ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

ENSAYO

ENSEÑANZA EFICAZ DE LAS MATEMÁTICAS MEDIANTE EL DESARROLLO DE LA DESTREZA MATEMÁTICA

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL PRESENTA:

MARA VENTURA MARTÍNEZ

ASESOR:
MTRO. EFRAÍN ALDAMA GARCÍA

SAN FELIPE DEL PROGRESO, JULIO DE 2020.

Índice

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es sin duda un tema de gran importancia, aunque se intenta transformar las prácticas docentes, en muchas de las aulas prevalece la enseñanza de la matemática a partir de los métodos tradicionales, es decir, el docente sigue apostando por la utilización de métodos matemáticos apoyados en la memorización y mecanización de algoritmos.

Con la intensión de contradecir tal afirmación y realidad escolar, la intervención didáctica, titulada *"Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática"*, desde su origen, busca que los alumnos de la escuela secundaria logren el *Éxito Matemático*, ofreciéndoles una educación matemática que fomente el aprendizaje al máximo nivel posible, convirtiéndose en pensadores matemáticos.

A través de la participación de los estudiantes en las tareas de aprendizaje que se desarrollaron en las diferentes sesiones de clase, los alumnos aplican una diversidad de procesos mentales, tales como el análisis, síntesis, reflexión, deducción, generalización y estimación; procesos que facilitan la construcción de su propio conocimiento.

El propósito central de la propuesta didáctica, desde el punto de vista metodológico, es transformar la práctica matemática en función de la Enseñanza Eficaz. Para esto, a la propuesta educativa del NCTM se le adapta el enfoque didáctico denominado *Tareas de Aprendizaje*, derivado de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1995).

La propuesta consta de *Ocho Prácticas de Enseñanza* retomadas del NCTM National Council of Teachers of Mathematics (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas por sus siglas en inglés) a la que se le adapta el enfoque de *Tareas Cognitivas* (Vergnaud, 1991), con esta forma de trabajo se procura el papel activo de los alumnos, por ello se diseñan diferentes *Tareas de Aprendizaje* de manera cuidadosa procurando que los alumnos sean quienes a través de las representaciones, preguntas deliberadas y el discurso matemático significativo alcancen el desarrollo tanto de la *Destreza matemática* como aprender matemáticas a altos niveles.

Por otro lado, la *Enseñanza Eficaz de las Matemáticas* es una estrategia educativa que garantiza que cada estudiante aprenda matemáticas a altos niveles. Dicha propuesta sugiere involucrar a los estudiantes en una serie de actividades de aprendizaje mediante experiencias socioeducativas <<individuales y colaborativas>> que fomentan la construcción del conocimiento, la habilidad para pensar matemáticamente y dar sentido a lo que se aprende así como el razonamiento matemático.

La propuesta de intervención didáctica presentó dos tipos de propósitos, de intervención e investigación; el propósito de intervención es *diseñar y experimentar propuestas de intervención caracterizadas por la innovación didáctica*. El de investigación, se orienta al *seguimiento y evaluación de los resultados de la intervención*, para su mejora constante.

El contenido de este trabajo es el resultado del análisis de la práctica educativa de la enseñanza de las matemáticas; incluye los logros alcanzados por los alumnos y las dificultades que enfrentaron.

En un inicio, al alumno se le dificultó cambiar de esquemas metodológicos respecto a las formas de aprender matemáticas; sin embargo, las tareas de aprendizaje permitieron la adecuación continua de los contenidos curriculares a la forma de trabajo que fueron desarrollando los alumnos. Con la participación del alumnado, las prácticas de enseñanza se hicieron más flexibles, interesantes y productivas.

Entre los logros de mayor impacto se encuentran la incipiente transformación de las prácticas de enseñanza y las actividades de aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria. El *Éxito Matemático*, la mejora en el desempeño y aprovechamiento de los estudiantes y los componentes de la Destreza Matemática.

En el capítulo 1 de manera general se describe el tema de estudio "*Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*", integrado por la descripción de este tema de estudio, los componentes de la propuesta educativa del NCTM, las preguntas que son guía del proceso de experimentación de la propuesta didáctica, lo que se sabe de tema y el contexto escolar.

El capítulo 2 *Cuerpos volumétricos rectos y piramidales* da cuenta de los logros cognitivos del alumno respecto del estudio de los cuerpos volumétricos rectos y piramidales, a partir de la implementación de las ocho prácticas de la enseñanza eficaz; aunado a esto, se describen los logros en cuanto al desarrollo de la destreza matemática y el aprendizaje conceptual en relación a los contenidos programáticos.

En este mismo capítulo, se argumenta acerca de la incorporación del enfoque didáctico de las tareas de aprendizaje y el apoyo que brinda a los alumnos para construir el conocimiento matemático a través de sus estrategias: problemas, situaciones problemáticas y ejercicios matemáticos.

En el capítulo 3 *Cuerpos volumétricos redondos* se dan muestras del avance en la aplicación de los distintos aspectos de la enseñanza eficaz, los logros en cuanto al aprendizaje de los alumnos a través de esta propuesta de trabajo, del desarrollo de su destreza matemática y del éxito de los alumnos en esta asignatura.

En conclusiones, el análisis y la reflexión respecto a la práctica docente y al proceso de aprendizaje derivado de la experimentación de la propuesta didáctica "*Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*", por medio de las *Ocho Prácticas de Enseñanza Eficaz de las Matemáticas* y adaptada con el enfoque de las *Tareas de Aprendizaje* favoreció a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante la Destreza Matemática, a partir de cambiar el estigma de que el docente es el actor principal en el proceso de aprendizaje, es decir hubo una transformación didáctica donde el alumno re-estructura su aprendizaje para hacerlo significativo y así alcanzar altos niveles de aprovechamiento y el éxito matemático.

CAPÍTULO 1. TEMA DE ESTUDIO

Descripción del tema de estudio

El tema de estudio denominado "*Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*", consiste en promover la destreza matemática y la adquisición de los contenidos curriculares con alumnos del tercer grado de la Escuela Secundaria Técnica Agropecuaria No.0001 "Emiliano Zapata"; en términos del NCTM, garantizar el éxito matemático y aprender matemáticas a altos niveles. Se ubica en la línea temática[1] "Análisis de Experiencias de Enseñanza", una de las tres líneas académicas que se tienen como opción para la conformación del documento Recepcional de la Licenciatura de Educación Secundaria con Especialidad de Matemáticas (LESEM).

La propuesta didáctica, *"Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática"* consiste en la experimentación de una propuesta didáctica basada en el diseño educativo del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) denominada Enseñanza Eficaz de las Matemáticas (NCTM, 2015); esta propuesta educativa ha sido aplicada en algunos estados de la Unión Americana con resultados reconocidos.

El propósito central de la propuesta didáctica, desde el punto de vista metodológico, es transformar la práctica matemática en función de la Enseñanza Eficaz. Para esto, a la propuesta educativa del NCTM se le adapta el enfoque didáctico denominado *Tareas de Aprendizaje*, derivado de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1995).

La Enseñanza Eficaz de las Matemáticas del NCTM se complementa con el enfoque de los Modelos Matemáticos para experimentarse en México, propiamente en las clases de matemáticas durante los periodos de Trabajo Docente que se desarrolla en la Escuela Secundaria Técnica Agropecuaria "Emiliano Zapata" No. 0001 ubicada en la comunidad de Emilio Portes Gil y San Agustín Mextepec.

[1] SEP (2019). Orientaciones Académicas para la Elaboración del Documento Recepcional.

La trasformación de la práctica docente en función de la Enseñanza Eficaz se lleva a cabo mediante Ocho Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas basadas en los Seis Principios Rectores, los aspectos de la Destreza Matemática, los Estándares de Base Común y el enfoque de las tareas de aprendizaje.

Algunos de los resultados de la aplicación de la propuesta y revelados mediante procesos de investigación del NCTM dan cuenta del mejoramiento del desempeño de los estudiantes y de los altos niveles de dominio de las matemáticas que alcanzan la mayoría de ellos. Por ejemplo, aumento en el porcentaje de estudiantes que obtuvo o rebasó la calificación de bueno en la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP) de un 13% en 1990 a un 42% en 2013, subida en la calificación promedio en el SAT-Math y ACT-Math de 501 a 514 y de 19.9 a 20.9 respectivamente y por tanto el aumento en el porcentaje de estudiantes considerados aptos para la educación media superior.

Es por estas razones y considerando la visión pionera del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, que se decide experimentar la propuesta de Enseñanza Eficaz de las Matemáticas; no obstante, resultaría completamente ajena a nuestro contexto debido a las condiciones que a diario se presentan en las instituciones educativas, sin embargo, se realiza una adaptación por medio del enfoque tareas de aprendizaje.

La Destreza Matemática es un concepto que involucra cinco aspectos interrelacionados para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, así como la adquisición y empleo eficaz del conocimiento y la relación con las habilidades matemáticas. Esto se postula como producto de la cognición el “éxito matemático de los estudiantes” dicho en otras palabras lograr que el alumno resuelva problemas o situaciones problemáticas con el rigor matemático que demandan y desarrolle de manera óptima las habilidades del pensamiento matemático; aprender matemáticas a altos niveles refiere al dominio por comprensión de los conocimientos matemáticos que forman parte del currículo del tercer grado de la escuela secundaria, en particular y, en general, de ese nivel educativo.

Por otro lado, la *Enseñanza Eficaz de las Matemáticas* es una estrategia educativa que garantiza que cada estudiante, aprenda matemáticas a altos niveles. Dicha propuesta sugiere involucrar a los alumnos en una serie de actividades de aprendizaje mediante experiencias socioeducativas <<individuales y colaborativas>> que fomentan la construcción del conocimiento, la habilidad para pensar matemáticamente y dar sentido a lo que seres aprende así como el razonamiento matemático.

La *Enseñanza Eficaz de las Matemáticas*, de acuerdo al NCTM (2015), consiste en el desarrollo de las clases a partir de las *Ocho Prácticas de Enseñanza Eficaz* que indican los componentes para una práctica de enseñanza y aprendizaje eficaz de alto impacto y de las habilidades esenciales insertadas en el interior del aula:

1. Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje
2. Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas
3. Uso y vinculación de las representaciones matemáticas
4. Favorecimiento del discurso matemático significativo
5. Planteamiento de preguntas deliberadas
6. Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual
7. Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas
8. Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes

Insertar estas prácticas dentro del aula favorece en el alumno un desarrollo personal y desempeño académico, debido a que en cada sesión de clase se promueve desarrollar cada una de estas prácticas.

Otro elemento de esta propuesta educativa son los *Principios Rectores*, que describen las características que un programa de matemáticas de excelencia debe tener para lograr una educación matemática de alta calidad, mismos que a continuación se mencionan:

- ❖ Enseñanza y aprendizaje
- ❖ Acceso y equidad
- ❖ Currículo
- ❖ Herramientas y tecnología
- ❖ Evaluación
- ❖ Profesionalismo

Los seis principios rectores son las características que un programa de matemáticas de excelencia debe contener para garantizar el éxito matemático tanto en el alumno como en el profesor, mediante las ocho prácticas de enseñanza mencionadas anteriormente.

La adopción de las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas, ofrece un camino seguro y eficaz para alcanzar los *Estándares de Base Común,* mismas que representan aquello que los estudiantes realizan para aprender matemáticas, propuestos también por el NCTM:

1. Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución:
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa
3. Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros
4. Hacer modelos con matemáticas
5. Utilizar estratégicamente las herramientas adecuadas
6. Cuidar la precisión
7. Buscar y utilizar estructuras
8. Buscar y expresar regularidades en el razonamiento iterativo

Otro elemento que conforma al NCTM, es la *Destreza Matemática,* que es el conjunto de cinco aspectos interrelacionados que los alumnos deben lograr para llegar al aprendizaje eficaz de las matemáticas.

- ✓ Comprensión de conceptos
- ✓ Destreza en los procedimientos
- ✓ Capacidad estratégica
- ✓ Razonamiento adaptativo
- ✓ Disposición productiva

Los contenidos curriculares que se desarrollarán mediante la propuesta didáctica "*Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*", de las Matemáticas en la escuela secundaria son:

- ➢ Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Aunque, la propuesta del NCTM de acuerdo a las ocho prácticas de enseñanza eficaz de las matemáticas permite que se puedan desarrollar en cualquier contenido y está a la vez en cada clase se pueda visualizar una práctica.

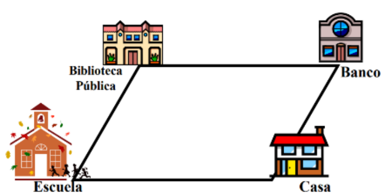
A partir de la perspectiva del NCTM, las ventajas de aplicar la propuesta es lograr un proceso de aprendizaje activo donde la participación del estudiante se oriente más a la construcción del conocimiento matemático, más que a la memorización, partiendo de experiencias personales y de la retroalimentación recibida al interactuar con compañeros y docentes.

El estudiante adquiere un desempeño eficaz en la clase, promueve el desempeño académico entre sus propios compañeros, debido a que se siente motivado y tiene la base fundamental para aprender matemáticas a altos niveles; además puede ser de apoyo a sus demás compañeros que se encuentren con problemas para resolver cierta situación problemática.

La inversión de la matemática eficaz, para diferenciarla de la propuesta del NCTM, consiste en una didáctica que forma alumnos que solo adquieren el saber matemático utilizando la memorización como estrategia cognitiva, aprobar los exámenes escritos y obtener una calificación decorosa.

Un ejemplo de la inversión de la matemática eficaz se identificó en el examen de diagnóstico con los estudiantes de tercer grado uno de los ejercicios del examen fue el siguiente:

1. Elena tiene un hijo que va a la escuela, de la casa a la escuela hay 1000 m. Esa, también, es la distancia entre la biblioteca pública y el banco. El jueves va por su hijo a la escuela, pero, después irán a la biblioteca pública, que queda a 500 m de la escuela. Al salir de la biblioteca deben ir al banco, para luego ir a la casa. La disposición de tales edificios es así: banco escuela, casa, biblioteca pública. El camino que Elena va a recorrer tiene forma de un cuadrilátero. Calcula el perímetro del cuadrilátero descrito.



En esta situación problemática algunos estudiantes se les dificultó porque se guiaron más por la disposición de los edificios en que estaban descritas en el ejercicio, en lugar de comprender que solo era realizar la suma de los lugares que recorrería Elena. Algunos resultados de los alumnos fueron: 2500 m, 1500 m, y pocos escribieron que 3000 m era el resultado correcto.

Otro ejemplo es el siguiente:

2. Cinco veces un número menos tres es igual a tres veces el mismo número más cinco. ¿Qué número es?

El algoritmo quedaba registrado de la siguiente manera:

$5x - 3 = 3x + 5$

La dificultad que presentaron los estudiantes en este ejercicio radica en el desconocimiento de la trasposición del lenguaje común al lenguaje algebraico, así como resolver una ecuación de primer grado, las operaciones inversas de la adición y producto, aun así se dieron casos de alumnos que llegaron al resultado por ensayo y error, cabe mencionar que utilizaron más tiempo en encontrar y comprobar de que número se trataba, sin embargo, si ellos conocieran las bases fundamentales para resolver situaciones problemáticas no hubiesen presentado dificultad alguna.

Con estos ejemplos se puede visualizar que la mayoría de los estudiantes carecen de las bases fundamentales que debieron adquirir en primer y segundo grado de la escuela secundaria y, además, se realizó mediante la mecanización de los algoritmos y la memorización de información matemática plasmada en los cuadernos a manera de apuntes.

Una situación problemática aplicada correspondiente al tema *Medida* con el contenido temático: *Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada*, con el aprendizaje esperado *Resuelve problemas que implican el uso del Teorema de Pitágoras.* Es el siguiente donde se les indico a los alumnos resolver el siguiente problema.

