¿es la correcta?

Continuando con la resolución del problema presentado anteriormente, se identificó que los alumnos, lograron reconocer que para este tipo de problema el método más viable para llegar a la solución consistía en aplicar el Teorema de Pitágoras, cabe mencionar que en esta fase sólo algunos alumnos consiguieron establecer el teorema de manera algebraica, el resto únicamente lo expresaban de manera verbal por lo que se les tuvo que ayudar a construir la expresión algebraica que les ayudaría a encontrar la incógnita, así como lo muestra la figura:

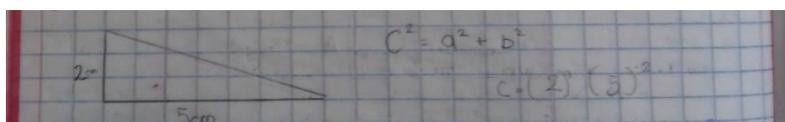


Figura XIII: Cuaderno de un alumno que logró establecer el Teorema de Pitágoras de manera algebraica, después de la ayuda pertinente

**Ejecutar el plan:** es en esta etapa cuando el estudiante debe darse un tiempo razonable para precisar cada paso de su estrategia seleccionada, en este proceso intervienen las destrezas de contextualización de los estudiantes, las destrezas algorítmicas o cálculo mental. Es el momento reflexivo, analítico y crítico del alumno pues es él quien regula el proceso de aplicación de su estrategia seleccionada y en caso de no ser adecuada replantear su habilidad una y otra vez hasta lograr el éxito. Así mismo puede apoyarse de cuestionamientos como:

- ¿Cómo se debe iniciar?
- ¿Hasta dónde se puede llegar por uno mismo?
- ¿La estrategia realmente está funcionando o debe cambiarse?

Durante esta fase, en la resolución del problema anterior, los alumnos pusieron en práctica el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo formado a partir de los datos; durante la aplicación de este procedimiento los estudiantes hicieron uso de las destrezas algorítmicas o de cálculo mental como la adición, los radicales y el despeje de una variable. Como evidencia de la ejecución del plan establecido por los estudiantes, se agrega la siguiente figura:

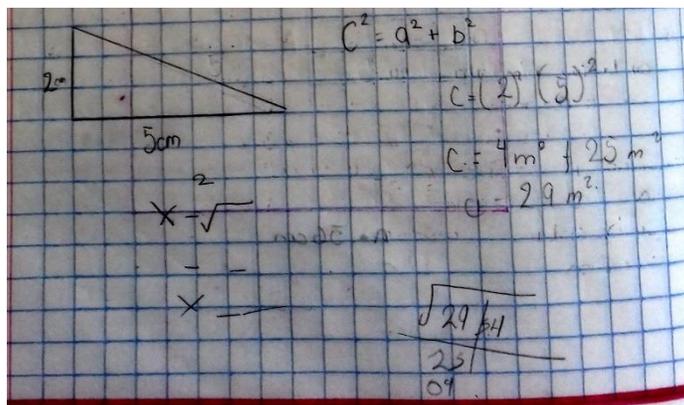


Figura XIV: Cuaderno de un alumno en el que se aplicó el Teorema de Pitágoras conforme a los requerimientos algorítmicos

**Visión retrospectiva:** en este momento el alumno tiene que reconsiderar la solución, así como el procedimiento que se utilizó para llegar a ella, esta fase ayuda a que el estudiante consolide sus conocimientos y desarrolle las capacidades necesarias para resolver problemas. En este momento se puede trabajar bajo las siguientes interrogantes:

- ¿La solución es correcta?
- ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema?
- ¿Se puede proponer una solución más sencilla?
- ¿La solución se puede extender a un caso general?

Finalmente, como última fase para la resolución de problemas, los estudiantes con ayuda de la misma expresión algebraica comprobaron si el resultado que habían obtenido era correcto, si la respuesta cumplía con las especificaciones del problema y si era posible que este procedimiento se pudiera extender a casos más generales en los que se utilizaran los mismos conocimientos conceptuales y procedimentales. Para este problema, la justificación de los alumnos consistió en utilizar el teorema de Pitágoras sustituyendo los datos y la respuesta obtenida con el objetivo de obtener los mismos valores al resolver la igualdad.

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 \\
 (5.38)^2 &= (2)^2 + (5)^2 \\
 28.94 &= 4 + 25 \\
 29 &= 29
 \end{aligned}$$

Figura XV: Procedimientos algorítmicos realizados por un alumno para justificar sus resultados

$$\begin{array}{r}
 5.38 \\
 \times 5.38 \\
 \hline
 4304 \\
 1614 \\
 2690 \\
 \hline
 28.9444
 \end{array}$$

Figura XVI: Justificación de resultados elaborada por un estudiante

La posición de Pólya respecto a la resolución de problemas se basa en una perspectiva global y no se limita a un punto de vista matemático, es decir, este autor plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, son utilizados y aplicados en cualquier campo de la vida diaria, aunque en muchas ocasiones no se realice como un proceso consciente y organizado, son acciones que se realizan casi por instinto natural.

## **2.2 ¿Cuáles son los conocimientos y procedimientos que se utilizan dentro del aula de clases para la resolución de problemas matemáticos?**

En los primeros años de la Educación Primaria, una vez conocidas las operaciones aritméticas, se comienzan a enseñar problemas que se resuelven empleando precisamente esas operaciones (resolución aritmética), tras adquirir cierta habilidad en dichas técnicas, se da paso a la resolución de problemas un tanto más complejos en los que se aplican nuevos conocimientos aritméticos, algebraicos y geométricos, por mencionar algunos, usualmente analizados desde el inicio de la Educación Secundaria.

Para dar paso a la resolución de esos problemas, los alumnos hacen uso de conocimientos conceptuales y procedimentales que han desarrollado desde su ingreso a la Educación Primaria, sin embargo, muchas de esas estrategias en ocasiones no se consolidan de manera correcta en todos los estudiantes y, por ende, dificultan que el desarrollo de los nuevos conocimientos se cumpla tal y como lo marca el Programa de Estudios 2011.

Regularmente en la clase de Matemáticas alumnos están acostumbrados a trabajar con números y operaciones presentados de manera directa, por lo que al enfrentarse a situaciones en las que se les presente una forma diferente de trabajar entran en un estado de conflicto e incertidumbre al no saber interpretar la información que se les presenta en los diferentes problemas matemáticos, de ahí la importancia de implementar la resolución de problemas en la clase de Matemáticas.

Cuando un estudiante se enfrenta a un problema, necesariamente tiene que comprender cual es la naturaleza del problema, debe analizar si comprende todo lo que se plantea en el problema, si puede transcribirlo a su lenguaje, si logra reconocer los datos que le facilitarán su resolución, si es capaz de discriminar la información necesaria de la que no lo es y si se asemeja a algún problema antes resuelto para posteriormente hacer uso de sus conocimientos conceptuales y algorítmicos necesarios para llegar a la solución.

De acuerdo a Peltier (2003) comprender el problema es, por una parte, comprender que el enunciado planteado relata una cierta situación, la cual, en el caso de los problemas aritméticos de la escuela elemental, se obtiene con frecuencia de la vida real y, además, los datos que se

proporcionan son ya respuestas a preguntas que podría haberse planteado un personaje ficticio que se encontrara en la situación evocada.