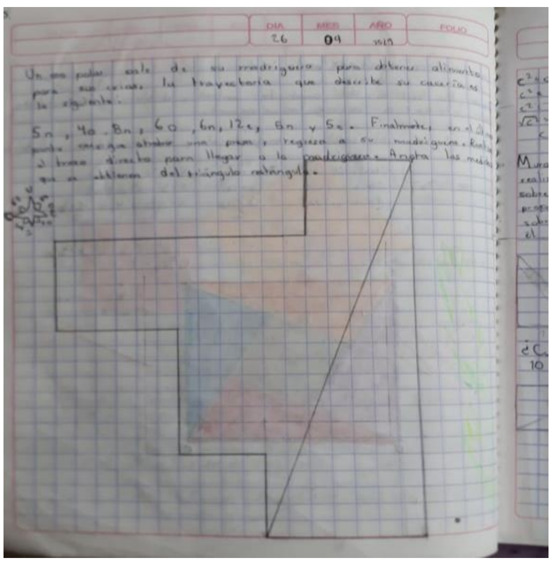
1. **El oso polar**

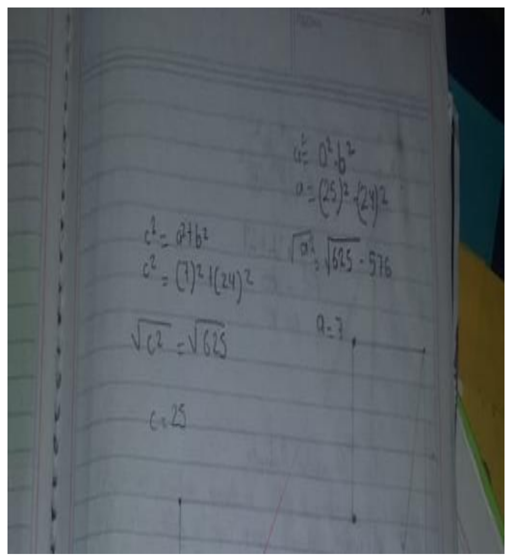
   Un oso polar sale de su madriguera para obtener alimento para sus crías, la trayectoria que describe su cacería es la siguiente: 5 km al N, 4 O, 8 N, 6 O, 6 N, 12 E, 5 N y 5

E. Finalmente, en el último punto consigue atrapar una presa y regresa a su madriguera. Realiza el trazo directo para llegar a la madriguera y anota las medidas obtenidas del triángulo rectángulo.

Una de las dificultades que enfrentaron los alumnos al representar de manera gráfica el problema <<representación conceptual>>: imposibilidad de representar las unidades de medida <<escala km: cm, por ejemplo>>, representación geométrica <<reconstrucción de la trayectoria>> y representación algebraica <<Teorema de Pitágoras>>.

Como se muestra en las siguientes imágenes.





Una de las soluciones ante este ejercicio fue solicitarles a los estudiantes de 3 grado grupo "D" una hoja milimétrica para obtener los resultados más exactos y comprobaran tanto el método gráfico y algebraico, debido a que en un primer momento los estudiantes argumentaban que no existía una conexión entre ellos.

Al resolver este ejercicio, los estudiantes pusieron a prueba la competencia *comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados* que demanda el Programa de Matemáticas 2011. Es necesario buscar las formas posibles para demostrar a los alumnos que tanto el método algebraico y gráfico tienen una conexión.

Preguntas

Las preguntas guía del proceso de experimentación de la propuesta didáctica se enuncian enseguida:

- ¿Qué tan factible es alcanzar el *Éxito Matemático* y el desarrollo de la Destreza Matemática implementado las herramientas didácticas de la enseñanza y aprendizaje eficaz de los contenidos curriculares de la asignatura de matemáticas en la escuela secundaria?

- ¿Cómo es que las Prácticas de la Enseñanza Eficaz generará como resultado excelentes niveles de aprendizaje si se conjuga con el enfoque didáctico de las Tareas de Aprendizaje?
- ¿Cuál es la forma de interacción entre la Destreza Matemática y las Ocho Prácticas de la Enseñanza Eficaz en las clases de matemáticas si se desarrollan a través de la solución de problemas y situaciones problemáticas?

Lo que se sabe del tema

La *Enseñanza Eficaz de las Matemáticas,* de acuerdo al NCTM (2015), consiste en el desarrollo de las clases a partir de las *Ocho Prácticas de Enseñanza Eficaz* que indican los componentes para una práctica de enseñanza y aprendizaje eficaz de alto impacto y de las habilidades esenciales insertadas en el interior del aula:

- **Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje:** establece metas matemáticas claras concernientes con las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo, las inserta dentro de los desarrollos de aprendizaje y las utiliza como guía para las decisiones de enseñanza.
- **Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas:** involucra a los estudiantes en tareas de resolución y análisis, las cuales promueven el razonamiento matemático y la resolución de problemas, además de que permiten que haya múltiples maneras de abordar los problemas y existan estrategias de resolución variadas.

- **Uso y vinculación de las representaciones matemáticas:** precisa a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas para profundizar el entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para concebir a ambos como herramientas para la resolución de problemas.
- **Favorecimiento del discurso matemático significativo:** promueve el diálogo entre los estudiantes a fin de que puedan construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas, a través del análisis y la comparación de sus enfoques y argumentos.
- **Planteamiento de preguntas deliberadas:** utiliza preguntas deliberadas para evaluar y mejorar el razonamiento del estudiante y para que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas importantes.
- **Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual:** logra la fluidez en los procedimientos matemáticos basándose en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, con el tiempo, se vuelvan hábiles en el empleo flexible de procedimientos, a medida que resuelvan problemas contextuales y matemáticos.
- **Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas:** brinda consistentemente a los estudiantes, de manera individual y colectiva, las oportunidades y los apoyos necesarios para que se involucren en esfuerzos productivos a medida que aborden ideas y relaciones matemáticas.
- **Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes:** utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoye y extienda el aprendizaje.

Insertar estas prácticas dentro del aula, favorece en el alumno un desarrollo personal y desempeño académico, debido a que en cada sesión de clase se promueve desarrollar cada una de estas prácticas.

Otro elemento de esta propuesta educativa son los *Principios Rectores*, que describen las características que un programa de matemáticas de excelencia debe tener para lograr una educación matemática de alta calidad, mismos que a continuación se mencionan:

- **Enseñanza y aprendizaje:** necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática.
- **Acceso y equidad:** requiere que todos los estudiantes tengan acceso a un currículo de matemáticas de alta calidad, a técnicas de enseñanza y aprendizaje eficaces, que les brinde altas expectativas y que les proporcione el apoyo y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje.
- **Currículo:** incluye un currículo que amplié unas matemáticas significativas y unos desarrollos de aprendizaje coherentes, así como también que acreciente las conexiones entre áreas de estudio matemático y los vínculos entre las matemáticas y el mundo real.
- **Herramientas y tecnología:** integra la utilización de tecnología y las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, dar sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático.
- **Evaluación:** garantiza que la evaluación sea una parte integral de la enseñanza, ofrece evidencias del dominio del contenido matemático importante y de las prácticas matemáticas relevantes, incluye una variedad de estrategias además de fuentes documentales, moldea la retroalimentación a los estudiantes, las decisiones de enseñanza y el mejoramiento del programa.
- **Profesionalismo:** los docentes y sus colegas se hacen responsables del éxito matemático de cada estudiante, así como de su avance profesional, personal y colectivo, hacia la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas.

Los seis principios rectores son las características que un programa de matemáticas de excelencia debe contener para garantizar el éxito matemático tanto en el alumno como en el profesor, mediante las ocho prácticas de enseñanza mencionadas anteriormente.

La adopción de las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas, ofrece un camino seguro y eficaz para alcanzar los *Estándares de Base Común*, mismas que representan lo que los estudiantes llevan a cabo; conforme aprenden matemáticas, propuestos también por el NCTM:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución:
- Razonar de manera abstracta y cuantitativa
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros
- Hacer modelos con matemáticas
- Utilizar estratégicamente las herramientas adecuadas
- Cuidar la precisión
- Buscar y utilizar estructuras
- Buscar y expresar regularidades en el razonamiento iterativo

Otro elemento que conforma al NCTM, es la *Destreza Matemática*, que es el conjunto de cinco aspectos interrelacionados que los alumnos deben lograr para llegar al aprendizaje eficaz de las matemáticas.

- ❖ **Comprensión de conceptos:** es el entendimiento y la vinculación de conceptos, operaciones y relaciones.
- ❖ **Destreza en los procedimientos:** refiere a la utilización significativa y flexible de procedimientos para resolver problemas.
- ❖ **Capacidad estratégica:** la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
- ❖ **Razonamiento adaptativo:** la capacidad para pensar lógicamente y justificar el propio razonamiento, refleja la necesidad de que los estudiantes desarrollen formas matemáticas de pensamiento, como la base para resolver problemas matemáticos que pudiesen afrontar en la vida real.
- ❖ **Disposición productiva:** es la tendencia a encontrar sentido en las matemáticas, a percibirlas como útiles y valiosas, a creer que el esfuerzo continuo para aprender matemáticas es redituable y a concebirse uno mismo como aprendiz y productor de matemáticas.

Un instrumento que refiere a la disposición productiva es la técnica de los TEPs (sigla alemana, muy usada en didáctica, con la cual se identifican los textos escritos de matemática producidos autónomamente, Textual Eigen Production, producciones textuales de los estudiantes) (Selter, 1994).

Los TEPs se entienden como textos escritos elaborados autónomamente por los estudiantes donde el argumento es una cuestión matemática. Estos no deben coincidir con otras producciones escritas en forma no autónoma (tareas, apuntes, descripciones de procedimientos, etcétera). Los TEPs es la descripción espontánea de un proceso, se ubica históricamente en “protocolos comentados de problema solving”

Se consideran TEPs aquellas producciones escritas en las cuales el estudiante puesto en una condición de desear expresarse en forma comprensible y con lenguaje personal, acepta liberarse de condicionamientos lingüísticos (más o menos reales) y hace uso de expresiones espontáneas.

Poner en práctica la Destreza Matemática generará en el alumno la facilidad de resolver situaciones problemáticas, porque tendrá las herramientas necesarias para comprender, interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.

El experimentar dicha propuesta del National Council of Teachers of Mathematics se hace tomando en consideración los óptimos resultados que ha obtenido su aplicación en los Estados de la Unión Americana, como lo afirma el NCTM, además de que representará en la educación básica una innovación trascendente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria.

Algunos de los resultados de la aplicación de la propuesta y revelados mediante procesos de investigación del NCTM dan cuenta del mejoramiento del desempeño de los estudiantes y de los altos niveles de dominio de las matemáticas que alcanzan la mayoría de ellos. Por ejemplo, aumento en el porcentaje de estudiantes que obtuvo o rebasó la calificación de bueno en la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP) de un 13% en 1990 a un 42% en 2013, subida en la calificación promedio en el SAT-Math y ACT-Math de 501 a 514 y de 19.9 a 20.9 respectivamente y por tanto el aumento en el porcentaje de estudiantes considerados aptos para la educación media superior.

Contexto escolar

El Trabajo Docente se realizó en la Escuela Secundaria Técnica Agropecuaria No. 0001 “Emiliano Zapata” ubicada en las localidades de Emilio Portes Gil y San Agustín Mextepec, municipio de San Felipe del Progreso, Estado de México.

La escuela secundaria cuenta con quince aulas destinadas para clases (cinco de cada grado), un centro de cómputo, sala de usos múltiples, aula telemática, laboratorio, biblioteca, áreas de producción entre pecuaria, agrícola, cárnicos, carpintería , servicio de USAER, dirección, orientación, sala de maestros, dos tiendas escolares, dos edificios para sanitarios, cancha de básquet y campo de fútbol. Actualmente, se le ha proporcionado algunos recursos materiales para mejorar la práctica docente y llevar a cabo un aprendizaje significativo en cada estudiante.

El centro de cómputo es usado por los grupos quienes en la asignatura de tecnología les corresponden el taller de informática. El aula telemática cuenta con cañón y 30 mini laptops, puede ser usada por todos los profesores, previamente solicitada y con mención en la planificación. El aula de usos múltiples cuenta con cañón y pantalla para la proyección o reproducción de películas o videos, tiene otros usos, por lo regular se realizan las reuniones con padres de familia. En la biblioteca se dispone de libros en su mayoría de texto, láminas de temas varios y video casetes con temas de distintas materias. El servicio de USAER está a cargo de una maestra encargada de atender a estudiantes con discapacidades o problemas de aprendizaje; quién se organiza con los maestros para apoyarlos durante alguna clase.

La intervención docente se realizó con 144 alumnos de tercer grado, con los grupos “A, B, C y D”, la mayoría provenientes de las localidades mencionadas, otros de lugares cercanos; cada grupo conformado de 36 alumnos, uno de los alumnos tiene dificultades de aprendizaje, la atención a este alumno se hizo generalmente de manera particular y con ayuda del titular de la asignatura y la profesora de USAER por llevar desde el inicio de su formación secundaria un currículo adaptado.

La mayoría de los estudiantes carecen de las bases fundamentales que debieron adquirir en primer y segundo año, de acuerdo a las pláticas informales y a los resultados que obtuvieron en el examen de diagnóstico.

DESARROLLO DEL TEMA

CAPÍTULO 2. CUERPOS VOLUMÉTRICOS RECTOS Y PIRAMIDALES

Se inicia este capítulo trayendo a colación dos preguntas planteadas al inicio de la intervención didáctica, motivo del tema de estudio "*Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*", las cuales se pueden considerar una invitación para innovar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria y apoyar la difusión de las sugerencias metodológicas propuestas por National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM, por sus siglas en inglés)

1. ¿Qué tan factible es alcanzar el *Éxito Matemático* y el desarrollo óptimo de la *Destreza Matemática* teniendo como herramienta los principios didácticos de la enseñanza eficaz y promoviendo el aprendizaje de los contenidos curriculares de la asignatura de matemáticas a través del enfoque de las tareas de aprendizaje?

2. ¿Cómo es que la conjugación de las Prácticas de la Enseñanza Eficaz con la resolución de problemas y situaciones problemáticas da como resultado el éxito matemático <<altos niveles de aprendizaje>> y el desarrollo óptimo de la destreza matemática?

Desde el punto de vista del NCTM, la enseñanza eficaz está orientada para garantizar el éxito de los estudiantes en sus programas de formación matemática, a la vez, para garantizar el desarrollo de la destreza en la disciplina y lograr el éxito matemático, es decir, que los estudiantes aprendan matemáticas a altos niveles.

En la propuesta de intervención didáctica *Enseñanza Eficaz de las Matemáticas mediante el desarrollo de la Destreza Matemática*, se retoman los propósitos del NCTM y se incorpora a los principios didácticos y a las Ocho Prácticas de Enseñanza Eficaz, el enfoque didáctico conocido como Enfoque de las Tareas de Aprendizaje[2]. Es de esta manera que la planificación didáctica del Trabajo Docente se realizó y se llevó a cabo mediante estas prácticas, los principios rectores y el enfoque didáctico ya mencionado.

Los siguientes contenidos fueron tratados a partir del enfoque tareas de aprendizaje que propician el desarrollo del aprendizaje mediante diferentes métodos de enseñanza (*labores escolares*) como lo son: estudio de situaciones nuevas, manipulaciones operativas, lecciones del maestro, análisis de discusiones colectivas, ejercicios, etcétera.

Eje temático **Forma, Espacio y Medida**	**Tema** **Medida**
Contenido Temático: Construcción de fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	*Aprendizaje Esperado:* Estimar y calcular el volumen de prismas.

La primera tarea propuesta a los alumnos de tercer grado; fue la siguiente:

Tarea 1:

> *Estudio de los cuerpos volumétricos más comunes para realizar mediciones y cálculos de áreas y volumen.*

Acciones[3]:

- Identifica y expresa las características de un cuerpo volumétrico (prismas) asimismo calcula el área de los prismas (cuadrangular, triangular, hexagonal y octagonal).
- Identifica y expresa las características del cuerpo volumétrico (pirámide).

[2] Tarea de aprendizaje. También llamadas Tareas Cognitivas son una serie de planteamientos que el docente se encarga de proveer al alumno; son diseñadas a partir de los contenidos curriculares y adquieren la forma de problemas matemáticos y de matemáticas, situaciones problemáticas e incluso ejercicios (Vergnaud, 1991)

[3] Acción. Es un concepto entresacado de la Epistemología Genética de J. Piaget el cual hace alusión al conocimiento como resultado de la interacción del sujeto que aprende con el objeto de conocimiento; la **acción** del sujeto cognoscente sobre el objeto de conocimiento es generadora de conocimiento acerca de ese objeto y de las relaciones que guarda con otros de la misma índole.

- Calcula el volumen de los siguientes cuerpos volumétricos: prismas (triangular, cuadrangular, hexagonal y octagonal) y pirámides (triangular, cuadrangular, pentagonal y hexagonal).

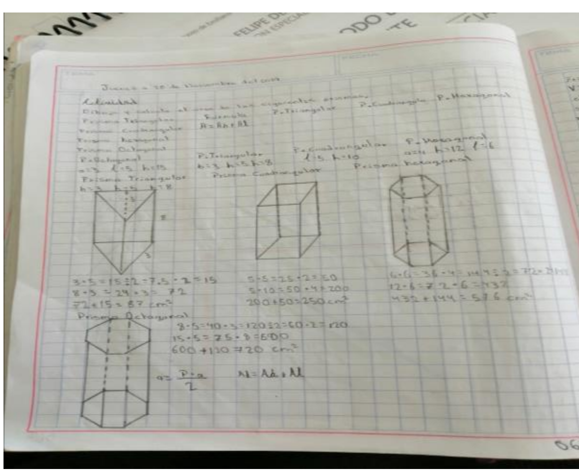
Desarrollo de la Tarea de Aprendizaje 1

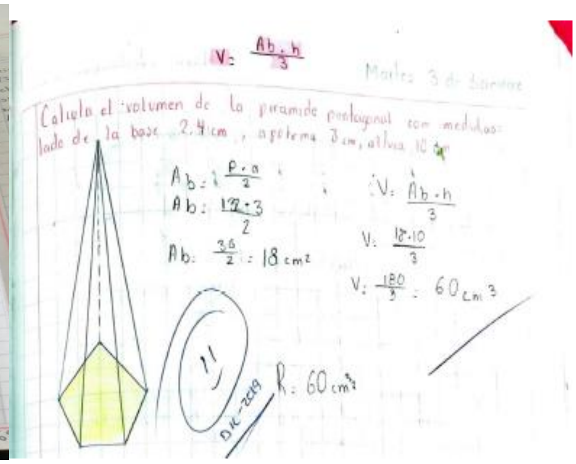
Se proporciona una colección de cuerpos volumétricos <<prismas y pirámides>> para su manipulación y reconocimiento.

Los estudiantes comenzaron a observar cada cuerpo volumétrico identificando cada uno de sus elementos haciendo mención que los prismas están constituidos por aristas, caras laterales rectangulares, dos bases y vértices. Sin embargo, una pirámide es similar por las aristas y los vértices, sigue conservando caras laterales pero ahora de forma triangular, cuenta con una base; cabe mencionar que el nombre del cuerpo volumétrico se deriva a partir de la base que sea proporcionada ya sea que se trate de un prisma o pirámide.

Se les muestra un prisma cuadrangular y una pirámide cuadrangular indicando que la observen bien e identifiquen en que se parecen y cuál es la diferencia de ambas, de manera grupal se llega a la conclusión *ambas figuras presentan la misma base, en el caso del prisma se tienen dos, las caras son rectangulares, presenta más vértices y aristas; a diferencia de una pirámide que solo tiene una base, las caras son triangulares y terminan en "punta".*

Se solicita a los estudiantes realicen los dibujos de los cuerpos volumétricos:





En seguida se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es la diferencia entre prisma y pirámide?

Los comentarios de los alumnos rondan las siguientes ideas:

- Ambos cuerpos volumétricos tenían caras laterales rectangulares.
- Ambos cuerpos volumétricos se le da su nombre de acuerdo a la figura que tiene de base.
- Los prismas son cuerpos rectos y presentan caras rectangulares o cuadrangulares, las pirámides tienen caras triangulares y terminan con un vértice.
- Las fórmulas para el volumen son iguales.

Finalmente, un estudiante al escuchar los comentarios de sus compañeros y después de haber observado cada cuerpo volumétrico realiza la comparación de ambos:

Prisma	**Pirámide**
☐ Dos bases ☐ Caras laterales rectangulares ☐ Vértices ☐ Aristas	☐ Una base ☐ Caras laterales triangulares ☐ Vértices solo de la base que terminan en punta ☐ Aristas
Ambos cuerpos volumétricos reciben su nombre a partir de la base.	

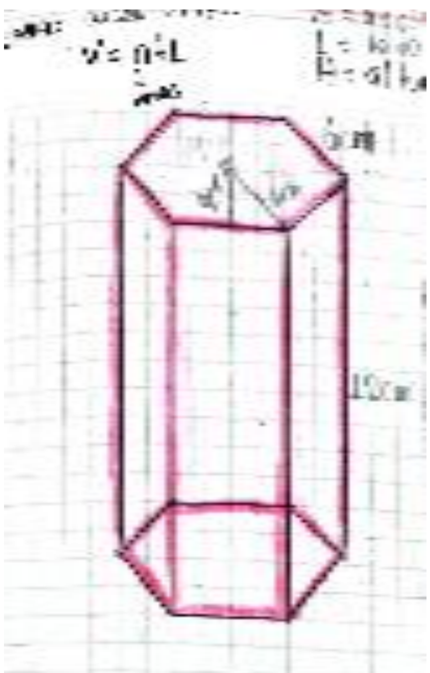
Reconocer de manera grupal las características de los prismas y pirámides ayudó para las siguientes actividades, asimismo, por medio del diálogo propició que los estudiantes socializaran sus ideas acerca de los prismas y pirámides y en colaboración reconstruir los conceptos acerca de estos cuerpos volumétricos.

Problema 1:

Calcula el área del prisma hexagonal con medidas $a = 4,\ l = 6\ y\ h = 12$ *unidades lineales*.

Método de solución 1

El método de solución 1 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

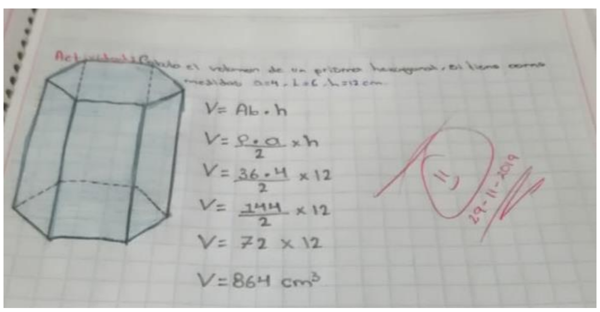
PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Calcula el área de un prisma hexagonal si tiene como medidas $a = 4$, $l = 6$ y $h = 12$ unidades lineales.	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $At = A_l + 2\ A_b$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: $A_b = \frac{P \cdot a}{2}$ $A_b = \frac{36 \cdot 4}{2}$ $A_b = \frac{144}{2}$ $A_b = 72$ $2\ A_b = 144\ cm^2$ $A_l = b * h$ $A_l = 6 * 12$ $A_l = 72$ $A_l = 72 * 6$ $A_l = 432\ cm^2$ $At = 432cm^2 + 144cm^2$ $At = 576\ cm^2$

Problema 2:

Calcula el volumen de un prisma hexagonal si tiene como medidas $a = 4$, $l = 6$ y $h = 12$ unidades lineales.

Método de solución 2

El método de solución 2 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

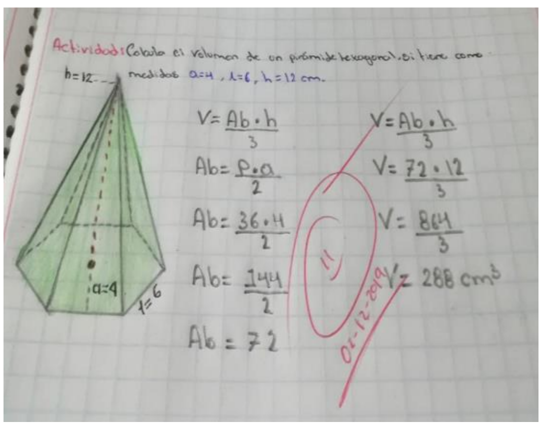
PLANTEAMIENTO	**ALGORITMO**
Calcula el volumen de un prisma hexagonal, si tiene como medidas, a=4 $l = 6$ y $h = 12$ unidades lineales.	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = A_b \cdot h$ Aunque también el alumno pudo utilizar la fórmula particular: $V = \frac{P \cdot a}{2} h$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: $V = A_b \cdot h$ $A_b = \frac{P \cdot a}{2}$ Sustitución de los datos $A_b = \frac{36 \cdot 4}{2}$ $A_b = \frac{144}{2}$ $A_b = 72\ cm^2$ $V = 72\ cm^2 \cdot 12\ cm$ $V = 864\ cm^3$

Problema 3:

> *Calcula el volumen de una pirámide hexagonal, si tiene como medidas* $a = 4$, $l = 6$ y $h = 12$ *unidades lineales.*

Método de solución 3

El método de solución 3 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

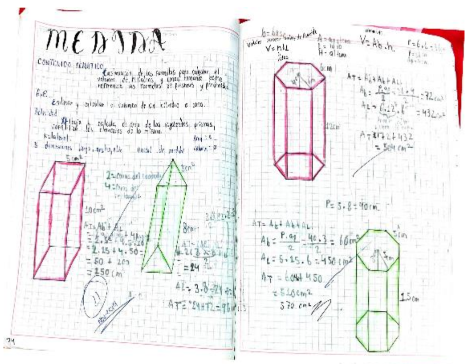
PLANTEAMIENTO	**ALGORITMO**
Calcula el volumen de una pirámide hexagonal, si tiene como medidas $a = 4$, $l = 6$ y $h = 12$ *unidades lineales.*	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $A_b = \frac{P \cdot a}{2}$ Sustitución de los datos $A_b = \frac{36 \cdot 4}{2}$ $A_b = \frac{144}{2}$ $A_b = 72\ cm^2$ $V = \frac{72\ cm^2 \cdot 12\ cm}{3}$ $V = \frac{864\ cm^3}{3}$ $V = 288\ cm^3$

Se logra apreciar que el desarrollo de la tarea de aprendizaje se basa en las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, mismas que van apareciendo a lo largo de las actividades realizadas por los alumnos. Por ejemplo, la clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

META:

Estudio de los cuerpos volumétricos más comunes y el cálculo del volumen de prismas y pirámides.

Durante el reconocimiento de los cuerpos volumétricos, algunos de los alumnos realizan las construcciones de estos, representaciones conceptuales[4] geométricas, lo cual hace más objetivo el propósito de identificarlos y representarlos a través de su dibujo y la enumeración de sus elementos. Como a continuación se presentan:



Durante esta situación de aprendizaje, la docente plantea algunas preguntas, por ejemplo, ¿Cuál es la diferencia entre prisma y pirámide?; la intención es la de orientar la actividad hacia el logro de la meta de aprendizaje. Sin antes generar un ambiente de aprendizaje donde se promueve el dialogo y la participación de los estudiantes, ya que consiste en aportar las ideas que subrayan la diferencia entre un cuerpo geométrico sea este un prisma o una pirámide.

Cada estudiante da a conocer la diferencia de ambos cuerpos volumétricos y una de las características que mencionan es *"un prisma está constituida por dos bases cuando una pirámide solo tiene una base*" otro elemento que lograron percibir a simple vista se trata del tipo de caras que tiene cada cuerpo, por ejemplo, un prisma tiene caras rectangulares mientras que una pirámide sus caras son triangulares y terminan unidas en punta. Sin embargo, llegan

[4] Representaciones Conceptuales. Desde el punto de vista de I. Fandiño, las representaciones matemáticas son indicadores de la construcción de conceptos por parte de los estudiantes; en la medida en que su uso sea frecuente y diversificado, la construcción de los conceptos se va consolidando.

a la conclusión *"la base es quién define el nombre del cuerpo volumétrico ya sea que se trate de un prisma (dos bases) o una pirámide (una base)"*.

Después de conocer la diferencia de ambos cuerpos volumétricos, los estudiantes calcularon el volumen de prismas a partir de la fórmula $V = A_b \cdot h$, aunque existieron estudiantes que utilizaron $V = \frac{P \cdot a}{2} h$; conocer el tipo de fórmula que utilizó el alumno permite visualizar la fluidez procedimental que aplica para resolver problemas, de manera que en un inicio se coloca la fórmula e ir resolviendo paso por paso; sin embargo, adquirir el conocimiento y la facilidad de cómo operar hace que los estudiantes omitan pasos que ya no requiere de colocarlos, porque conocen de donde proviene cada dato y número.

El uso de las distintas fórmulas también se puede tomar como otra forma de representar el concepto de prisma y volumen; al desarrollar algoritmos, también se toma como otra forma de representación conceptual.

Se logró observar que algunos alumnos desarrollaron totalmente el algoritmo de solución y algunos otros obviaban "pasos", lo cual corresponde al desarrollo de la destreza matemática en el sentido de la flexibilidad de los métodos de solución y otras habilidades como la generalización, que conforma la destreza matemática.

A través de las distintas representaciones se calcula el volumen de los cuerpos volumétricos, se obtiene un resultado exacto y al socializarlo, se está favoreciendo el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; además, de promover la adquisición del lenguaje geométrico-matemático, que también es un aspecto de la destreza matemática.

El hecho de compartir sus resultados a sus compañeros permite visualizar y obtener evidencia de aprendizaje, es decir, analizando meticulosamente el desarrollo del procedimiento; a partir de esto, se deduce que las representaciones son indicadores de la adquisición de los contenidos programáticos y de un aprendizaje eficaz.

Análisis de la tarea 1

La meta de aprendizaje involucra dos aspectos del aprendizaje de los contenidos programáticos, los cuales son:

1. Reconocimiento de las características de los cuerpos volumétricos entre ellos los prismas y las pirámides regulares.
2. Cálculo del volumen de prismas y pirámides.

En relación al primero, la generalidad de los alumnos que integran el tercer grado de la escuela secundaria logró diferenciar entre un prisma y una pirámide al reconocer las características más comunes de estos cuerpos. Se puede afirmar que lograron aprender este contenido sin mayor problema. (Por ejemplo, *reconocen a simple vista cuando un cuerpo volumétrico es un prisma o una pirámide*). Los resultados de aprendizaje de este contenido, como se dijo, lo lograron la mayoría de los estudiantes, es una muestra de qué a través de las ocho prácticas de la enseñanza, ellos logran aprender de manera eficaz.

De igual forma que en el primer contenido, en el segundo, los alumnos tuvieron éxito en la resolución de problemas de cálculo de volúmenes, los cinco planteamientos fueron resueltos correctamente. Algunos emplearon la fórmula general y otros la fórmula específica de cada prisma o pirámide, como se mostró en el apartado de métodos de solución.

La mayoría de los alumnos comprendieron que cuando se habla de volumen se refiere al espacio comprendido entre 3 dimensiones (largo, ancho y altura) que forman un cuerpo geométrico donde la unidad de medida son unidades cubicas. Asimismo, se comprendió que para calcular el volumen de prismas y pirámides regulares es necesario tener la base fundamental, que en este caso se refiere al cálculo de áreas de las bases de los cuerpos volumétricos, y conocer la altura; asimismo reconocieron los elementos de un prisma y una pirámide (arista, vértice y cara lateral) y el significado de estos.

Conocer cada elemento de los cuerpos volumétricos favoreció para tener una fluidez y destreza en los procedimientos, el alumno al saber la fórmula para calcular el área de la base le permitió ser más flexible en los procedimientos y utilizarla de manera significativa para resolver cualquier situación problemática, problemas y ejercicios (por ejemplo, calcular el volumen de prismas y pirámides: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales y octagonales).

Realizar la representación gráfica ayudó a los estudiantes para tener la habilidad de representar (dibujar) cuerpos volumétricos en tercera dimensión, y a la vez resolver problemas; por ejemplo, un estudiante mencionó que es favorable tener el dibujo porque así se le facilita identificar los datos que se mencionan.

Además el alumno al resolver los ejercicios de calcular el volumen de prismas haciendo uso de la fórmula $V = \frac{P \cdot a}{2} h$; ó $V = A_b \cdot h$ y pirámides $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ reflejó la necesidad de conocer cuál es la mejor manera en que el estudiante está aprendiendo y conocer su capacidad para pensar y justificar el propio razonamiento por medio de la explicación frente a sus compañeros, como se menciona anteriormente en las imágenes.

De esta manera se les planteó a los alumnos ¿En qué tipo de situaciones cotidianas es posible reconocer el concepto de volumen?

Respuestas:

- Recipientes.
- Cisternas.
- Producción agrícola.
- Productos envasados.