Con base en la perspectiva anterior, se puede establecer que cuando se llega a la comprensión de un enunciado, ésta debe conducir a una “acción” que implica una reflexión y la toma de decisiones, es decir, no se trata simplemente de un proceso de lectura, sino de un proceso de reflexión que ayude a encontrar respuestas a partir de preguntas ya establecidas. Además, en la resolución de un problema, Peltier establece que la actividad cognitiva se desarrolla en dos vertientes, una referente a la representación y otra a la acción; evidentemente estas dos vertientes están estrechamente ligadas ya que para poder actuar el estudiante necesariamente debe hacer uso de todos sus conocimientos.

A partir de lo anterior, se establece que, para llegar a la solución de un problema matemático, es necesario hacer uso de conocimientos conceptuales y procedimentales que ayuden a planear y ejecutar acciones que lleven a la solución, todos estos adquiridos a partir de una enseñanza formal o bien a través de la experiencia, sin embargo, es importante reconocer que todos estos conocimientos guardan una estrecha relación entre sí, ya que necesariamente se tienen que dominar los saberes conceptuales para poder actuar de manera procedimental o de lo contrario únicamente se estarán ejecutando acciones de manera mecánica sin comprender el porqué de las cosas.

El conocimiento conceptual es aquel que se conecta fácilmente a otro conocimiento, mientras tanto, el conocimiento de procedimientos o procedimental, refiere a los símbolos y las reglas que se memorizan sin relación con el entendimiento de esos símbolos y reglas, puede llamarse este último también conocimiento algorítmico. Como bien señalan Monereo et al (1998) (como se citó en Ruiz, Alfaro y Gamboa (2006):

Llamamos a un procedimiento algorítmico cuando la sucesión de acciones que hay que realizar se halla completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema o de la tarea (por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón). En cambio, cuando estas acciones comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo (por ejemplo, planificar una entrevista o reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus

principales elementos más fácilmente manipulables) hablamos de procedimientos heurísticos. (p.2)

En este sentido se puede establecer que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que sea significativo para quien lo posee, en este caso para los estudiantes. De manera breve se podría decir que un conocimiento es portador de sentido para un alumno si éste es capaz de identificar un área de aplicación de este conocimiento. Para la asignatura que tiene por objetivo trabajar las operaciones aritméticas, la cuestión del sentido se plantea en tres niveles:

- El del concepto (sentido de la adición, de la sustracción, de la multiplicación, etcétera).
- El del problema (cómo ayudar a los estudiantes a comprender un problema y resolverlo).
- El de la articulación entre la comprensión del problema y la puesta en marcha de un procedimiento de resolución.

Con base en lo anterior, se puede identificar que los alumnos constantemente se enfrentan a la dificultad de no comprender totalmente los requerimientos de los problemas matemáticos y únicamente intentan llegar a la solución por medio de algoritmos que en su momento memorizaron sin tener claro el porqué de su actuar, obteniendo como resultado errores en la resolución de algún problema y, en el peor de los casos, continuar con esa práctica a lo largo de su preparación académica.

Por otra parte, es importante reconocer que en muchas ocasiones esta situación se origina cuando el docente tiene como objetivo principal hacer que los estudiantes aprendan y mecanicen ciertos procedimientos olvidándose de la relación que guarda este tipo de conocimiento con los conceptos matemáticos, es por ello que con frecuencia los estudiantes no logran establecer las relaciones pertinentes entre ambos conocimientos, dando lugar a que con el paso del tiempo se olviden los conceptos y tan sólo se memoricen símbolos y reglas.

Desde la Educación Primaria y hasta llegar a la Educación Secundaria, se considera que los alumnos poseen conceptos preconcebidos que los ayudarán a resolver problemas de cualquier ámbito y la idea es desarrollar en ellos las capacidades y habilidades matemáticas y estimularlos a que se sientan ansiosos de solucionar los problemas, por ello la importancia de generar ambientes de aprendizaje que propicien al máximo el desarrollo de las habilidades matemáticas más importantes para la resolución de problemas..

En función de lo anterior, es importante que los alumnos posean como primera prioridad la capacidad de plantear y resolver problemas matemáticos, es decir, que intenten responder una pregunta planteada o realizar una tarea dada, utilizando sus conocimientos adquiridos y competencias desarrolladas para obtener la solución, en este sentido, los profesores deben plantear situaciones abiertas en las que el alumno pueda cuestionar y utilizar las diferentes formas de abordaje, de esta manera promueve que “jueguen” con sus competencias y conocimientos anteriores que deben ser funcionales siempre y cuando el alumno los haya adquirido y se haya apropiado de ellos de manera correcta.

Durante la resolución de problemas, se sugiere presentar a los alumnos situaciones abiertas, es decir, situaciones en las que pueda hacer uso de diferentes estrategias que lo conduzcan a la misma solución, sin embargo, las situaciones abiertas no nacen solas, dependen de la capacidad de creación del docente, muchas veces se trata de transformar las situaciones rutinarias en acciones que exijan un cuestionamiento tanto de las estrategias como de las soluciones, en otras palabras, se pretende que el alumno se responsabilice de su aprendizaje frente a las posibilidades abiertas que se le presentan.

Ruiz, et al (2006) establece que

Para la Educación Matemática no se trata de circunscribir los contenidos y objetivos educativos a realizar en un marco de las matemáticas consideradas como un cuerpo abstracto, sino de conducir a los estudiantes al dominio de conceptos, métodos y destrezas matemáticas a través de procesos pedagógicos y didácticos específicos. (p.5)

En la rama de las Matemáticas el objetivo de cada clase se basa en fortalecer el razonamiento de los estudiantes partiendo de la experiencia y el contexto que cada uno posee, a partir de sus vivencias diarias, el cual posteriormente se relacionará con el conocimiento aprendido previamente en el aula de clases, esto significa el uso de estrategias y recursos apropiados para conseguir que los estudiantes lleguen al máximo de los aprendizajes esperados.

Por otra parte, al hacer referencia al conocimiento procedimental utilizado para la resolución de problemas, hay quienes consideran que no es necesario hacer un aprendizaje constructivo, basta con aprenderse las operaciones aritméticas básicas de memoria, ya que se considera que así se

recordarán más fácilmente las habilidades indispensables para el cálculo mental y éstas serán utilizadas cuando sea necesario.

Dentro de esta concepción, los hechos básicos se presentan como estímulos y la repetición es el método ideal, con lo cual se busca favorecer la mecanización y se colabora en superar los métodos primarios conceptuales, como el uso de los dedos para realizar operaciones básicas, no obstante, el uso de esta estrategia sólo originará el ejercicio rutinario de las operaciones y se dejará de lado el análisis y la comprensión de la información.

Para Schoenfeld (1992) (como se citó en Ruiz et al (2006)), pensar matemáticamente es: investigar soluciones, no memorizar procedimientos; explorar patrones, no memorizar fórmulas, formular conjeturas, no hacer ejercicios. Considera que el pensamiento matemático se puede caracterizar con cuatro rasgos: el dominio del conocimiento o recursos, los métodos heurísticos, el control y el sistema de creencias. En esta caracterización se incluyen aspectos relacionados con la heurística y la lógica, pero considera además aspectos como las creencias y los criterios personales, necesarios para resolver problemas.