De manera general la mayoría de los alumnos logró el éxito en la asignatura en estas tareas de aprendizaje de las matemáticas ya que aprendieron o consolidaron sus saberes acerca del volumen; algunos estudiantes refieren al volumen como tres dimensiones (largo, ancho y altura); otros, a través de los elementos esenciales de un prisma y una pirámide (aristas, vértices, caras laterales, bases); algunos más como el algoritmo que requieren para calcular el volumen (área, perímetro, apotema, lado, altura) y la fórmula para prisma $V = \frac{P \cdot a}{2} h$; ó $V = A_b \cdot h$ y pirámide $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

La segunda tarea propuesta a los alumnos de tercer grado; fue la siguiente:

Tarea 2:

> *Justificación de la fórmula para calcular el volumen de una pirámide a partir de un prisma con misma base y altura.*

Acciones:

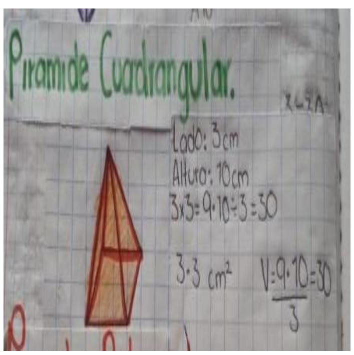
- Comprobación de la fórmula de una pirámide a partir de un prisma con misma base y altura con elementos sólidos.
- Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular y prisma cuadrangular.

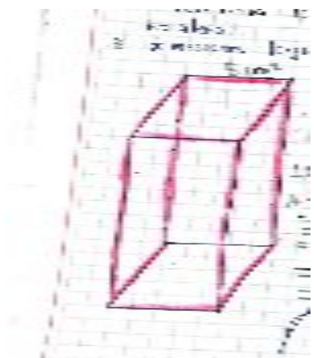
Desarrollo de la Tarea de Aprendizaje 2

Se proporciona el cuerpo geométrico prisma cuadrangular y pirámide cuadrangular solicitando a los alumnos que observen la semejanza de ambas.

Los estudiantes analizan que ambos cuerpos volumétricos tienen la misma forma de la base, la medida de los lados y altura es igual, la única diferencia que se ha estado mencionando anteriormente es referente a las caras laterales: para un prisma son caras rectangulares y una pirámide son caras triangulares.

Se solicita a los estudiantes realicen los dibujos de los cuerpos volumétricos:





Enseguida se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál cuerpo volumétrico tiene mayor capacidad un prisma o una pirámide?

Los comentarios de los alumnos indican que un prisma tiene mayor volumen que una pirámide, comienzan a dialogar entre ellos para justificar su respuesta. Después de un tiempo un alumno indica que un prisma es más grande porque a pesar que tienen las mismas medidas de base y de altura, las caras son diferentes, es ahí donde una cara rectangular es más grande que una cara triangular.

Situación 1:

Realiza el llenado de la pirámide cuadrangular con un elemento sólido, enseguida vierte el contenido en el prisma cuadrangular las veces que se requiera hasta lograr llenarlo.

La prueba de que un prisma es mayor que una pirámide consistió en:

- Llenado de la pirámide.
- Transvasar el contenido de la pirámide al prisma.
- Repetir la acción tantas veces fuese necesario.

Para ello se solicita que pasen al frente tres alumnos para realizar el experimento, el alumno 1 le corresponde realizar el llenado de la pirámide con lenteja, el alumno 2 realiza el vaciado en el prisma, y el alumno 3 sostiene el prisma y, a la vez, cuenta en voz alta las veces que se requirieron para llenar el prisma.

Después de realizar el vaciado, los alumnos se dan cuenta que se requiere de tres pirámides para llenar un prisma. Por lo tanto, llegan a la conclusión que una pirámide es una tercera parte de un prisma siempre y cuando cumpla con las siguientes condiciones:

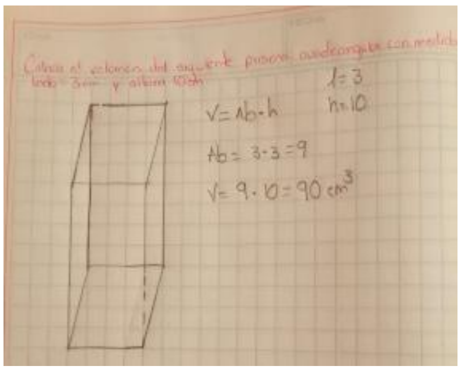
- Mismas bases.
- Mismas alturas.

Problema 1:

> *Calcula el volumen de un prisma cuadrangular, si tiene como medidas,* $l = 3$ y $h = 10$ unidades lineales.

Método de solución 1

El método de solución 1 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Calcula el volumen de un prisma cuadrangular, si tiene como medidas $l = 3$ y $h = 10$ unidades lineales.	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = A_b \cdot h$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: A_b = 3*3= 9 $V = 9 \cdot 10 = 90\ cm^3$ Volumen del prisma $90\ cm^3$.

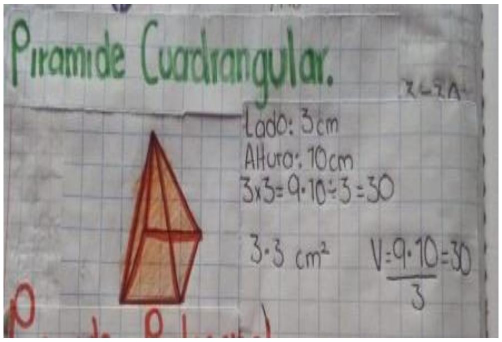
Problema 2:

Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular, si tiene como medidas, $l = 3$ y $h = 10$ unidades lineales.

Método de solución 1

El método de solución 1 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular, si tiene como medidas $l = 3$ y $h = 10$ unidades lineales.	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

<table>
<tr>
<td>Representación

</td>
<td>Considerando los datos proporcionados en el planteamiento:
A_b = 3*3= 9
$V = \frac{9 \cdot 10}{3}$
$V = \frac{90}{3} = 30\ cm^3$
Volumen de la pirámide $30\ cm^3$</td>
</tr>
</table>

Se logra apreciar que el desarrollo de la tarea de aprendizaje se basa en las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, mismas que van apareciendo a lo largo de las actividades realizadas por los alumnos. Por ejemplo, la clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

META:

Justificación de la fórmula para calcular el volumen de una pirámide a partir de un prisma con misma base y altura.

Durante el reconocimiento de la semejanza y diferencia de los cuerpos volumétricos prisma y pirámide, algunos de los alumnos realizan las construcciones de estos, representaciones conceptuales geométricas, lo cual hace más objetivo el propósito de identificarlos y representarlos a través de su dibujo.

Durante el desarrollo de la clase se plantea la siguiente pregunta:

¿Qué cuerpo volumétrico tiene mayor capacidad un prisma o una pirámide?

Los estudiantes observan detalladamente ambos cuerpos, después de un tiempo, comienzan a participar mencionando que un prisma tiene mayor volumen porque a pesar de que la pirámide tiene las mismas medidas, las caras laterales no son iguales; promover el diálogo entre los estudiantes favorece que exista la confianza de expresar sus ideas.

Después se realizó el experimento sobre el llenado del prisma con una pirámide de las mismas medidas (misma base, mismo lado y altura), donde la mayoría de los alumnos prestaron la atención necesaria, porque deseaban saber cómo es que la fórmula para calcular el volumen de una pirámide es $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ en ese momento identificaron que una pirámide es una tercera parte de un prisma siempre y cuando sea la misma base con las mismas medidas y la altura sea igual.

Realizar este experimento cumple con el principio rector *enseñanza y aprendizaje* “para lograr un programa de matemáticas de excelencia se necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten la habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas” (NCTM, 2015, p.5). Justificar la fórmula de manera grupal ha sido una experiencia significativa y a la vez ha dado sentido a la fórmula para calcular el volumen de pirámides, en los métodos de solución solo se hace mención de una pirámide cuadrangular, sin embargo, también se comprobó con otras pirámides.

Asimismo se hace uso de las *herramientas* (set de cuerpos volumétricos sólidos) como recurso esencial para justificar la fórmula del cálculo de volumen de prismas y pirámides con la finalidad de apoyar a los estudiantes para aprender, dar sentido a las matemáticas y razonar lógicamente.

De acuerdo al desarrollo de las actividades y la participación de los alumnos nos permite identificar el logro de los aprendizajes mediante la resolución de las tareas, mismas que forman parte del *currículo* que un programa de matemáticas de excelencia debe contener, creando un vínculo entre las matemáticas y el mundo real.

El logro de los aprendizajes se ve reflejada en la mayoría de los estudiantes de acuerdo a la *evaluación y profesionalismo* que utilizó la docente para abordar el contenido temático, la evaluación es una parte integral de la enseñanza que demuestra las evidencias del contenido, muestra las prácticas matemáticas más relevantes, incluye una variedad de estrategias y se brinda una retroalimentación a los escolares, por otra parte la docente es responsable del avance profesional, personal y colectivo, además de garantizar el éxito matemático.

Durante la resolución de las tareas de aprendizaje da cuenta de la Destreza matemática que ha adquirido el alumno desde la comprensión de conceptos para dar solución a los problemas, estableciendo el fundamento que llevará a la utilización significativa y flexible de los procedimientos (hacer uso de la fórmula), y a la vez la capacidad para formular y representar y resolver los problemas, después de representar toda la información el alumno tiene la capacidad para pensar y justificar el razonamiento utilizado.

Análisis de la tarea 2

La meta de aprendizaje involucra dos contenidos programáticos, los cuales son:

1. Reconocimiento de las características de los cuerpos volumétricos entre ellos los prismas y las pirámides regulares.

2. Cálculo del volumen de prismas y pirámides regulares.

En su momento, la mayoría de los alumnos que integran el tercer grado de la escuela secundaria, logró diferenciar entre un prisma y una pirámide al reconocer las características más comunes de estos cuerpos. Se puede afirmar que lograron aprender este contenido sin mayor problema. Los resultados de este aprendizaje es una muestra qué a través de las ocho prácticas de enseñanza, ellos logran aprender de manera eficaz para lograr el éxito matemático mediante la destreza matemática.

De acuerdo al segundo contenido, la generalidad de los alumnos sabe calcular el volumen de prismas y pirámides regulares, conoce los algoritmos y la obtención de cada uno de los datos que requiere para calcular el volumen, además conoce la relación existente entre el volumen de un prisma y una pirámide: bajo el siguiente criterio "*El volumen de una pirámide equivale a una tercera parte del volumen de un prisma*", siempre y cuando cumpla con la condición:

- Misma base
- Las medidas de los lados deben ser iguales
- La altura de ambos cuerpos geométricos debe de ser igual.

Los alumnos lograron tener el éxito al corroborar por medio de la representación algebraica que una pirámide es la tercera parte de un prisma como se mostró en el apartado métodos de solución haciendo uso de las fórmulas $V = A_b \cdot h \ y \ V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Al aprender y reconocer los conceptos fundamentales (comprensión de conceptos) que involucra el cálculo de volúmenes, se está impactando en el aprendizaje eficaz y el desarrollo de la destreza matemática, en este caso representada por el uso eficiente de los procedimientos para resolver problemas y ejercicio. Se subrayan aspectos de la destreza matemática y el aprendizaje eficaz que estuvieron presentes en el desarrollo de esta tarea y la solución de los planteamientos:

- Cálculo del volumen de la pirámide cuadrangular.
- Realizar procedimientos de solución más económicos en tiempo (obviando algunos "pasos").
- Reconociendo que el volumen del prisma en el cociente de 1:3 para hallar el resultado del volumen de la pirámide.

Elaborar una planificación a partir de las ocho prácticas de enseñanza eficaz hace que la enseñanza y el aprendizaje sean relevantes y significativos para los estudiantes por medio de experiencias individuales y colaborativas propicia que entre ellos exista la confianza para expresarse además de lograr el éxito matemático por medio de las diferentes tareas y a la vez aprendiendo matemáticas a altos niveles mediante la destreza matemática haciendo uso del diálogo, las representaciones, preguntas deliberadas entre otros que nos ayudará a conocer que alumno realmente ha comprendido el tema.

De manera general la mayoría de los alumnos logró el éxito en la asignatura al realizar las tareas de aprendizaje ya que aprendieron o consolidaron sus saberes acerca del volumen; algunos estudiantes refieren al volumen como tres dimensiones (largo, ancho y altura); otros, a través de los elementos esenciales de un prisma y una pirámide (aristas, vértices, caras laterales, bases); algunos más como el algoritmo que requieren para calcular el volumen (área, perímetro, apotema, lado, altura) y la fórmula para prisma $V = \frac{P \cdot a}{2} h$; ó $V = A_b \cdot h$ y pirámide $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Además, con ayuda de los cuerpos volumétricos sólidos y elementos sólidos (lentejas) se logró justificar la fórmula de la pirámide, haciendo de las matemáticas una asignatura interesante, relevante al conocer el porqué de la fórmula y no solo repetir patrones, la mayoría de los estudiantes se motivaron cuando realizamos la actividad y en las sesiones posteriores su participación fue mejor haciendo amena la clase.

Logrando los aprendizajes esperados mediante la enseñanza eficaz haciendo que un programa de matemáticas de excelencia cumpla con la enseñanza y aprendizaje eficaz mediante las tareas de aprendizaje, mostrando las mismas oportunidades para los alumnos y los recursos necesarios, hasta lograr la destreza matemática para llegar al éxito matemático.

La tercera tarea propuesta a los alumnos de TERCER GRADO; fue la siguiente:

> *Tarea 3:*
>
> *Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas haciendo uso de la fórmula para calcular el volumen de los cuerpos volumétricos (prisma y pirámide)*

Acciones:

- Calcular el volumen de prismas y pirámides:
  - Triangulares.
  - Cuadrangulares.
  - Hexagonales.
  - Octagonales.
- Resolución de problemas:

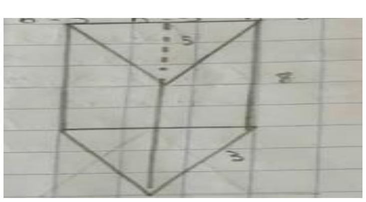
Desarrollo de la Tarea de Aprendizaje 3

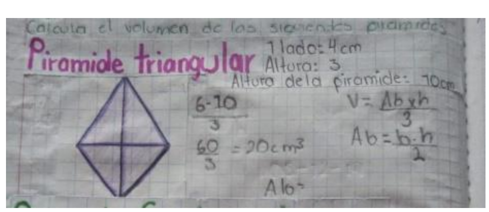
Para propósitos de este ensayo, se toma como ejemplo el prisma triangular.

Acción 1:

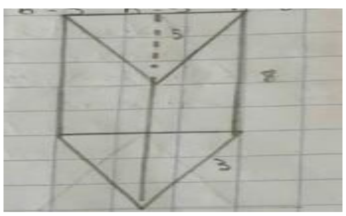
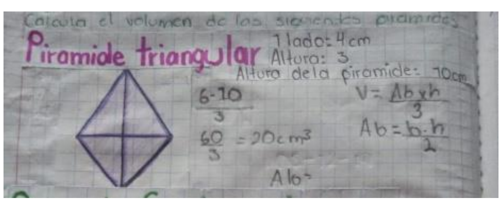
Calcula el volumen del prisma y pirámide triangular.