De esta manera se sugiere que la resolución de problemas matemáticos considere la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos conceptuales y procedimentales como acciones que van relacionadas entre sí, es necesario lograr que los estudiantes conozcan y comprendan los conceptos que les ayudarán a planear los procedimientos necesarios para llegar a la solución del problema, de lo contrario únicamente se aplicarán procedimientos de manera mecánica sin tomar en cuenta el origen de sus acciones, lo cual muy probablemente repercutirá al momento de verificar la solución, ya que al no contar con los referentes conceptuales indispensables, muy probablemente los estudiantes duden y desistan de su respuesta.

Un aspecto muy relevante en todo este proceso es la función que tiene el docente, según Pólya, el papel del maestro es “ayudar al alumno”, pero esto debe ser entendido con mucho cuidado, ya que la ayuda de un profesor debe ser la suficiente y la necesaria para todo el grupo escolar, por ejemplo, no se puede plantear un problema muy difícil y abandonarlos a su propia suerte, pero, tampoco se puede plantear un problema y que el mismo docente lo resuelva, en otras palabras, es importante que el estudiante asuma una parte de responsabilidad en el trabajo.

Es por eso que Pólya plantea constantemente que el profesor debe ponerse en los zapatos del alumno, evidentemente, cuando el maestro propone un problema y sabe cómo se tiene que resolver, presenta la solución de forma sencilla de manera que todo parece muy natural, sin embargo, en muchas ocasiones el mismo estudiante puede llegar a cuestionarse si realmente él hubiera llegado a esa solución, en ese momento surge una serie de circunstancias que pueden señalar al profesor como la única persona capaz de encontrar el procedimiento de solución para el problema, ante esta situación Pólya establece las siguientes consideraciones:

- Preguntar y señalar el camino de distintas formas.
- Usar las preguntas para ayudar a que el alumno resuelva el problema y desarrollar en él la habilidad de resolver problemas.

A partir de lo anterior, se puede plantear que el profesor debe ser un modelo para la resolución de problemas, es decir, él mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase; por otra parte, es importante considerar el tipo de problemas que quieran ser aplicados a los alumnos, no se deben proponer problemas que parezcan imposibles, sino aquellos que realmente sean adecuados y que se encuentren al nivel del estudiante, por lo tanto, se considera que la presentación de los problemas tiene mucho peso en el proceso de resolución, no consiste en dar una gran lista de ejercicios para que sean resueltos, más bien se trata de sembrar la curiosidad y el interés por el problema.

En la actualidad, la mayoría de las perspectivas educativas destacan el carácter conceptual de las matemáticas y la importancia de relacionar los conceptos nuevos con los que el alumno ya posee, en particular, lo que se denomina como conocimiento informal que previamente han adquirido los estudiantes a partir de sus experiencias dentro de la sociedad, en su familia y con sus grupos sociales.

Además, estas perspectivas también sugieren la utilización de situaciones matemáticas no rutinarias que exijan una elaboración no mecánica, la idea principal es desarrollar una estrategia eficaz que favorezca el aprendizaje significativo de los alumnos, sin duda, es aquí donde los profesores deben buscar que los estudiantes establezcan las conexiones entre el conocimiento conceptual y el procedimental que será útil para resolver problemas matemáticos en diferentes ámbitos de la vida diaria.

# Capítulo 3

### **Capítulo 3: El uso del cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas matemáticos.**

Resolver un problema es encontrar la forma de salir de una dificultad, de enfrentar un obstáculo o conseguir un fin deseado, lo cual no se consigue de forma inmediata, para ello es necesario utilizar los medios adecuados que conducirán a la solución. Especialmente en el área de las matemáticas, la resolución de problemas es una cuestión de gran importancia para el avance de la asignatura y también para su comprensión y aprendizaje.

En la actualidad la resolución de problemas matemáticos constituye una herramienta indispensable dentro del área de las Matemáticas, ya que, a través de ella, se estimula en el estudiante el desarrollo de habilidades cognitivas que le facilitan la adquisición de aprendizajes posteriores y las capacidades necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Por ello, es importante que la enseñanza de la resolución de problemas sea abordada en el aula de manera ordenada, secuenciada, y haciendo uso de estrategias significativas que le faciliten el proceso de aprendizaje al alumno.

El saber hacer, en Matemáticas, tiene mucho que ver con la habilidad de resolver problemas, de encontrar pruebas, de criticar argumentos, de usar el lenguaje matemático, de reconocer conceptos matemáticos en situaciones específicas, sin embargo, lo más importante no es la solución, sino el camino que lleva hacia ella. La habilidad para resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas, y deben usarla frecuentemente fuera del ámbito escolar.

La resolución de problemas es una actividad primordial en la clase de Matemáticas, no es únicamente un objetivo general a conseguir, sino que además es un instrumento pedagógico que ayuda a los estudiantes a apropiarse de los contenidos específicos de la asignatura. En este sentido, los docentes deben diseñar escenarios de aprendizaje basados en el contexto social, cultural, económico, político, etc., del alumno, estableciendo como tarea primordial para el docente planear situaciones que le permitan desarrollar los saberes de cada competencia a partir de su propia realidad.

Con base en lo anterior, es importante reconocer que las actividades planeadas por los docentes repercuten en cada uno de los aprendizajes de los estudiantes, de esta manera se propone

desarrollar clases atractivas, interesantes, flexibles y adaptables a los intereses y necesidades del grupo en el que se está desarrollando la clase.

### **3.1 ¿Cómo favorece el uso del cálculo mental la resolución de problemas matemáticos?**

Desde la antigüedad los seres humanos han realizado cálculos matemáticos que les han permitido sobrevivir en un mundo de múltiples exigencias, aun, con la evolución del hombre, el uso y dominio de este tipo de cálculos no perdió importancia dentro de la sociedad, por el contrario, se convirtió en una actividad presente en la mayoría de las actividades diarias que realiza el hombre, por ejemplo, al ir de compras, al repartir una piza, al realizar una construcción, al medir un terreno, etc. Los cálculos matemáticos y, especialmente, el cálculo mental es una actividad que con frecuencia realizan las personas en muchos ámbitos de su vida diaria, por ello su práctica juega un papel importante dentro del currículo escolar de la educación básica.

De acuerdo a Vázquez, J. (2001) el cálculo mental ha sido utilizado como un recurso necesario para resolver problemas de cálculo numérico de la vida diaria; al resolver un problema el cálculo mental permite obtener un resultado aproximado y tener un control sobre la respuesta esperada y cerciorarse sobre la veracidad de una idea. El cálculo se ha asociado con cálculos numéricos mentales sencillos, espontáneos y naturales, que el individuo realiza según su experiencia, conocimiento numérico y la naturaleza del problema matemático a resolver, así el cálculo mental es utilizado como un sistema de conteo espontáneo.

Respecto a la perspectiva anterior, se puede establecer que el cálculo mental es una acción que permite a los estudiantes resolver problemas mediante el uso de sus saberes previos y el conocimiento numérico que cada uno posee, especialmente las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, división, radicales y potencias), así el estudiante tendrá algún tipo de control sobre la respuesta que obtendrá después de realizar los cálculos necesarios que lo llevarán al resultado.

Actualmente se ha considerado que, en la enseñanza de las Matemáticas, orientada bajo el enfoque de la resolución de problemas, deben incorporarse contenidos que estimulen el desarrollo de habilidades matemáticas, como la aplicación de los contenidos curriculares a situaciones cotidianas y desarrollar el sentido numérico para obtener resultados con cálculo mental y estimación. Otras habilidades que se han recomendado desarrollar en los estudiantes

son las de flexibilidad del pensamiento (reconocer que un problema tiene diferentes soluciones), reversibilidad de pensamiento (plantear un problema a partir del establecimiento de un resultado deseado), y la de memoria generalizada aplicada a la resolución de problemas.

En este sentido, los docentes tienen la responsabilidad de diseñar actividades que promuevan la práctica del cálculo mental como una herramienta que les permita adquirir las habilidades necesarias para resolver problemas matemáticos posteriores, no sólo en el aula de clases sino en cualquier ámbito de su vida diaria, sin tener la necesidad de recurrir a otros medios, como los aparatos electrónicos que les ayuden a obtener los resultados.

Las estrategias de cálculo son un gran aporte académico que deben ser utilizadas en la clase de matemáticas ya que, permite al docente despertar la curiosidad de los estudiantes y estimular el desarrollo de habilidades intelectuales como la atención, la perseverancia, el interés y la memoria a corto y a mediano plazo. Así, para que los docentes puedan generar y aplicar este tipo de estrategias en sus aulas de clases es necesario que conozcan las características principales que definen al cálculo mental. Martínez y Chamorro (2000), establecen que el cálculo mental se caracteriza por cumplir las siguientes particularidades:

- Es flexible, es decir, busca sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular.
- Es concreto, aplicado a unos referentes o a realidades concretas.
- Es rápido, aunque no se debe considerar como su principal finalidad, por el contrario, esta destreza se conseguirá si se practica continuamente.
- Es variable, quiere decir que se pueden seguir diferentes caminos para un mismo problema.
- Es activo, significa que quien calcula tiene la facilidad de poder elegir la estrategia que va a desarrollar.
- Es constructivo, esta característica se refiere a que las respuestas se van construyendo con resultados parciales, que se resumen para después obtener la respuesta final.
- Responde a la demanda social que plantea una aproximación al cálculo que promueve que los estudiantes sean capaces de elegir los procedimientos apropiados, encontrar resultados y juzgar la validez de las respuestas.

- Hace uso explícito y consciente de las propiedades numéricas que se necesitan en cada ocasión.

A partir de las características descritas anteriormente se puede determinar que el cálculo mental no es una acción que se basa únicamente en la repetición de algoritmos, más bien es una acción que promueve que todos los estudiantes desarrollen al máximo sus habilidades intelectuales para poder elegir los procedimientos adecuados que los guiarán al resultado y finalmente les ayudarán a validar ese resultado, es por ello que la práctica del cálculo mental en el aula de clases juega un papel muy importante en la planeación didáctica de los docentes, pues su implementación ayuda a los alumnos a resolver problemas matemáticos dentro del salón de clases y al mismo tiempo contribuye a que sean capaces de solucionar problemáticas de la cotidianeidad.

Por otra parte, el cálculo mental a su vez integra otros tipos de cálculos matemáticos que en conjunto favorecen al desarrollo de las habilidades cognitivas y mentales de los alumnos, en la tarea de definir cada uno de estos tipos de cálculos matemáticos, Parra y Sainz (2007) aportan lo siguiente:

El **cálculo escrito**, es aquel que utiliza apoyos de papel y lápiz, aunque la mente interviene en su realización, este tipo de cálculo puede ser más exacto, razonado o mecánico, y es susceptible de emplear diferentes técnicas. El manejo de habilidades en el cálculo escrito no necesariamente va acompañado del concepto de número; ya que en la realización del cálculo escrito se pueden seguir algoritmos preestablecidos y en ocasiones dar respuestas correctas sin saber el porqué de dicha solución.

Entre las características que lo identifican, se encuentran que es abreviado, esto se refiere al hecho de ocultar pasos relacionados con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones; puede ser automático, esto significa que no necesita ser comprendido para ser ejecutado; es simbólico, es decir, que se manipulan símbolos sin referencia al mundo real: es analítico, esto refiere al hecho de que las cifras se manipulan separadamente y finalmente es confiable, debido a que siempre se utiliza el mismo algoritmo para el mismo tipo de ejercicios.

El **cálculo exacto** generalmente se asocia a resultados no equivocados y no variables; por consiguiente, se supone que un valor exacto tiene un alto grado de certeza y confiabilidad. De

esta manera se relaciona lo exacto con lo verdadero, lo cual implica que exista por parte de los estudiantes una construcción de estrategias adecuadas para la resolución de problemas, que le exijan cierta exactitud para llevar a cabo el proceso de validez, es decir, que domine y comprenda los aspectos teóricos que fundamentan a las Matemáticas.

El **cálculo estimado** se refiere a los juicios de valor que se realizan respecto al resultado de una operación numérica o de alguna medida, a partir de ciertas condiciones, en este sentido el cálculo estimado se refiere únicamente a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre los resultados. Así el cálculo estimado no sólo debe ser considerado como un juicio que se emite sino también como un proceso en el que se produce una respuesta cercana al resultado exacto y a partir de ella se toman decisiones según sea el caso.

El cálculo estimado, significa, llevar a cabo operaciones mentales considerando que puede haber diferentes posibles soluciones correctas. Cuando se hacen cálculos estimados se relacionan una serie de habilidades y conceptos, asimismo se desarrolla un mejor sentido del número, debido a una mejor comprensión de las estructuras aritméticas, lo cual se ve reflejado en la destreza que adquieren los estudiantes para predecir una situación y reflexionarla.

Para Parra (1994), el trabajo con cálculo estimado permite que el alumno se dé cuenta de que las matemáticas no son un conocimiento cerrado y totalmente construido. Algunos casos donde se utilizan cálculos estimados son:

- 1) Cuando un valor no se conoce y puede ser forzado a estimarse
- 2) En valores que son diferentes por la imprecisión de los instrumentos
- 3) Cuando se tiene que trabajar con números irracionales como el número pi
- 4) Cuando una estimación lleva a otra estimación

Otro tipo de cálculo es el **cálculo aproximado**, el cual enfatiza en los aspectos algorítmicos de la estimación; se trata de destrezas y de conceptos previos que lo fundamentan. El cálculo aproximado, se apoya de las mismas estrategias y técnicas que el cálculo mental, pero en los procesos de sustitución de los datos y validación del resultado cuenta con técnicas propias, por ejemplo, el uso de aparatos tecnológicos que ayudan a realizar cálculos y mediciones rápidamente, sin embargo, aunque son instrumentos de medida muy precisos en algunas ocasiones pueden contener algún margen de error.

Finalmente, el **cálculo mecánico**, se refiere a la utilización de un algoritmo único o de un material (contador, calculadora, tabla de logaritmos, etcétera), sin importar los datos con los que se esté trabajando.

Con base en los tipos de cálculo presentados anteriormente se puede identificar que son actividades que con frecuencia se realizan dentro de la clase de Matemáticas, por ejemplo, al analizar el contenido “Explicitación y uso del teorema de Pitágoras”, se trabajan cálculos escritos, regularmente en este tema los estudiantes se enfocan en memorizar la fórmula algebraica que representa el teorema para poder aplicarlo al momento de solucionar problemas de este tipo, sin embargo, en múltiples ocasiones sólo se sigue el algoritmo preestablecido y no se comprende su ejecución, lo cual genera que se den respuestas correctas sin saber el porqué de dicha solución.