Método de solución 1:





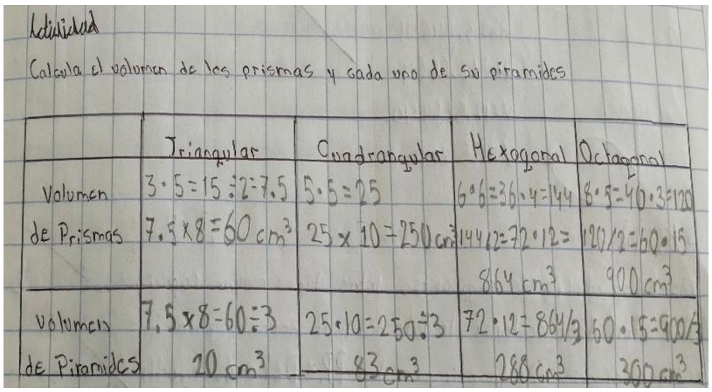
El método de solución 1 se considera el prisma y la pirámide triangular que consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

<table>
<tr><th>PLANTEAMIENTO</th><th>ALGORITMO</th></tr>
<tr><td>Calcula el volumen de los cuerpos volumétricos (prisma y pirámide triangular) con medidas l=4, altura del triángulo= 3, altura de la pirámide=10</td><td>El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida:
$V = A_b \cdot h$ Y $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$</td></tr>
<tr><td>Representación
Prisma

Pirámide

</td><td>Considerando los datos proporcionados en el planteamiento:
Prisma $V = A_b \cdot h$
A_b= 6 cm^2
$V = 6 \cdot 10$
$V = 60\ cm^3$
Para pirámide $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
$V = \frac{60}{3}\ cm^3$
$V = 20\ cm^3$</td></tr>
</table>

A partir del cálculo del volumen del prisma triangular, el alumno solo calcula el volumen de la pirámide dividiendo $V = \frac{60}{3}\ cm^3$ debido a que una pirámide es la tercera parte de un prisma; el alumno facilita su procedimiento porque menciona que a cada pirámide solo requiere de dividir el volumen del prisma entre tres.

Asimismo, en los siguientes cálculos de volúmenes de las diferentes pirámides que se mencionaron anteriormente ya no realizaron la representación (dibujo) solo calcularon algebraicamente como se muestra en la siguiente imagen.

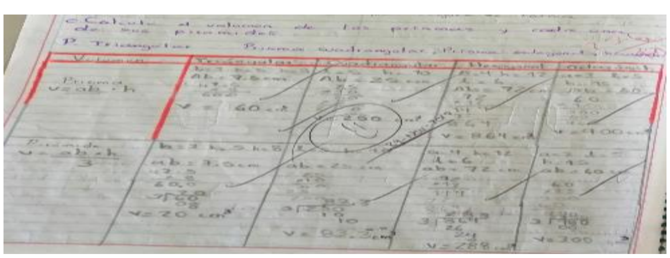
Método de solución 1:



El método de solución 1 consistió en la elaboración de la tabla que a continuación se muestra, no existe una representación gráfica (dibujo) pero realizaron sus algoritmos a partir de los datos que se les dio a conocer.

volumen	Triangular	Cuadrangular	Hexagonal	Octagonal
Prisma	3*5=15/2=7.5 7.5*8=60 cm^3	5*5=25 25*10=$250cm^3$	6*6=36*4=144 144/2=72 72*12=864cm^3	8*5=40*3=120 120/2=60 60*15=900cm^3
Pirámide	7.5*8=60 cm^3 60/3= 20 cm^3	25*10=$250cm^3$ 250/3=83cm^3	72*12=864cm^3 864/3=288cm^3	60*15=900cm^3 900/3=300cm^3

Método de solución 2



El método de solución 2 consistió en la elaboración de la tabla que a continuación se muestra, es parecida al método de solución 1, sin embargo, la alumna solo realiza las operaciones en la misma tabla, además no existe una representación gráfica (dibujo) pero realizaron sus algoritmos a partir de los datos que se les dio a conocer.

volumen	Triangular	Cuadrangular	Hexagonal	Octagonal
Prisma	3*5=15/2=7.5 7.5*8=60 cm^3	5*5=25 25*10=$250cm^3$	6*6=36*4=144 144/2=72 72*12=864cm^3	8*5=40*3=120 120/2=60 60*15=900cm^3
Pirámide	7.5*8=60 cm^3 60/3= 20 cm^3	25*10=$250cm^3$ 250/3=83cm^3	72*12=864cm^3 864/3=288cm^3	60*15=900cm^3 900/3=300cm^3

Como se mencionó anteriormente los alumnos ya no realizaron una representación gráfica, solo hicieron uso de las fórmulas y los datos que se brindaron para calcular el volumen de dichos cuerpos volumétricos, como se observa en ambos métodos de solución los alumnos para calcular el volumen de la pirámide les bastó con dividir el volumen del prisma entre tres para encontrar el volumen, sin dificultad alguna encontraron el volumen. Para la valoración de sus procedimientos, ellos comentaron que encontrar el volumen de la pirámide es más sencillo bajo la condición que se cuente con el volumen del prisma.

Acción 2 (Resolución de problemas)

> *Se sabe que el volumen de un prisma es de 12. 345 m^3, encuentra el volumen de la pirámide que tenga la misma base y la misma altura.*

El método de solución 1

PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Se sabe que el volumen de un prisma es de 12. 345 m^3, encuentra el volumen	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida:

de la pirámide que tenga la misma base y la misma altura.	$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: Sustitución $$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$ $$V = \frac{12.345}{3}\ m^3$$ $$V = 4.115\ cm^3$$

En esta resolución de problemas el alumno solo debe de encontrar el volumen de la pirámide, a partir del volumen del prisma proporcionado, es por ello que divide el volumen del prisma entre tres, asimismo no realiza una representación gráfica, pero se colocó una pirámide cuadrangular para hacer alusión al problema.

La clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

META:

Resolución de situaciones problemáticas y ejercicios haciendo uso de la fórmula para calcular el volumen de los cuerpos volumétricos (prisma y pirámide).

En este momento de la tarea de aprendizaje, los alumnos se abocan a la solución de situaciones problemáticas tipo ejercicio; cómo se logra apreciar, no realizan ninguna representación gráfica, además, plantean la conjetura de que, a partir de conocer el volumen del prisma, ya solo se realiza la división entre tres para obtener el volumen de la pirámide.

Los alumnos dialogan entre si y mencionan que para encontrar el volumen de una pirámide si se toma como referencia las medidas de un prisma, solo se trata de dividir entre 3. Los estudiantes hasta el momento han logrado una destreza en la fluidez de procedimientos, puesto que consideran obvios algunos momentos del desarrollo de los algoritmos.

De acuerdo con los resultados de las tareas de aprendizaje realizadas hasta el momento, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes ha logrado un aprendizaje eficaz y desarrollado suficientemente algunos de los aspectos de la destreza matemática.

Del aprendizaje eficaz se pueden reconocer aspectos como:

- Representarse de manera abstracta el contexto geométrico del problema o ejercicio.
- Uso correcto del algoritmo (fórmula) para realizar los cálculos.
- Obtener resultados correctos y exactos.

De la destreza matemática, los aspectos que son identificados son los siguientes:

- Fluidez procedimental.
- Habilidad algorítmica.
- Flexibilidad de pensamiento.
- Elaboración de representaciones.
- Reconocimiento conceptual.
- Habilidad estratégica.

De manera general, se estima que el 90% de los estudiantes ha logrado el éxito en la asignatura de matemáticas debido al progreso en su desempeño y la obtención de mejores calificaciones; además, se ha ganado en participación, cumplimiento y motivación para el estudio de las matemáticas, sin contar con un ambiente de aprendizaje cargado de emocionalidad positiva.

Otro aspecto importante de la enseñanza eficaz, es el logro en la adquisición del lenguaje matemático que los alumnos han demostrado durante la socialización de los métodos de solución a los problemas, situaciones problemáticas o ejercicios que componen las tareas de aprendizaje:

- Exposición de carteles con los métodos de solución.
- Explicaciones utilizando el pizarrón.
- Apoyando la participación de la docente ante el grupo.

- Diálogo durante el trabajo colaborativo para resolver los planteamientos.

Como se puede apreciar la mayoría de los alumnos ha logrado los aprendizajes esperados a partir de las ocho prácticas de enseñanza, que en cada sesión se propicia la participación de los estudiantes para llegar a la destreza matemática, han demostrado la fluidez de los procedimientos para la resolución de ejercicios, han adquirido la habilidad para formular, representar y resolver problemas, asimismo tienen la confianza para dar a conocer sus respuestas frente a sus demás compañeros, encontrando el sentido de las matemáticas.

Desarrollar las clases de matemáticas a partir de las ocho prácticas de enseñanza para adquirir la destreza matemática ha sido muy significativa tanto para los alumnos como para la docente, ha permitido ver a los educandos no solo el desarrollo de algoritmos sino encontrar el significado y sentido de las matemáticas a la vida real, como docente permite reconocer que para alcanzar el éxito matemático en los estudiantes, se necesita que ellos tengan actividades donde el aprendizaje sea significativo mediante experiencias individuales y colaborativas, asimismo que todos los educandos tengan las mismas oportunidades y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje hasta lograr el éxito matemático y aprender matemáticas a altos niveles.

CAPÍTULO 3: CUERPOS VOLUMÉTRICOS REDONDOS

En el capítulo anterior se inició con dos preguntas principales, la primera cuestiona la idea de alcanzar el éxito matemático por parte de los alumnos de la escuela secundaria; la segunda, cuestiona la relación entre las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, el enfoque didáctico y el desarrollo de la Destreza Matemática. En ese mismo capítulo, se da cuenta de que sí son posibles ambas situaciones; es decir, si es posible el éxito matemático, hacer que los alumnos aprendan matemáticas con un nivel de aprovechamiento deseable, desarrollen su destreza en matemática.

En este capítulo se dan muestras del avance en la aplicación de los distintos aspectos de la enseñanza eficaz, los logros en cuanto al aprendizaje de los alumnos a través de esta propuesta de trabajo, del desarrollo de su destreza matemática y del éxito de los alumnos en esta asignatura.

De nuevo, se hace uso del enfoque didáctico de las Tareas de Aprendizaje, para el desarrollo de los contenidos programáticos relacionados con el cálculo de volúmenes de cuerpos esféricos, cilindros y conos; contenido por demás importante en la formación matemática de los estudiantes.

De manera esquemática, se enuncia los contenidos empleados para esta fase de la intervención didáctica.

Eje temático Forma, Espacio y Medida	**Tema** Medida
Contenido Temático: Construcción de fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	*Aprendizaje Esperado:* Estimar y calcular el volumen de cilindros o conos.

La primera tarea propuesta a los alumnos de tercer grado; fue la siguiente:

Tarea 1

Estudio de los cuerpos volumétricos más comunes para realizar mediciones y cálculos de volumen.

Acciones:

- Identifica los cuerpos que se generan al girar una figura plana sobre un eje: un triángulo y un rectángulo. (Cuerpos de revolución)
- Identifica y expresa las características de los cuerpos volumétricos cilindro y cono.
- Calcula el volumen de los siguientes cuerpos volumétricos: cono y cilindro.

Desarrollo de la Tarea de Aprendizaje 1

Pregunta:

¿Cómo imaginan que se vería un triángulo o un rectángulo girando a gran velocidad?

Los comentarios de los alumnos rondan las siguientes ideas:

- Para el caso del triángulo se puede formar una pirámide.
- Se sigue formando un rectángulo y triángulo.
- Con el rectángulo se forma un cilindro.
- Ambas figuras permanecen iguales.
- Con el triángulo se forma un cono.

Después de escuchar las respuestas de los alumnos se les muestran las siguientes figuras planas (rectángulo y triángulo rectángulo)

Se proporcionan los modelos de las figuras planas para formar un <<cilindro y cono recto >> para su reconocimiento.

Se les presenta a los estudiantes un rectángulo y aunado en uno de sus lados un material solido vertical (popote o palito de madera) que posteriormente se comienza a girar, observando los alumnos que se forma un cilindro; quiere decir que un cilindro se obtiene a partir de un rectángulo realizando un giro de al menos 360°. Enseguida se les muestra un triángulo rectángulo, donde se tomará uno de sus catetos como eje de rotación realizando la misma técnica de hacerlo girar al menos 360° hasta obtener un cono recto, indicándoles que de un triángulo rectángulo se obtiene un cono recto.

Los estudiantes observan detalladamente cada uno de los cuerpos, la docente hace una intervención para indicar que lo que acaban de observar se llaman “cuerpos de revolución” porque cuando una figura plana gira alrededor de un eje se obtiene un cuerpo de revolución.

Los tres cuerpos de revolución más importantes son el cilindro, el cono y la esfera. Sin embargo, en esta ocasión solo utilizaremos el cilindro y cono que nos involucra para realizar el cálculo de volúmenes.

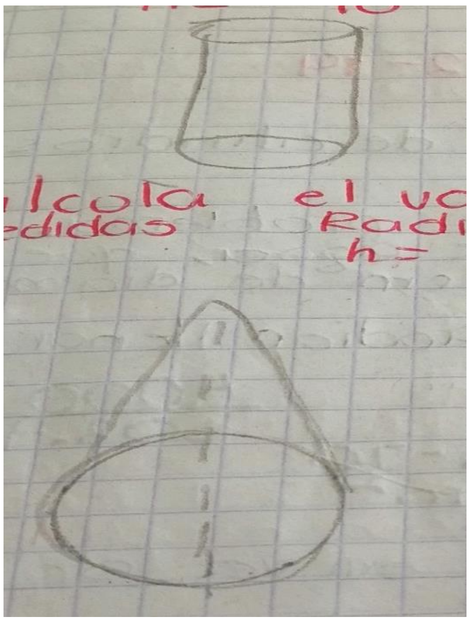
> *Se proporciona una colección de cuerpos volumétricos <<cilindro y cono >> para su manipulación y reconocimiento.*

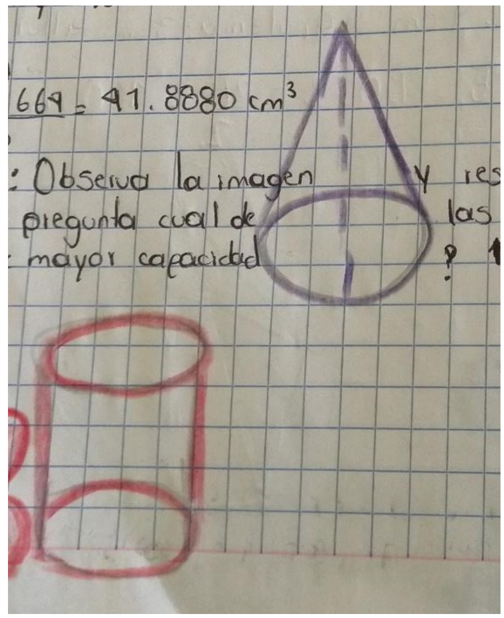
Después de conocer la figura por la cual se forma un cilindro y cono, se les proporciona a los alumnos los cuerpos volumétricos para que identifiquen las características de los mismos, ellos comienzan a participar mencionando que un cilindro es un cuerpo limitado por dos círculos iguales y la superficie curva engendrada por dos puntos del rectángulo; los círculos iguales se denominan bases, la superficie curva “superficie lateral”, generatriz, además cuenta con una altura. Para calcular el volumen del cilindro se debe de considerar la fórmula para obtener el área de la base haciendo uso del radio y el valor de π=3.1416

Para el cono recto mencionan que es formado por un triángulo rectángulo e identifican que este cuerpo volumétrico está limitado por un círculo denominado base, se tiene una superficie curva, cuenta con una generatriz, la altura y un vértice también conocido como cúspide. Para calcular el volumen del cono recto se requiere de primero calcular el área de la base haciendo uso de la formula $A = \pi r^2$ donde el valor de π=3.1416

Finalmente, los alumnos mencionan que al realizar los giros de cada figura se observa de un rectángulo que al ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° sobre uno de sus lados como eje de rotación se forma un cilindro, y para el caso del triángulo rectángulo se toma uno de sus catetos como eje de rotación para ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° formando un cono recto. Después de conocer que cuerpos se forman a partir de dichas figuras, se les muestra a los alumnos los cuerpos volumétricos (un cilindro y cono) para identificar cada uno de sus elementos, iniciando con el cilindro tiene 2 bases, superficie lateral, generatriz y altura. Mencionan que un cono recto es similar, aunque solo tiene una base, superficie curva, generatriz, vértice y altura.

Se solicita a los estudiantes realicen los dibujos de los cuerpos volumétricos:





Después de conocer, identificar y mencionar las características de los cuerpos se construyen las siguientes conclusiones:

- **Los cuerpos de revolución** son figuras planas que al girar sobre un lado se forma un cuerpo de revolución, asimismo se observa que a partir de un rectángulo al ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° sobre uno de sus lados como eje de rotación se forma un cilindro, y para el caso del triángulo rectángulo se toma uno de sus catetos como eje de rotación para ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° formando un cono recto.
- **Los cuerpos volumétricos (un cilindro y cono)** son cuerpos de revolución y sus elementos son, iniciando con el cilindro tiene 2 bases, superficie lateral, generatriz y altura. Un cono recto es similar, aunque solo tiene una base, una superficie curva, generatriz, vértice y altura.