Otro tipo de cálculo utilizado en la clase de Matemáticas es el cálculo estimado, el cual se identificó al trabajar con los contenidos relacionados a la construcción y obtención del volumen de conos y cilindros, en estos temas necesariamente se hace uso de números irracionales como el número pi, por lo que el estudiante debe de relacionar una serie de habilidades y conceptos que lo lleven a la solución de distintos problemas que impliquen el uso de este valor establecido a partir de un proceso aritmético en el que se produce una respuesta cercana al resultado exacto y a partir de ella se toman decisiones según sea el caso.

En este tipo de cálculo también se identificó que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades al realizar operaciones aritméticas que incluyan el uso de números decimales, por lo tanto, la resolución de problemas se vuelve una actividad compleja para ellos, pues en primer lugar desconocen los conceptos necesarios para resolver problemas de esta índole, tales como fórmulas para construir y obtener el volumen de cuerpos geométricos redondos, además, resulta complicado realizar las operaciones aritméticas correspondientes, generando estancamiento al ejecutar el plan de solución.

El cálculo estimado y el cálculo mecánico también se pueden apreciar en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas especialmente al trabajar con la “Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente”, en este contenido los estudiantes realizan operaciones aritméticas a partir de destrezas y de conceptos previos que fundamentan el tema,

sin embargo, este proceso se apoya del uso de aparatos tecnológicos como la calculadora, lo cual facilita que los alumnos puedan solucionar problemas de manera rápida, cabe destacar que en estos tipos de cálculo la comprensión de los conocimientos conceptuales juega un papel muy importante en la ejecución y validación de los resultados.

Es evidente que el cálculo mental y la resolución de problemas mantienen una relación importante en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, el uso de esta estrategia promueve que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas que los ayudan a solucionar problemas de manera rápida y confiable, como la estimación, la descomposición y el redondeo, por mencionar algunas, considerando las bases conceptuales presentes en cada problema.

Dentro de la propuesta didáctica se pretende que el cálculo mental sirva como herramienta para fomentar en los estudiantes la capacidad para anticipar resultados en la resolución de problemas y a partir de ello controlar y juzgar los procesos que ejecutarán, asimismo se trabaja con el razonamiento, la comprensión y la toma de decisiones respecto a los datos incluidos en cada problema.

### **3.2 Importancia del cálculo mental en la enseñanza del currículo escolar**

El cálculo mental es una estrategia que muy frecuentemente practican todos los seres humanos, repetidamente se resuelven problemas matemáticos en la vida diaria, por ejemplo, al realizar las compras y calcular el total a pagar, al ejercer alguna actividad económica como el comercio, al repartir algún tipo de productos, etc., el cálculo mental se encuentra presente en casi todas las actividades diarias de las personas, sin embargo, en el ámbito académico muchos de los docentes se han olvidado de la importancia que tiene esta estrategia didáctica en la enseñanza de los contenidos curriculares, es por ello que la recuperación e implementación de esta actividad actualmente se propone en proyectos educativos de gran importancia como el Sistema de Alerta Temprana (SisAT).

El Sistema de Alerta Temprana es un conjunto de indicadores, herramientas y procedimientos que permite a los docentes, supervisores y a la autoridad educativa contar con información sistemática y oportuna acerca de los estudiantes que están en riesgo de no alcanzar los aprendizajes clave o incluso de abandonar sus estudios. Su propósito es contribuir a la prevención y atención del rezago y el abandono escolar, al identificar a los alumnos en riesgo.

Los principales indicadores del SisAT dan cuenta del avance de los estudiantes en componentes básicos de lectura, escritura y cálculo mental, lo cual permite a los docentes identificar los avances o deficiencias que poseen los estudiantes respecto a estos indicadores y con base en ello generar las estrategias permitentes que ayudarán a incrementar los aprendizajes de los alumnos.

A partir de lo anterior, es posible identificar el rol tan importante que tiene el cálculo mental dentro del currículo escolar, ya que, en primer lugar, al docente le aporta una estrategia didáctica de enseñanza y al estudiante le ayuda a alcanzar el máximo de los aprendizajes esperados respecto a la asignatura de Matemáticas, la cual es considerada como una de las asignaturas transversales de la educación.

Se entiende por cálculo mental como aquel conjunto de técnicas y análisis que hay que realizar sobre unos datos (números, expresiones simbólicas, medidas, etc.) para obtener resultados que corresponden a preguntas preestablecidas. Usualmente estas técnicas contienen procesos vinculados a las operaciones y se denominan algoritmos. La obtención de esos resultados implica, por tanto, dos elementos previos importantes: conocimiento de los elementos básicos: números, expresiones, etc. y el dominio de su red de relaciones internas: operaciones. (Giménez y Girondo, 1993, p.10)

Con base en la aportación anterior, se entiende que el cálculo es básico para la formación de los individuos y, por tanto, no se puede prescindir de él en el ámbito escolar, ya que se encuentra vinculado con todos los conocimientos de la educación básica, además, es una estrategia que permite poner en marcha diferentes habilidades mentales de gran importancia ya que permite ejercitar la memoria, desarrollar la capacidad de deducción y descubrimiento, etc.; el cálculo escolar abarca el desarrollo y comprensión de principios, conceptos, habilidades, estrategias y procesos que convierten al alumno en un individuo más razonable que sea capaz de interpretar el mundo que le rodea.

Desarrollar y aplicar estrategias de cálculo mental es una de las competencias básicas que deben adquirir los alumnos durante su tránsito por la educación básica, lo fundamental en este proceso es que los estudiantes comprendan que hay diferentes maneras de trabajar con los números y que tan sólo tienen que elegir el más apropiado para cada cálculo. Esto les permitirá desarrollar su autonomía buscando y aplicando técnicas y estrategias que faciliten la resolución de

problemas, lo cual contribuye a aprender mediante la aplicación de lo aprendido en tareas cotidianas que repercutirán en una mejor interacción con el mundo.

En consecuencia, se puede identificar que los beneficios que aporta el cálculo mental en la enseñanza del currículo escolar son diversos, sin embargo, se pueden distinguir los siguientes:

- Ayuda a comprender y resolver problemas.
- Permite explorar diferentes vías para calcular y operar con los números de forma mental.
- Favorece en los estudiantes la adquisición de habilidades de concentración y atención.
- Favorece la invención de problemas dada una operación de suma, resta, multiplicación y división con cifras acordes a la vida diaria.
- Proporciona un aumento de la conciencia matemática.
- Promueve el dominio de la estructura de los números.
- Colabora en la fijación de la estructura de las operaciones.

### **3.3 Estrategias de cálculo mental que ayudan en la resolución de problemas matemáticos**

La mayoría del cálculo que cotidianamente se hace fuera de la escuela es mental, debido a que no siempre se puede usar lápiz y papel, y tampoco es necesario hacerlo, además, muchas veces la respuesta no tiene que ser exacta, basta con una aproximación, incluso cuando se utiliza la calculadora es normal asegurarse del resultado contrastándolo con alguna estimación obtenida por redondeo o cualquier otro procedimiento.

Gómez (1989), establece que

Este tipo de cálculo se caracteriza porque es de cabeza, se puede hacer rápidamente, se apoya en un conjunto limitado de hechos numéricos y requiere ciertas habilidades, conteos, relocalaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc., buscando sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular. (p. 65)

La aportación de Gómez da cuenta de que el cálculo mental es una estrategia caracterizada por realizar cálculos numéricos “de cabeza”, como coloquialmente se le conoce, sin embargo, al llevar esta actividad al aula de clases en muchas ocasiones puede confundirse su objetivo

principal con la memorización y mecanización de conocimientos conceptuales y algorítmicos, por lo que es necesario que el docente tenga la capacidad para orientar a los estudiantes respecto a la acción que se está realizando y lo que se pretende desarrollar con ella.