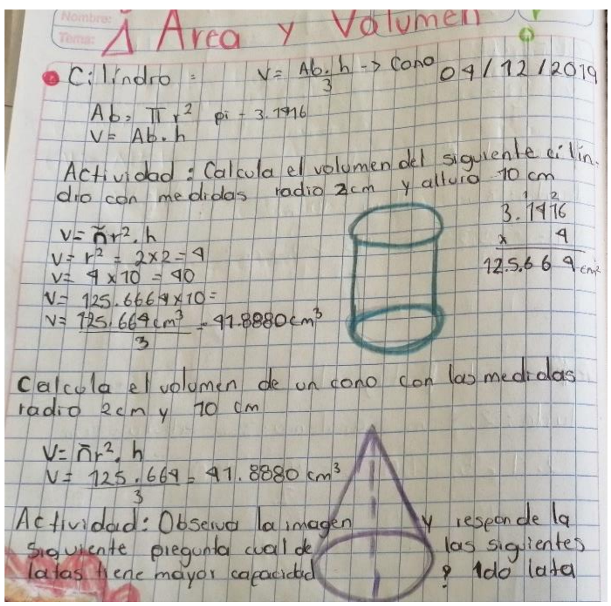
- Asimismo mencionan que un cilindro y cono su base es un círculo por lo tanto para calcular el área de un círculo se utiliza la fórmula $A = \pi r^2$ es por ello que para calcular el volumen de un cilindro se hará uso de $\pi = 3.1416$ para que no existan controversias con los decimales.

Reconocer de manera grupal las características del cilindro y cono recto ayudó para las siguientes actividades, asimismo, por medio del diálogo propició que los estudiantes socializaran sus ideas acerca del cilindro y cono y en colaboración reconstruir los conceptos acerca de estos cuerpos geométricos.

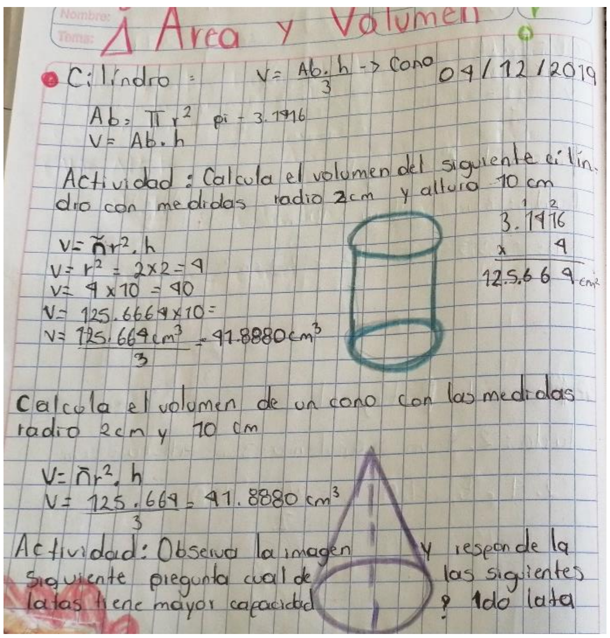
Problema 1:

Calcula el volumen del siguiente cilindro con medidas r= 2 cm y altura= 10 cm enseguida calcula el volumen de un cono con las mismas medidas.

Método de solución 1



El método de solución 1 consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

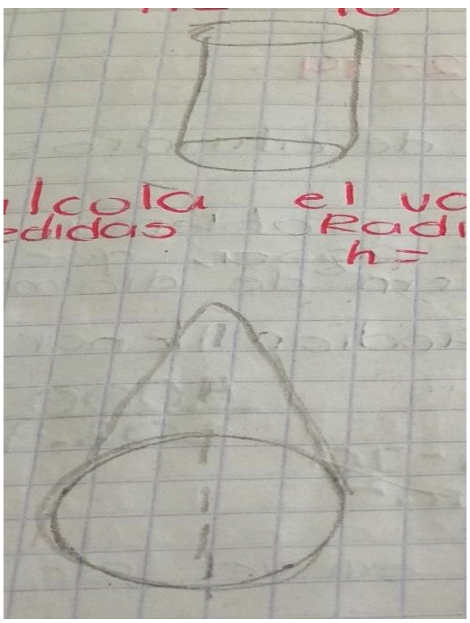
PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Calcula el volumen de los cuerpos volumétricos: ***Cilindro:** radio: 2 cm altura: 10 cm* ***Cono:** radio=2 cm altura: 10 cm*	El algoritmo de solución se basa en las fórmulas conocidas: $V = A_b \cdot h$ y $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
Representación  	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: Cilindro $V = A_b \cdot h$ $A_b = \pi r^2$ $A_b = \pi 4$ $A_b = 12.5664\ cm^2$ $V = 12.5664 \cdot 10$ $V = 125.664\ cm^3$ Para cono $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $V = \frac{125.664}{3}\ cm^3$ $V = 41.888\ cm^3$

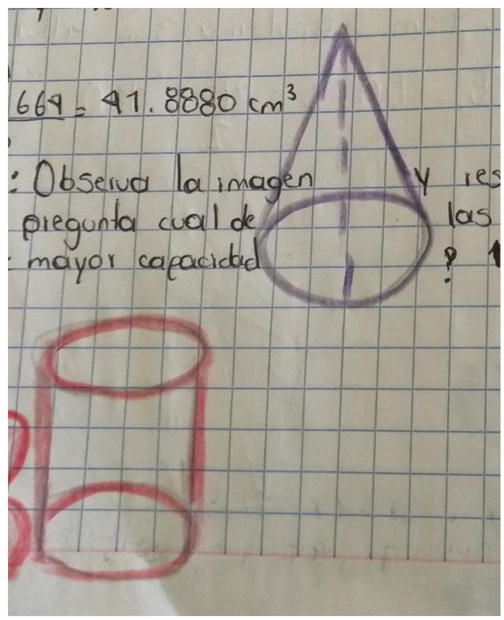
Para calcular el volumen de ambos cuerpos volumétricos el alumno hace uso del volumen del cilindro solo para dividir entre tres y encontrar el volumen del cono.

Se logra apreciar que el desarrollo de la tarea de aprendizaje se basa en las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, mismas que van apareciendo a lo largo de las actividades realizadas por los alumnos. Por ejemplo, la clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

> **META:**
>
> *Estudio de los cuerpos volumétricos más comunes y el cálculo del volumen de cilindro y cono.*

Durante el reconocimiento de los cuerpos volumétricos, algunos de los alumnos realizan las construcciones de estos, representaciones conceptuales[5] geométricas, lo cual hace más objetivo el propósito de identificarlos y representarlos a través de su dibujo y la enumeración de sus elementos. Como a continuación se presentan:





Durante esta situación de aprendizaje, la docente plantea algunas preguntas, por ejemplo, ¿*Cómo imaginan que se vería un triángulo o un rectángulo girando a gran velocidad*?; la intención es la de orientar la actividad hacia el logro de la meta. El ambiente de aprendizaje se base en el diálogo y la participación de los estudiantes, consiste en aportar las ideas acerca de los cuerpos volumétricos que se pueden formar con las figuras planas (un rectángulo y un

---

[5] Representaciones Conceptuales. Desde el punto de vista de I. Fandiño, las representaciones matemáticas son indicadores de la construcción de conceptos por parte de los estudiantes; en la medida en que su uso sea frecuente y diversificado, la construcción de los conceptos se va consolidando.

triángulo rectángulo) al ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° y encontrar la diferencia entre un cuerpo volumétrico sea este un cilindro o cono.

Cada estudiante da a conocer la diferencia de ambos cuerpos volumétricos y una de las características que mencionan es *"un cilindro está constituido por dos bases cuando un cono solo tiene una base y un vértice*" otro elemento que lograron percibir a simple vista se trata de la figura plana que engendra a los cuerpos volumétricos , por ejemplo para formar un cilindro se necesita de un rectángulo y tomar uno de sus lados como eje de rotación; para formar un cono se necesita de un triángulo rectángulo y tomar como eje de rotación uno de sus catetos. Sin embargo, llegan a la conclusión: *"Para formar ambos cuerpos volumétricos se necesita ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° y tomar un lado o cateto, cual sea el caso como eje de rotación)".*

Después de conocer la diferencia de ambos cuerpos volumétricos, los estudiantes calcularon el volumen de un cilindro a partir de la formula $V = A_b \cdot h$, aunque existieron estudiantes que utilizaron $V = A = \pi r^2 h$; conocer el tipo de fórmula que utilizó el alumno permite visualizar la fluidez procedimental que aplica para resolver problemas, de manera que en un inicio se colocaba la fórmula e ir resolviendo paso por paso; sin embargo, adquirir el conocimiento y la facilidad de cómo operar hace que los estudiantes omitan pasos que ya no requiere de colocarlos, porque conocen de donde proviene cada dato y número.

El uso de las distintas fórmulas también se puede tomar como otra forma de representar el concepto de cilindro y volumen; al desarrollar algoritmos, también se toma como otra forma de representación conceptual.

Se logró observar que algunos alumnos desarrollaron totalmente el algoritmo de solución y algunos otros obviaban "pasos", lo cual corresponde al desarrollo de la destreza matemática en el sentido de la flexibilidad de los métodos de solución y otras habilidades como la generalización, que conforma la destreza matemática.

A través de las distintas representaciones se calcula el volumen de los cuerpos volumétricos, se obtiene un resultado exacto y al socializarlo, se está favoreciendo el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; además, de promover la adquisición del lenguaje geométrico-matemático, que también es un aspecto de la destreza matemática.

El hecho de compartir sus resultados a sus compañeros permite visualizar y obtener evidencia de aprendizaje, es decir, analizando meticulosamente el desarrollo del procedimiento; a partir de esto, se deduce que las representaciones son indicadores de la adquisición de los contenidos programáticos y de un aprendizaje eficaz.

Análisis de la tarea 1

La meta de aprendizaje involucra dos aspectos de los contenidos programáticos, los cuales son:

1. Reconocimiento de las características de los cuerpos volumétricos entre ellos cilindros y conos.
2. Cálculo del volumen de cilindros y conos.

Con base en las actividades de la tarea de aprendizaje 1, se afirma que la generalidad de los alumnos que integran el tercer grado de la escuela secundaria logró diferenciar entre un cilindro y cono tras reconocer las características más comunes de estos cuerpos. Por ejemplo, *reconocen a simple vista cuando un cuerpo volumétrico es un cilindro y un cono* así como de dónde se originan: *figuras planas y sólidos de revolución*.

De igual forma que en el primer contenido, en el segundo, los alumnos tuvieron éxito en la resolución de problemas de cálculo de volúmenes, el planteamiento de calcular el volumen de cilindro y cono fueron resueltos correctamente. Algunos emplearon la fórmula general y otros las fórmulas específicas de los cuerpos volumétricos en cuestión.

Los alumnos comprendieron que cuando se habla de volumen se refiere a la conjugación de tres dimensiones: largo, ancho y altura, ya no sólo como el espacio que ocupa un cuerpo; aunque ambos conceptos involucran las mismas unidades de medida: unidades cubicas. Asimismo se comprendió que para calcular el volumen de cilindros y conos es necesario tener la base fundamental, que en este caso se refiere al cálculo de áreas de las bases de los cuerpos volumétricos, y conocer la altura; asimismo reconocieron los elementos de un cilindro (dos bases, generatriz, superficie lateral, altura) y cono (una base, generatriz, superficie curva, altura y vértice también llamada cúspide).

Conocer cada elemento de los cuerpos volumétricos favoreció para tener una fluidez y destreza en los procedimientos, el alumno al saber la fórmula para calcular el área de la base le permitió ser más flexible en los procedimientos y utilizarla de manera significativa para resolver cualquier situación problemática, problemas y ejercicios (por ejemplo, calcular el volumen de cilindros y conos).

Realizar la representación gráfica ayudó a los estudiantes para tener la habilidad de representar (dibujar) cuerpos volumétricos en tercera dimensión, y a la vez resolver problemas; por ejemplo, un estudiante mencionó que es favorable tener el dibujo porque así se le facilita identificar los datos que se mencionan.

Además el alumno al resolver los ejercicios de calcular el volumen de cilindros haciendo uso de la formula $V = \pi r^2 h$; ó $V = A_b \cdot h$ y conos $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ reflejó la necesidad de conocer cuál es la mejor manera en que el estudiante está aprendiendo y conocer su capacidad para pensar y justificar el propio razonamiento, por medio de la explicación frente a sus compañeros como se menciona anteriormente en las imágenes.

De esta manera se les planteó a los alumnos ¿En qué tipo de situaciones cotidianas es posible reconocer el concepto de volumen?

Respuestas:

- Recipientes.
- Cisternas.
- Producción agrícola.
- Productos envasados.

De manera general la mayoría de los alumnos logró el éxito en la asignatura en estas tareas de aprendizaje de las matemáticas ya que aprendieron o consolidaron sus saberes acerca del volumen; algunos estudiantes refieren al volumen como tres dimensiones (largo, ancho y altura); otros, a través de los elementos esenciales de un cilindro y cono (superficie cilíndrica o cónica de revolución, vértice, altura, generatriz, bases); algunos más como el algoritmo que requieren para calcular el volumen (área, altura) y la fórmula para cilindro $V = \pi r^2 h$; ó $V = A_b \cdot h$ y conos $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

La segunda tarea propuesta a los alumnos de tercer grado; fue la siguiente:

Tarea 2:

Justificación de la fórmula para calcular el volumen de un cono a partir de un cilindro con misma base y altura.

Acciones:

- Comprobación de la fórmula de un cono a partir de un cilindro con misma base y altura con elementos sólidos.
- Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos: cono y cilindro.
- Resolución del problema "Las latas"

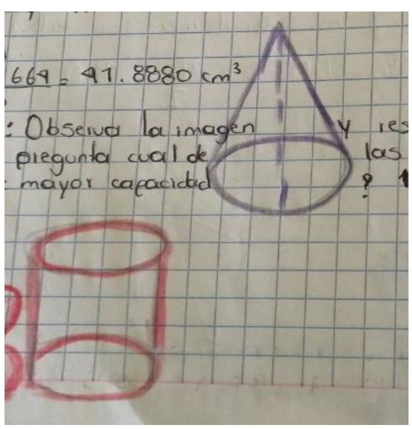
Desarrollo de la Tarea de Aprendizaje 2

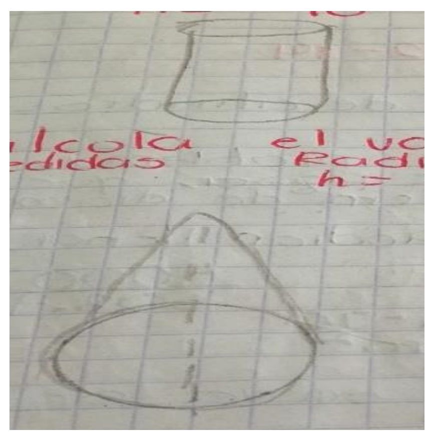
Pregunta 1:

¿Cuál de los cuerpos que tienen en sus manos tiene como origen el triángulo y cuál el rectángulo?

Los estudiantes analizan que ambos cuerpos volumétricos tienen la misma forma de la base, altura es igual; sin embargo, un cilindro tiene dos bases, y un cono tiene una sola base, además de una cúspide.

Se solicita a los estudiantes representen gráficamente los cuerpos volumétricos





La mayoría de los alumnos deduce, de los conceptos construidos en la tarea de aprendizaje 1, que el origen del cono es el triángulo y del cilindro es el rectángulo.

Pregunta 2

¿Qué cuerpo volumétrico tiene mayor capacidad un cilindro o un cono?

Los comentarios de los alumnos indican que un cilindro tiene mayor volumen que un cono, comienzan a dialogar entre ellos para justificar su respuesta. Después de un tiempo un alumno indica que un cilindro es más grande porque a pesar que tienen las mismas medidas de base y de altura, la superficie de origen <<rectángulo>> es mayor que la correspondiente al cono <<triángulo>>.

Situación 1:

Realiza el llenado del cono con un elemento sólido, enseguida vierte el contenido en el cilindro las veces que se requiera hasta lograr llenarlo.

La prueba de que un cilindro es mayor que un cono consistió en:

- Llenado del cono.
- Transvasar el contenido del cono al cilindro.
- Repetir la acción tantas veces fuese necesario.

Para ello se solicita que pasen al frente tres alumnos para realizar el experimento, el alumno 1 le corresponde realizar el llenado del cono con lenteja, el alumno 2 realiza el vaciado en el cilindro, y el alumno 3 sostiene el cilindro y, a la vez, cuenta en voz alta las veces que se requirieron para llenar el cilindro.

Después de realizar el vaciado, los alumnos se dan cuenta que se requiere de tres conos para llenar un cilindro. Por lo tanto, llegan a la conclusión que un cono es una tercera parte de un cilindro siempre y cuando cumpla con las siguientes condiciones:

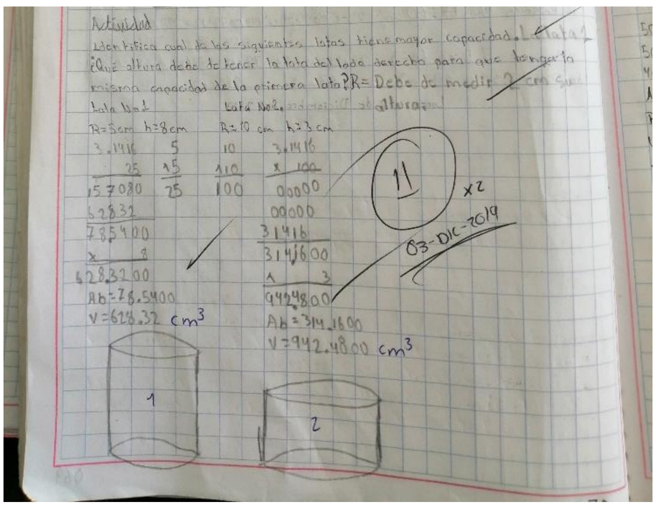
- Misma base.
- Misma altura.

Problema 1:

Observe las siguientes latas y responda a la pregunta ¿Cuál de las siguientes latas crees que tiene mayor capacidad?

Método de solución 1

Consistió en el desarrollo de los algoritmos que se muestran en la representación anterior, a continuación, se describen esquemáticamente.

PLANTEAMIENTO	**ALGORITMO**
Observe las siguientes latas y responda a la pregunta ¿Cuál de las siguientes latas crees que tiene mayor capacidad?	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = A_b \cdot h$
Representación 	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: $V = \pi r^2 h$ Lata 1: r=5 cm h= 8 cm $V = \pi 25 * 8$ $V = 78.54 * 8$ $V = 628.32\ cm^3$ Lata 2: r=10 cm h=3 $V = \pi 100 * 3$ $V = 314.16 * 3$ $V = 942.48\ cm^3$

Para dar solución a la pregunta, los alumnos calcularon el volumen de ambas latas de forma cilíndrica haciendo uso de la formula $V = \pi r^2 h$ para después realizar la comparación de capacidades y encontrar ¿Qué lata tiene mayor capacidad?

Asimismo, se logra apreciar que el desarrollo de la tarea de aprendizaje se basa en las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, mismas que van apareciendo a lo largo de las actividades realizadas por los alumnos. Por ejemplo, la clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

META:
Justificación de la fórmula para calcular el volumen de un cono a partir de un cilindro con misma base y altura.

Durante el reconocimiento de la semejanza y diferencia de los cuerpos volumétricos cilindro y cono, algunos de los alumnos realizan las construcciones de estos, representaciones conceptuales geométricas, lo cual hace más objetivo el propósito de identificarlos y representarlos a través de su dibujo.

Durante el desarrollo de la clase se plantea la siguiente pregunta:

¿Qué cuerpo volumétrico tiene mayor capacidad un cilindro o un cono?

Los estudiantes observan detalladamente ambos cuerpos, después de un tiempo, comienzan a participar mencionando que un cilindro tiene mayor volumen porque a pesar de que el cono tiene las mismas medidas, la superficie cilíndrica de revolución es más grande que la superficie cónica de revolución; promover el diálogo entre los estudiantes favorece que exista la confianza de expresar sus ideas.

Después se realizó el experimento sobre el llenado del cilindro con un cono de las mismas medidas (misma base, mismo lado y altura), donde la mayoría de los alumnos prestaron la atención necesaria, porque deseaban saber cómo es que la fórmula para calcular el volumen de un cono es $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ en ese momento identificaron que una cono es una tercera parte de un cilindro siempre y cuando sea la misma base con las mismas medidas y la altura sea igual.

Realizar este experimento cumple con el principio rector *enseñanza y aprendizaje* "para lograr un programa de matemáticas de excelencia se necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten la habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas" (NCTM, 2015, p.5). Justificar la fórmula de manera grupal ha sido una experiencia significativa y a la vez ha dado sentido a la fórmula para calcular el volumen de conos, en los métodos de solución se hace mención del cálculo de dos latas de forma cilíndrica.

Asimismo se hace uso de las *herramientas* (set de cuerpos volumétricos sólidos) como recurso esencial para justificar la fórmula del cálculo de volumen de cilindros y conos con la finalidad de apoyar a los estudiantes para aprender, dar sentido a las matemáticas y razonar matemáticamente .

De acuerdo al desarrollo de las actividades y la participación de los estudiantes nos permite identificar el logro de los aprendizajes mediante la resolución de las tareas, mismas que forman parte del *currículo* que un programa de matemáticas de excelencia debe contener, creando un vínculo entre las matemáticas y el mundo real.

El logro de los aprendizajes se ve reflejada en la mayoría de los estudiantes de acuerdo a la *evaluación y profesionalismo* que utilizó la docente para abordar el contenido temático, la evaluación es una parte integral de la enseñanza que demuestra las evidencias del contenido, muestra las prácticas matemáticas más relevantes, incluye una variedad de estrategias y se brinda una retroalimentación a los estudiantes por otra parte la docente es responsable del avance profesional, personal y colectivo, además de garantizar el éxito matemático.

Durante la resolución de las tareas de aprendizaje da cuenta de la Destreza matemática que ha adquirido el alumno desde la comprensión de conceptos para dar solución a los problemas, estableciendo el fundamento que llevará a la utilización significativa y flexible de los procedimientos (hacer uso de la fórmula), y a la vez la capacidad para formular y representar y resolver los problemas, después de representar toda la información el alumno tiene la capacidad para pensar y justificar el razonamiento utilizado.

Análisis de la tarea 2

La meta de aprendizaje involucra dos contenidos programáticos, los cuales son:

1. Reconocimiento de las características de los cuerpos volumétricos entre ellos cilindros y conos.
2. Cálculo del volumen de cilindros y conos.

En su momento, la mayoría de los alumnos que integran el tercer grado de la escuela secundaria, logró diferenciar entre un cilindro y cono al reconocer las características más comunes de estos cuerpos. Se puede afirmar que lograron aprender este contenido sin mayor problema. Los resultados de este aprendizaje es una muestra que, a través de las ocho prácticas de enseñanza, ellos logran aprender de manera eficaz para lograr el éxito matemático mediante la destreza matemática.

De acuerdo al segundo contenido, la generalidad de los alumnos sabe calcular el volumen de cilindros y conos, conoce los algoritmos y la obtención de cada uno de los datos que requiere para calcular el volumen, además conoce la relación existente entre el volumen de un cilindro y cono: bajo el siguiente criterio "*el volumen de un cono equivale a una tercera parte del volumen de un cilindro*", siempre y cuando cumpla con la condición:

- Misma base
- La altura de ambos cuerpos geométricos debe de ser igual.

Los alumnos lograron tener el éxito al corroborar por medio de la representación algebraica que un cono es la tercera parte de un cilindro como se mostró en el apartado métodos de solución haciendo uso de las fórmulas $V = A_b \cdot h \ y \ V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Al aprender y reconocer los conceptos fundamentales (comprensión de conceptos) que involucra el cálculo de volúmenes, se está impactando en el aprendizaje eficaz y el desarrollo de la destreza matemática, en este caso representada por el uso eficiente de los procedimientos para resolver problemas y ejercicio. Se subrayan aspectos de la destreza matemática y el aprendizaje eficaz que estuvieron presentes en el desarrollo de esta tarea y la solución de los planteamientos:

- Cálculo del volumen de un cono.
- Realizar procedimientos de solución más económicos en tiempo (obviando algunos "pasos").
- Reconociendo que el volumen del cilindro en el cociente de 1:3 para hallar el resultado del volumen del cono.

Elaborar una planificación a partir de las ocho prácticas de enseñanza eficaz hace que la enseñanza y el aprendizaje sean relevantes y significativos para los estudiantes por medio de experiencias individuales y colaborativas propicia que entre ellos exista la confianza para expresarse además de lograr el éxito matemático por medio de las diferentes tareas y a la vez aprendiendo matemáticas a altos niveles mediante la destreza matemática haciendo uso del diálogo, las representaciones, preguntas deliberadas entre otros que nos ayudará a conocer que alumno realmente ha comprendido el tema.

De manera general la mayoría de los alumnos logró el éxito en la asignatura al realizar las tareas de aprendizaje ya que aprendieron o consolidaron sus saberes acerca del volumen; algunos estudiantes refieren al volumen como tres dimensiones (largo, ancho y altura); otros, a través de los elementos esenciales de un cilindro y un cono (generatriz, vértices, superficie de revolución, bases, altura); algunos más como el algoritmo que requieren para calcular el volumen (área, altura) y la fórmula para cilindro $V = A_b \cdot h$ y cono $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Además, con ayuda de los cuerpos volumétricos sólidos y elementos sólidos (lentejas) se logró justificar la fórmula del cono, haciendo de las matemáticas una asignatura interesante, relevante al conocer el porqué de la fórmula y no solo repetir patrones, la mayoría de los estudiantes se motivaron cuando realizamos la actividad y en las sesiones posteriores su participación fue mejor haciendo amena la clase.

Logrando los aprendizajes esperados mediante la enseñanza eficaz haciendo que un programa de matemáticas de excelencia cumpla con la enseñanza y aprendizaje eficaz mediante las tareas de aprendizaje, mostrando las mismas oportunidades para los alumnos y los recursos necesarios, hasta lograr la destreza matemática para llegar al éxito matemático.

Tarea 3:

Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas haciendo uso de la fórmula para calcular el volumen de los cuerpos volumétricos (conos y cilindros)

Acciones:

- Resolución de la situación problemática “Vasitos cónicos”

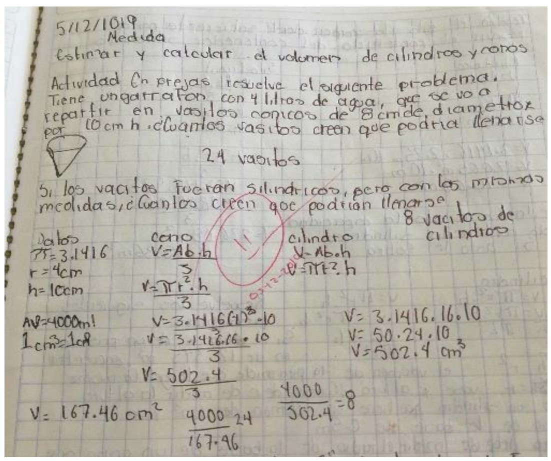
Resolución de la situación problemática “El silo”

Situación 1:

Se tiene un garrafón con 4 litros de agua, que se va a repartir en vasitos cónicos de 8 cm de diámetro por 10 cm de altura ¿Cuántos vasitos creen que podría llenarse?

Si los vasitos fueran cilíndricos en vez de cónicos, pero con las mismas medidas ¿Cuántos creen que podrían llenarse?

Representación:



5/12/1019
Medida
Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos

Actividad En prejas resuelve el siguiente problema.
Tiene un garrafon con 4 litros de agua, que se va a repartir en vasitos conicos de 8 cm de diametro por 10 cm h. ¿Cuantos vasitos creen que podria llenarse

24 vasitos

Si los vacitos fueran silindricos, pero con las mismas medidas, ¿Cuantos creen que podrian llenarse

8 vacitos de cilindros

Datos
$\pi = 3.1416$
$r = 4cm$
$h = 10cm$

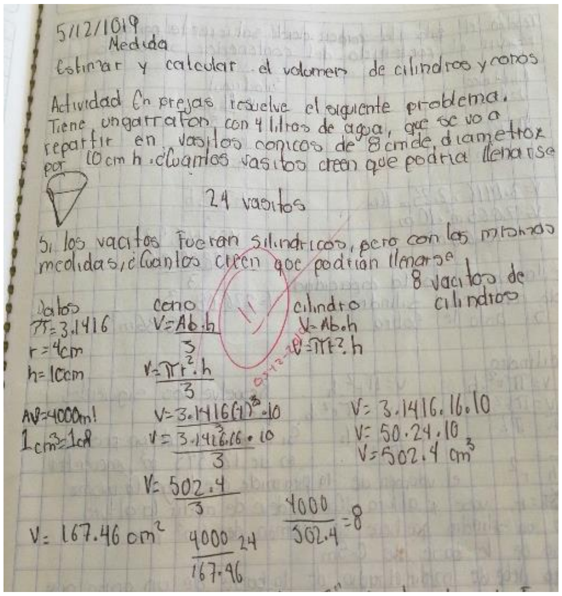
$AV = 4000 ml$
$1 cm^3 = 1 ml$

cono
$V = \frac{Ab \cdot h}{3}$
$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$
$V = \frac{3.1416 (4)^2 \cdot 10}{3}$
$V = \frac{3.1416 \cdot 16 \cdot 10}{3}$
$V = \frac{502.4}{3}$
$V = 167.46\ cm^2$
$\frac{4000}{167.46}\ 24$

cilindro
$V = Ab \cdot h$
$V = \pi r^2 \cdot h$
$V = 3.1416 \cdot 16 \cdot 10$
$V = 50.24 \cdot 10$
$V = 502.4\ cm^3$
$\frac{4000}{502.4} = 8$

Método de solución 1

PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Se tiene un garrafón con 4 litros de agua, que se va a repartir en vasitos cónicos de 8 cm de diámetro por 10 cm de altura ¿Cuántos vasitos creen que podría llenarse? *Si los vasitos fueran cilíndricos, en vez de cónicos, pero con las mismas medidas ¿Cuántos creen que podrían llenarse?*	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Representación  	Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: Vaso cónico $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ A_b=50.2656 cm^2 $V \frac{50.2656 * 10}{3}$ $V = \frac{502.656}{3}$ $V = 167.5\ cm^3$ 4000/ 167.5= 23,88 se redondea a 24 Vaso cilíndrico $V = A_b \cdot h$ A_b=50.2656 cm^2 $V = 50.2656 * 10$ $V = 502.656\ cm^3$ 4000/ 502.656= 7.9 se redondea a 8

Para conocer cuántos vasos cónicos o cilíndricos se llenarían con 4 litros necesitaron calcular el volumen de cada vaso para después realizar el cociente e identificar cuántos vasos se llenan.

Situación 2:

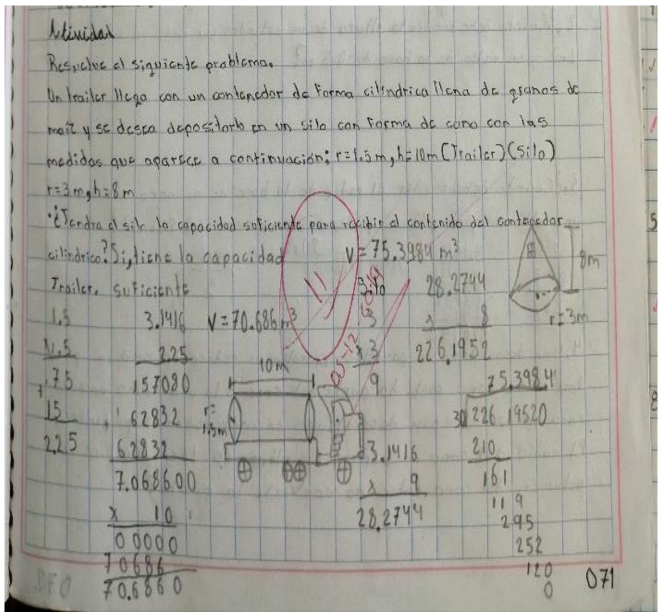
Un tráiler llega con un contenedor de forma cilíndrica lleno de granos de maíz y se desea depositarlo en un silo con forma de cono con las medidas que a continuación se describen:

Contenedor del tráiler: *radio: 1.5 m largo: 10 m*

Silo cónico: *radio: 3 m, altura: 6 m*

¿Tendrá el silo la capacidad suficiente para recibir el contenido del contenedor cilíndrico?