Parra y Saiz (1994), señalan que el cálculo mental se puede constatar como los conocimientos permanentes en "uso" y su practicidad puede ser un argumento a la hora de discutir su solución dentro del aula de clases, respecto a los objetivos que se pretenden alcanzar. Es por esta razón que se pretenden desarrollar ambientes de aprendizaje orientados en el cálculo mental con el objetivo de ayudar a los estudiantes a que puedan perfeccionar las habilidades intelectuales que les ayudarán a elegir de su bagaje conceptual y procedimental, los métodos más apropiados para solucionar un problema y posteriormente justificar el resultado obtenido a partir del dominio y comprensión de los conceptos matemáticos utilizados.

Como parte de los ambientes de aprendizaje que se pretenden generar en los espacios áulicos y tomando como referencia lo establecido en el Sistema de Alerta Temprana respecto al área de matemáticas, se implementaron las siguientes estrategias didácticas en la Escuela Secundaria:

### **El tablero mágico**



*Figura XVII: Estrategia de cálculo mental denominada "El tablero mágico"*

El tablero mágico es una estrategia basada únicamente en el cálculo mental, la actividad consiste en organizar a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo, a los que se les asigna un pequeño tablero dividido en diferentes celdas que contiene un número al azar cada una, además, se destina a cada equipo un juego de dados que sirven como herramienta principal para desarrollar la actividad, tal como se muestra en la figura anterior.

La dinámica de trabajo en esta estrategia es sumamente sencilla ya que, una vez organizados los grupos de alumnos, al interior de cada uno de ellos se lanzan los dados que determinan los

números con los que se ha de trabajar, es decir, cada uno de los dados corresponde a un número diferente con el que se tendrá que operar para obtener el número que corresponde a la primera casilla y así sucesivamente hasta terminar con el total de las casillas.

Dentro de este procedimiento, los estudiantes pueden aplicar cualquiera de las operaciones matemáticas en el orden de su preferencia, el objetivo principal de esta actividad es fomentar el uso de todas las operaciones aprendidas durante su trayecto por la educación básica, las cuales incluyen la adición, sustracción, multiplicación, división, radicales y potencias. Sin embargo, al verificar los procedimientos realizados por los alumnos se logró identificar que gran parte de ellos al realizar las operaciones de manera mental no conseguían llegar al resultado, pues al momento de operar los números se confundían entre una operación y otra.

Para el desarrollo de esta estrategia es necesario entender por cálculo mental el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados (Parra y Saiz, 2007). En este caso, los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, además pone en juego las diferentes relaciones entre los números.

Durante esta etapa de la actividad, otra dificultad que se logró identificar fue que la mayoría de los estudiantes, frecuentemente operaban los números únicamente con las cuatro operaciones básicas, olvidándose de operaciones más complejas como los radicales y las potencias, lo cual dificultaba que se cumpliera con el objetivo principal de esta estrategia, sin embargo, también se observó que, mediante la práctica de esta misma estrategia, el uso de las operaciones propuestas era cada vez más notable, pues los estudiantes poco a poco iban desarrollando las habilidades cognitivas que les ayudarían a realizar las operaciones mencionadas anteriormente de manera mental.

En resumen, el uso del “tablero mágico” en las clases de matemáticas, aporta muchos beneficios a la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos curriculares debido a que, a través de su práctica se consigue que los estudiantes puedan perfeccionar sus habilidades intelectuales y así realizar las principales operaciones matemáticas de manera rápida, concreta y exacta.

Asimismo, el uso reiterado de esta actividad también repercute en el desarrollo de una de las estrategias pedagógicas más importantes de las matemáticas: la resolución de problemas, ya que los cálculos numéricos implícitos en la solución de un problema únicamente se pueden realizar si se cuenta con un conjunto de conocimientos conceptuales y procedimentales adecuados, estos últimos, se pueden favorecer a partir de la práctica del cálculo mental, así como lo hacen muchas personas en su vida diaria cuya necesidad es encontrar la respuesta a un problema matemático, aunque muchas veces no se sea consciente de ello.

### Basta aritmético

Número propuesto	+5	-6	$\times 3$	$\div 2$	$11^2$	$\sqrt{\quad}$
3	8	-3	9	1.5	9	1.5
2	7	-4	6	1	4	1.4
5	10	-1	15	2.5	25	2.2
13	18	7	39	6.5	169	3.6
17	20	11	51	8.5	289	
625	630	619	1875	312.5	390625	25
25	30	19	75	12.5	675	5

Figura XVIII: Estrategia de cálculo mental denominada "Basta aritmético"

El "Basta aritmético" al igual que el "Tablero mágico" es una estrategia basada principalmente en el uso de operaciones mentales, tal como en la estrategia anterior, se aplica el cálculo mental como un conjunto de procedimientos que, a partir de los datos establecidos, se articulan, para obtener resultados exactos o aproximados. En este caso, el basta aritmético se aplicó mediante el uso de una tabla como la que se muestra en la figura, la cual contenía diferentes operaciones y datos con los que se iba a tratar.

La dinámica de esta actividad es relativamente sencilla, ya que el "basta" es un juego conocido por casi la mayoría de los estudiantes, cuya finalidad es encontrar las palabras que se adecuen a los indicadores establecidos, sin embargo, para esta actividad, su finalidad se basa en el uso de habilidades meramente matemáticas, los indicadores son representados con diferentes operaciones matemáticas como la adición, sustracción, multiplicación, división, radicales y potencias.

En este sentido, la ejecución del “Basta aritmético” consiste en calcular cada una de las operaciones establecidas a partir de un número aleatorio que el docente o los mismos estudiantes pueden determinar, todo esto sin el uso de algún aparato como la calculadora que ayude a realizar los cálculos necesarios y sin el apoyo de herramientas como el lápiz y papel. Al igual que en el basta clásico se pretende incentivar a los estudiantes a obtener los resultados correctos en el menor tiempo posible mediante una especie de competencia en la cual gana el estudiante que haya resuelto todas las operaciones de manera correcta antes que el resto de sus compañeros.

Durante la ejecución de esta estrategia, se identificó que en las primeras sesiones de trabajo los estudiantes presentaban ciertas dificultades para realizar las operaciones correspondientes, lo cual pudo originarse a la presión que implicaba la actividad y a la inhabilidad matemática que todavía prevalecía en algunos alumnos, ya que se percibió que varios de ellos intentaban realizar los procedimientos de manera escrita en sus cuadernos, lo cual repercutía en el tiempo utilizado.

No obstante, con el uso reiterado de esta estrategia, se consiguió que la mayoría de los estudiantes logaran realizar de manera mental una mayor cantidad de operaciones matemáticas correctamente en el menor tiempo posible. Cabe mencionar que la aplicación de esta actividad también considera como un elemento importante la complejidad de los números y las operaciones, pues como en la mayoría de las actividades, se recomienda iniciar a partir de lo más sencillo a lo más complejo, en el área de las matemáticas también se hace la misma recomendación, es decir, que en un inicio se presenten a los estudiantes operaciones sencillas a partir de números enteros positivos y después incorporar números negativos, fraccionarios o decimales.

En definitiva, el uso constante del “Basta aritmético”, cumple muchas de las características principales del cálculo mental como la rapidez, la variabilidad, el uso explícito y consciente de las propiedades numéricas y la capacidad para elegir los procedimientos apropiados, encontrar resultados y juzgar la validez de las respuestas. Es por ello que la práctica reiterada del basta aritmético contribuye a que los alumnos desarrollen al máximo las habilidades cognitivas que les ayudarán a resolver diferentes problemas matemáticos del entorno escolar y de su contexto inmediato.

## Resuelve y gana



Figura XIX: Estrategia de cálculo mental titulada "Resuelve y gana"

Esta es una actividad centrada en la competencia, pues su realización consiste en organizar al grupo de alumnos en pequeños equipos de trabajo que competirán entre sí para obtener el mayor número de puntos posibles, los cuales se obtienen a partir de la solución de diferentes operaciones matemáticas siempre y cuando éstas sean correctas.

El desarrollo de esta estrategia se encuentra mediada principalmente por el docente, es él quien determina las operaciones que se han de realizar por cada uno de los integrantes del equipo de acuerdo a su turno de participación, sin embargo, es en este momento cuando el maestro también puede identificar las dificultades presentes en el alumno para resolver alguna operación.

Respecto a esta etapa se identificó que gran parte de los alumnos muestran cierto miedo o preocupación al participar frente al resto de sus compañeros, tal vez esto se produce por la incertidumbre que generan los procedimientos matemáticos y más si de una competencia se trata. No obstante, es también en este momento cuando el papel del docente adquiere un rol importante dentro de la clase ya que su actuar frente a esta situación favorecerá o entorpecerá el desarrollo del estudiante.

Otro aspecto de gran importancia que promueve esta estrategia es la inclusión, ya que todos los alumnos tienen la misma posibilidad de participar aunque carezcan de los conocimientos procedimentales más relevantes de la educación secundaria, lo cual al mismo tiempo se convierte en un ambiente de aprendizaje para todos, pues al ser una competencia, los estudiantes

que poseen un mejor dominio de las habilidades cognitivas ayudan a quienes muestran alguna dificultad al momento de resolver su operación.

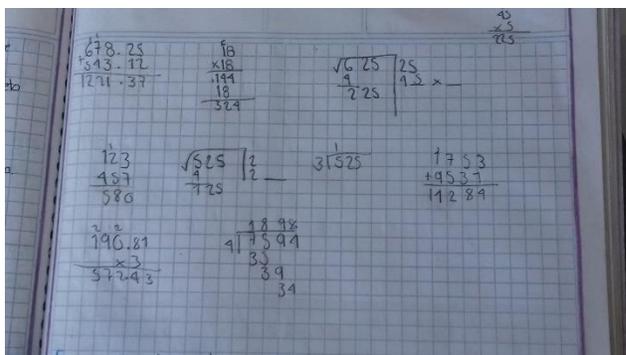


Figura XX: Operaciones escritas realizadas por un alumno con el objetivo de comprobar las soluciones de la actividad.

Por otra parte, la validación de resultados juega un papel muy importante dentro de esta estrategia, ya que los errores se pueden hallar con mucha frecuencia en este tipo de actividades, en este sentido aquellos alumnos cuyos conocimientos y habilidades son mayores que las del resto de los estudiantes pueden determinar con facilidad si los resultados obtenidos son correctos o no, sin embargo, no es el mismo caso para los alumnos cuyos conocimientos y habilidades son menores, es por ello que se sugiere realizar un tipo de cálculo escrito, en el que se utilicen apoyos de papel y lápiz, tal como se muestra en la figura anterior con la finalidad de encontrar resultados exactos y razonados que puedan servir de evidencia para aceptar o rechazar una solución.

## CONCLUSIONES

Es evidente que las Matemáticas han jugado un papel muy importante en la vida de los seres humanos desde la antigüedad hasta la época actual, permiten el desarrollo y la evolución de la sociedad, en muchas ocasiones su presencia pasa desapercibida, sin embargo, es una ciencia que se encuentra en múltiples actividades, por ejemplo, la música, la tecnología, las construcciones, etc., por estas razones es indispensable generar un cambio respecto a la perspectiva de rechazo que la mayoría de los estudiantes tienen hacia la asignatura, pues si bien es cierto que no todos tienen las mismas habilidades y conocimientos, las matemáticas no deben ser objeto de odio o frustración.

En este sentido, para lograr un cambio de ideas en los estudiantes y para alcanzar enseñanza y aprendizaje de calidad es necesario plantear y organizar situaciones acordes a las necesidades y requerimientos de los alumnos, por ello los programas de estudio correspondientes a educación básica establecen que las estrategias didácticas deben propiciar la movilización de saberes y conducir al logro de los aprendizajes esperados de manera continua e integrada, tomando como base ambientes de aprendizaje lúdicos que favorezcan el desarrollo de un aprendizaje significativo.

Es por ello que, a partir de la práctica docente y los resultados obtenidos mediante el uso de la metodología de Pólya como estrategia para la resolución de problemas, se diseñó y utilizó el cálculo mental como herramienta para favorecer la resolución de problemas matemáticos, dicha estrategia fue aplicada en diferentes contenidos temáticos de los cuales se rescató cada una de las situaciones relacionadas con el cálculo y las actividades desarrolladas, a continuación se presentan una serie de conclusiones que resultaron del trabajo realizado.

Un aspecto que constantemente influye en la educación, en la práctica docente y en el rendimiento de los estudiantes es el contexto, el cual se considera como el conjunto de elementos y características del entorno físico y cultural así como de las actividades económicas de sus habitantes, sus motivaciones, tradiciones y costumbres, lo cual interviene directamente en el actuar de cada uno de los estudiantes, en muchas ocasiones se enfrentan a múltiples problemáticas que requieren del apoyo y acompañamiento de los padres de familia, mismos que presentan dificultades al atender aspectos relacionados con sus hijos.

Es importante reconocer la grandeza con la que el contexto determina el acceso a los diferentes recursos indispensables para que el alumno pueda alcanzar el máximo logro de los aprendizajes esperados, en muchas ocasiones las carencias económicas y el entorno familiar no permiten al estudiante desarrollarse de manera plena dentro del ámbito educativo, por lo que es necesario sugerir actividades que promuevan un ambiente de confianza y seguridad en el que se valore y reconozca cada uno de los esfuerzos realizados al momento de cumplir con las tareas planteadas por el docente.

Respecto al contexto grupal, se considera como el factor más importante para desarrollar el trabajo docente, pues influye en el logro de cada una de las actividades, las cuales se considera que se realizaron en su mayoría de manera satisfactoria, a pesar del número de matrícula con el que se trabajó, razón por la cual se diseñaron actividades que se pudieran trabajar principalmente de manera individual o en pequeños equipos, con la finalidad de atender la mayor cantidad posible de dudas al momento de realizar las actividades

Se fomentó la socialización entre pares, ya que al terminar la resolución de un problema o al realizar alguna estrategia de cálculo mental los estudiantes daban a conocer sus resultados y el procedimiento utilizado para llegar a la solución, lo cual daba apertura a un análisis del trabajo realizado, en el que se identificaban los conocimientos conceptuales y procedimentales presentes en los estudiantes.

Por otra parte, la motivación y el interés por parte de los estudiantes también juega un papel fundamental en el desarrollo de las actividades, ya que si éstos no se encuentran motivados muy difícilmente cumplirán con lo que se les solicita, por ello el docente tiene la tarea de generar estrategias que fomenten el interés y la motivación para así conseguir que los alumnos se involucren con mayor facilidad en las actividades.

Respecto a ello, las estrategias de cálculo mental se basaron en ambientes de aprendizaje lúdicos, es decir, en pequeños juegos que despertaron el interés de los estudiantes, a su vez, esta estrategia se apoyó de ciertos incentivos que se conseguían a través de la competencia y la participación, lo cual provocó en los alumnos su deseo de involucrarse con mayor intencionalidad, permitiendo un mejor intercambio de ideas entre compañeros, todo ello sin descuidar el papel del docente como mediador de cada uno de los procesos implícitos.

Una conclusión más, obtenida a partir del trabajo realizado con alumnos de tercero de secundaria, es el impacto de los materiales y recursos didácticos empleados para la realización de las actividades, ya que encaminan al alumno a generarse un mayor interés por participar y realizar las tareas solicitadas, ayudándole a comprender y diseñar estrategias necesarias para obtener la mejor solución a los problemas presentados, además, es importante reconocer que la escasez de materiales y recursos didácticos en la mayoría de las asignaturas hace que el uso de éstos tenga un mayor impacto en el interés de los estudiantes ya que es algo diferente para ellos.

Además de lo anterior, se concluyó también que el uso de la metodología propuesta por George Pólya para la resolución de problemas, ayuda al alumno a desarrollar las competencias matemáticas propuestas en el Plan y programa de estudios 2011, sin embargo, el logro de estas competencias corresponde en gran parte a la labor docente, si no se apoya de manera correcta, ni se propicia el interés y la motivación de los estudiantes muy difícilmente podrán obtenerse los resultados esperados.

Respecto a los conocimientos matemáticos presentes en los alumnos, se concluyó que son parte fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de cualquier contenido temático, pues su deficiencia o desconocimiento influye en el aprendizaje de todos los contenidos consecuentes, por ello la importancia de conocer y atender cada una de las dificultades respecto a los conocimientos conceptuales y procedimentales con los que cuentan los estudiantes, ya que sólo de esta manera se podrá conseguir una enseñanza de calidad o de lo contrario seguirán su preparación académica sin dominar acciones básicas como la realización de operaciones matemáticas, lo cual no sólo repercutirá en su formación como estudiante, también en su vida diaria.

En este mismo sentido, se identificó que no basta con que los alumnos conozcan los algoritmos y procedimientos necesarios para solucionar operaciones básicas, pues si no se aplican tales conocimientos todo perdería sentido, entonces es fundamental promover en los estudiantes actividades en las que analicen y apliquen diferentes procedimientos que ayuden a solucionar un problema, o en su caso que conozcan y apliquen estrategias que les permitan realizar cálculos matemáticos en diferentes ámbitos.

Por último, la propuesta didáctica que se trabajó como estrategia para favorecer la resolución de problemas matemáticos se considera apropiada para conseguir el logro de los aprendizajes esperados y estándares curriculares planteados en los planes y programas de estudio y puede ser útil en cualquier contenido matemático, sin embargo, su buen funcionamiento depende de la intervención del docente, es decir, de cómo trabaja con los conocimientos que el estudiante va construyendo y cómo propicia el uso de estos conocimientos a lo largo de la formación académica del estudiante

Por otra parte, resulta importante destacar la importancia que tiene la propuesta didáctica en la vida cotidiana de todos los alumnos, pues el cálculo mental es una actividad que con frecuencia se practica en la mayoría de las actividades diarias y su falta de dominio sólo tendría como consecuencia el estancamiento de los estudiantes dentro de la sociedad.

Dentro de la propuesta didáctica se planearon y aplicaron estrategias de cálculo mental ligadas a la búsqueda y uso de técnicas matemáticas para la resolución de problemas, cuyo objetivo fundamental es favorecer la actividad reflexiva de cada alumno en cuanto a sus procesos y saberes, el cálculo mental influye en la capacidad de cada estudiante para resolver problemas, ya que permite establecer relaciones numéricas y conclusiones a partir de las mismas, así, mientras más se ejercite el cálculo mental, el alumnado tendrá la posibilidad de ir descubriendo nuevas y diferentes formas de aplicar y resolver situaciones problemáticas.

## REFERENCIAS

- Castro A., Prat. M. & Gorgorio N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de educación* (374).
- Chamorro, M. del C (2000). *Didáctica de las matemáticas*. España. Pearson
- Giménez J. & Gironde L. (1993). *Calculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.
- Gómez B. A. (1989). *Numeración y calculo*. España: Síntesis.
- Hernán F. & Carrillo E. (1989). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). *Conocimiento conceptual y procesal en matemáticas: un análisis introductorio*. Lawrence Associates.
- Howard, W. J. (2004). *Matemáticas sencillas. Aprende a calcular mentalmente sin problemas*. Barcelona: Paidós.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Ayudar a los niños a aprender matemáticas*. Washington. Nacional Academia de prensa.
- Parra C. & Saiz I. (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. México: Paidós.
- Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. (1999). Conocimiento conceptual y procesal de las matemáticas: ¿uno lleva al otro? *Diario de Psicología Educativa*
- Ruiz. A., Alfaro C. y Gamboa R. (2006). Conceptos, procedimientos y resolución de problemas en la lección de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1, 1-14.
- Santos de Trigo, Luz M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México, Grupo Iberoamericano.
- Schoenfeld, A. (1985). *Resolución de problemas matemáticos*. Florida: Prensa académica

Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. educación básica secundaria. matemáticas. México: comisión nacional de libros de texto gratuitos.

Vázquez, J. (2001). Cálculo mental. Historia, métodos y sugerencias para su enseñanza. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Peltier, L (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. Educación Matemática, 15(3),29-55.[fecha de Consulta 14 de Diciembre de 2019]. ISSN: 0187-8298. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40515303>

Pérez Y. y Beltrán C. (2011). ¿Qué es un problema en Matemática y cómo resolverlo? Algunas consideraciones preliminares. EduSol, 11(34),74-89.[fecha de Consulta 14 de Diciembre de 2019]. ISSN: . Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=4757/475748673009>

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense".

## ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LA COMISIÓN DE TITULACIÓN CON FUNDAMENTO EN LOS LINEAMIENTOS PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE TITULACIÓN EXPIDE EL:

### DICTAMEN No. 30

*A la C. Mariana Guadalupe Hernández Tapia*

QUIEN PRESENTÓ SU DOCUMENTO RECEPCIONAL CONCLUIDO Y FUE APROBADO CONFORME A LOS CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LA COMISIÓN DE TITULACIÓN. POR LO CUAL, CONOCEDORES DE SU RESPONSABILIDAD SE LE INVITA A CONTINUAR CON LOS TRÁMITES ESTABLECIDOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS, FORTALECIENDO ASÍ LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN.

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., A 07 DE JULIO DE 2020.

*Mtra. Luz María Serrano Orozco*

*Presidenta de la Comisión de Titulación*

## **Hoja de firmas**

**Elaboró**

---

**Mariana Guadalupe Hernández Tapia**

**Autorizó**

---

**Mtro. Ulises Romero de la Cruz**

**Revisó**

---

**Mtra. Claudia Argelia Colín García**

---

**Mtro. Ricardo Godínez Navarrete**

**Dictaminó**

---

**Mtra. Luz María Serrano Orozco**  
**Presidenta del Comité de Titulación**