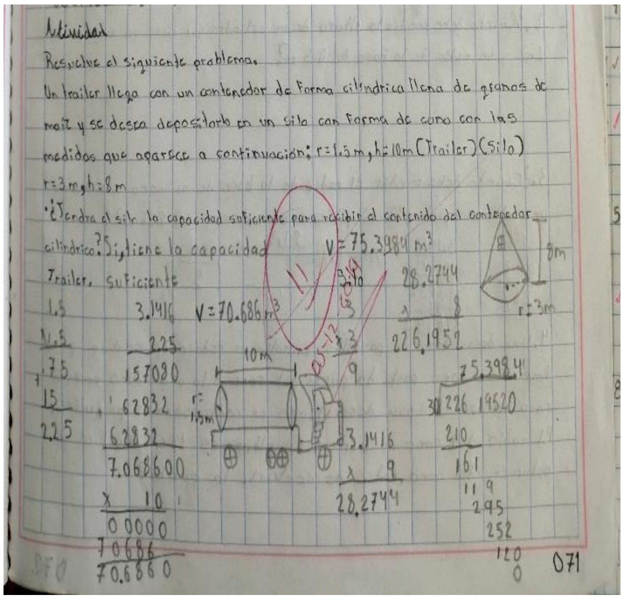
Representación:



Método de solución 2

PLANTEAMIENTO	ALGORITMO
Un tráiler llega con un contenedor de forma cilíndrica lleno de granos de maíz y se desea depositarlo en un silo con forma de cono con las medidas que a continuación se describen: ***Contenedor del tráiler:*** *Radio:1.5m largo: 10 m* ***Silo cónico:*** *Radio: 3 m, altura: 6 m*	El algoritmo de solución se basa en la fórmula conocida: $V = A_b \cdot h$ $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

<table>
<tr>
<td>¿Tendrá el silo la capacidad suficiente para recibir el contenido del contenedor cilíndrico?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Representación



</td>
<td>Considerando los datos proporcionados en el planteamiento: contenedor del tráiler

$$V = A_b \cdot h$$

$$A_b = 7.0686\ cm^2$$

$$V = 7.0686 \cdot 10$$

$V = 70.686\ cm^3$

Silo cónico $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

$$A_b = 28.2744\ cm^2$$

$$V = 28.2744 \cdot 10$$

$$V = \frac{282.744}{3}\ cm^3$$

$$V = 94.248\ cm^3$$</td>
</tr>
</table>

Los estudiantes para contestar la pregunta, calcularon el volumen de ambos contenedores, para identificar que el contenedor (silo) tuviese la capacidad suficiente para almacenar el contenido del tráiler.

La clase se inicia dando a conocer la meta del día, esta es:

META: *Resolución de situaciones problemáticas y ejercicios haciendo uso de la fórmula para calcular el volumen de los cuerpos geométricos (conos y cilindros).*

En este momento de la tarea de aprendizaje, los alumnos se abocan a la solución de situaciones problemáticas tipo situaciones problemáticas; cómo se logra apreciar, realizan la representación gráfica, además, plantean la conjetura de que a partir de conocer el volumen del cilindro ya solo se realiza la división entre tres para obtener el volumen del cono.

Los alumnos dialogan entre si y mencionan que para encontrar el volumen de un cono si se toma como referencia las medidas de un cilindro, solo se trata de dividir entre 3. Aunque en uno de los problemas tanto el cilindro como cono tienen medidas diferentes.

Los estudiantes hasta el momento han logrado una destreza en la fluidez de procedimientos, puesto que consideran obvios algunos momentos del desarrollo de los algoritmos.

De acuerdo con los resultados de las tareas de aprendizaje realizadas hasta el momento, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes ha logrado un aprendizaje eficaz y desarrollado suficientemente algunos de los aspectos de la destreza matemática.

Del aprendizaje eficaz se pueden reconocer aspectos como:

- Representarse de manera abstracta el contexto geométrico del problema o ejercicio.
- Uso correcto del algoritmo (fórmula) para realizar los cálculos.
- Obtener resultados correctos y exactos.

De la destreza matemática, los aspectos que son identificados son los siguientes:

- Fluidez procedimental.
- Habilidad algorítmica.
- Flexibilidad de pensamiento.
- Elaboración de representaciones.
- Reconocimiento conceptual.
- Habilidad estratégica.

De manera general, se estima que el 90% de los estudiantes ha logrado el éxito en la asignatura de matemáticas debido al progreso en su desempeño y la obtención de mejores calificaciones; además, se ha ganado en participación, cumplimiento y motivación para el estudio de las matemáticas, sin contar con un ambiente de aprendizaje cargado de emocionalidad positiva.

Otro aspecto importante de la enseñanza eficaz, es el logro en la adquisición del lenguaje matemático que los alumnos han demostrado durante la socialización de los métodos de solución a los problemas, situaciones problemáticas o ejercicios que componen las tareas de aprendizaje:

- Exposición de carteles con los métodos de solución.
- Explicaciones utilizando el pizarrón.
- Apoyando la participación de la docente ante el grupo.
- Diálogo durante el trabajo colaborativo para resolver los planteamientos.

Como se puede apreciar la mayoría de los alumnos ha logrado los aprendizajes esperados a partir de las ocho prácticas de enseñanza, que en cada sesión se propicia la participación de los alumnos para llegar a la destreza matemática, han demostrado la fluidez de los procedimientos para la resolución de ejercicios, han adquirido la habilidad para formular, representar y resolver problemas, asimismo tienen la confianza para dar a conocer sus respuestas frente a sus demás compañeros, encontrando el sentido de las matemáticas.

Desarrollar las clases de matemáticas a partir de las ocho prácticas de enseñanza para adquirir la destreza matemática ha sido muy significativa tanto para los alumnos como para la docente, ha permitido ver a los estudiantes no solo el desarrollo de algoritmos sino encontrar el significado y sentido de las matemáticas a la vida real, como docente permite reconocer que para alcanzar el éxito matemático en los alumnos, se necesita que ellos tengan actividades donde el aprendizaje sea significativo mediante experiencias individuales y colaborativas, asimismo que todos los estudiantes tengan las mismas oportunidades y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje hasta lograr el éxito matemático y aprender matemáticas a altos niveles.

Los cuerpos volumétricos redondos se enfatizaron en el cálculo de volúmenes de conos y cilindros a partir de la estrategia “ocho prácticas de enseñanza eficaz” para lograr el éxito matemático en los estudiantes y aprender matemáticas a altos niveles.

Desarrollar cada práctica durante la clase favoreció para el aprendizaje de los educandos porque en cada sesión se aprendía y reforzaba el conocimiento que ya se tenía; además los estudiantes se sentían motivados al realizar cada actividad porque conocían los elementos que requerían para dar solución a los problemas, asimismo mostraron una fluidez procedimental en cada resolución de las situaciones problemáticas o ejercicios, ya que comentaban los alumnos que para calcular el volumen de un cono recto dadas las mismas medidas de un cilindro solo tenían que calcular el volumen del cilindro y a partir de esté dividir entre tres para encontrar el volumen del cono.

Esta acción por parte de los estudiantes muestra que han adquirido el aprendizaje, pero también se observa que las ocho prácticas de enseñanza han desarrollado en ellos la destreza matemática y aprender matemáticas altos niveles. Han logrado comprender que un cilindro y cono recto son cuerpos de revolución formados por figuras planas tomando uno de sus lados como eje de rotación para ejercer un movimiento giratorio de al menos 360° logrando formar cada uno de los cuerpos, asimismo se ha justificado la fórmula del cono llegando a la conjetura que *un cono recto es una tercera parte de un cilindro siempre y cuando las medidas de radio y altura sean las mismas,* de otra manera esta idea no tendría relación.

A partir del volumen de un cilindro se ahorra el procedimiento de calcular el área de la base de un cono porque como lo externaron los alumnos, ya solo se realiza el cociente del cilindro entre tres, facilitando el procedimiento, ese tiempo destinado al cálculo del área de la base del cono es utilizado para reafirmar lo resultados y justificar cada una de sus respuestas.

Se logra apreciar que las ocho prácticas de la enseñanza eficaz ha dado cuenta que se puede lograr el éxito matemático mediante la destreza matemática, aprender matemáticas a altos niveles y sobre todo hacer de la asignatura relevante e interesante y no solo una materia de memorización de procedimientos y fórmulas.

CONCLUSIONES

La enseñanza eficaz es una propuesta que sugiere la implementación de ocho prácticas de enseñanza las cuales se orientan a que los alumnos de la escuela secundaria logren el éxito en el aprendizaje de los contenidos curriculares y el desarrollo de la destreza matemática; esto equivale a las aspiraciones y al contenido del principal objetivo educativo del NCTM: aprender matemáticas a altos niveles.

Dicha propuesta educativa garantiza que cada estudiante aprenda matemáticas a altos niveles y tener el éxito matemático mediante la destreza matemática, para lograrlo promueve la comprensión de conceptos, la capacidad estratégica para la resolución de problemas, fluidez procedimental; la participación, la reflexión, el análisis, razonamiento adaptativo, y la justificación matemática de sus argumentos favoreciendo el constructivismo matemático.

Aprender matemáticas a altos niveles refiere al dominio por comprensión de los conocimientos matemáticos que forman parte del currículo del tercer grado de la escuela secundaria, en particular y, en general, de ese nivel educativo. Asimismo, demanda que el docente se vaya formando en un experto en la enseñanza, traduzca aun proceso eficaz el aprendizaje de los estudiantes; en términos del NCTM, promover el éxito matemático y el aprendizaje de las matemáticas escolares a altos niveles.

Aprender matemáticas va más allá de memorizar algoritmos, se trata de justificar matemáticamente cada algoritmo, concepto, cálculo, respuesta o estrategia tras realizar análisis, comprobaciones, comparaciones, clasificaciones; también se trata de compartir ideas matemáticas, colaborar y promover el uso del lenguaje matemático dentro y fuera de la institución.

La Destreza Matemática es un concepto que involucra cinco aspectos interrelacionados para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, así como la adquisición y empleo eficaz del conocimiento y la relación con las habilidades matemáticas. Esto se postula como producto de la cognición el "éxito matemático de los estudiantes"; dicho en términos prácticos, lograr que el alumno resuelva problemas o situaciones problemáticas con el rigor matemático que demandan y desarrolle de manera óptima las habilidades del pensamiento matemático.

Cuando el alumno logra un aprendizaje por comprensión conceptual logra la fluidez procedimental, que en muchos casos de aprendizaje economiza sus tiempos, además de desarrollar la competencia estratégica indispensable para formular, representar y resolver problemas, el razonamiento y la justificación de cálculos.

La comprensión conceptual, así como las representaciones de los mismos conceptos son indicadores de la construcción del conocimiento de los estudiantes; en la medida de su uso y diversificación, se estará garantizando el constructivismo matemático.

En cada actividad realizada por el estudiante se logró promover la construcción de sus propios conceptos, esto a través de las definiciones que elaboraba personalmente y que compartía con el grupo, al final, a través de la mediación docente se formalizaban tales definiciones.

La enseñanza eficaz mediante las ocho prácticas de enseñanza es una propuesta que promueve el aprendizaje de los estudiantes, pero es el docente quien guía y facilita los materiales, la interacción cognitiva entre los alumnos y entre estos y el conocimiento; todo esto, se plasmó en la planificación, primero de la intervención didáctica y después, en el trabajo docente en general.

Un aspecto importante en el desarrollo de las clases fue el establecer metas de aprendizaje, así los alumnos conocían de antemano "hasta donde debería llegar". Es decir, guiaba sus acciones, ideas, estrategias y procedimientos con el fin último de hacerse consciente de sus aprendizajes.

La planifican de las clases de matemáticas en el tercer grado tomó en cuenta los principios rectores que determina el NCTM, para lograr una enseñanza eficaz de las matemáticas, aunque ese organismo académico y científico las sugiere como características que un programa de matemáticas debe de tener. A continuación, se enuncian:

- Enseñanza y aprendizaje
- Acceso y equidad

- Currículo
- Herramientas y tecnología
- Evaluación
- Profesionalismo

Desde el punto de vista del NCTM, los seis principios rectores son las características que un programa de matemáticas de excelencia debe contener para garantizar el éxito matemático tanto en el alumno como en el profesor, mediante las ocho prácticas de enseñanza mencionadas anteriormente. Para la elaboración del este ensayo, se tomaron como guía para garantizar el aprendizaje y dominio de los contenidos programáticos involucrados en las tareas de aprendizaje.

La propuesta del NCTM no tiene un enfoque en específico, sin embargo, las ocho prácticas de enseñanza se desarrollaron bajo el enfoque *tareas de aprendizaje* de Gerard Vergnaud; también conocidas como Tareas Cognitivas que son una serie de planteamientos que el docente se encarga de proveer al alumno, son diseñadas a partir de los contenidos curriculares y adquieren la forma de problemas matemáticos y de matemáticas, situaciones problemáticas e incluso ejercicios.

A partir de estas ideas, en la planificación se incluían diferentes situaciones de enseñanza (*labores escolares*) como lo son: estudio de situaciones nuevas, manipulaciones operativas, lecciones del maestro, análisis de discusiones colectivas, ejercicios, etcétera con la finalidad que el estudiante además de lograr el aprendizaje esperado, aprendiera matemáticas a altos niveles y lograr el éxito matemático.

La propuesta de la enseñanza eficaz de las matemáticas en la escuela secundaria permite visualizar las metas a corto y largo plazo en relación al tratamiento de contenidos <<didáctica>> y los propósitos de aprendizaje, al desarrollo de la destreza matemática <<conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal>> en los estudiantes.

Durante el Trabajo Docente se propició que en cada sesión de clase y durante el tratamiento de cada contenido se desarrollaran cada una de las ocho prácticas de la enseñanza eficaz, a medida que se avanza se va generando la vinculación de unas con otras, lo cual favorece la construcción social del conocimiento matemático.

Durante cada clase las prácticas se desarrollan a partir de las actividades que se tienen planeadas, motiva a los estudiantes por medio de la participación, propicia el diálogo grupal, el razonamiento, la justificación de sus respuestas, la fluidez procedimental, haciendo que el estudiante aprenda matemáticas de una manera interesante, no solo repetir patrones.

Desarrollar las clases de matemáticas a partir de las ocho prácticas de enseñanza para adquirir la destreza matemática ha sido muy significativa tanto para los alumnos como para el docente, ha permitido ver a los estudiantes no solo el desarrollo de algoritmos sino encontrar el significado y sentido de las matemáticas en la vida real; asimismo permite reconocer que para alcanzar el éxito matemático, se necesita que ellos participen de manera individual y colaborativa en las actividades de aprendizaje; igual manera, los estudiantes tienen las mismas oportunidades, espacios y recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje.

La enseñanza y el aprendizaje mediante esta metodología didáctica fue una experiencia que permitió a la docente y a los estudiantes desarrollar sus habilidades cognitivas y la creatividad procedimental. De esta manera, se puede afirmar que el total de alumnos logró el aprendizaje esperado, incluyendo los distintos conceptos y significados que se incluyeron, en este caso, los relacionados con el volumen.

Asimismo, observaron y comprendieron la justificación de las fórmulas, encontrando el sentido matemático y contextual, es decir, el concepto de volumen en el ámbito matemático y en contextos diferentes a este.

La ventaja de la enseñanza eficaz es que cada práctica da pauta para interactuar con el resto, no existe alguna jerarquización entre ellas ni un orden normativo que impida la aparición a lo largo de las clases de matemáticas; una observación importante, fue que no todas las prácticas se pueden dar en una sesión, esto depende de la complejidad de contenido a tratar y los tiempos de que se disponen para cada clase.

A través de esta metodología, los alumnos participan de todas las actividades, logran comprender los conceptos complejos. Como, por ejemplo, sólidos de revolución, figura generatriz, origen cognitivo, entre otros. Se incentivan entre ellos, reconociendo el aprendizaje de los otros estudiantes, su participación en las tareas de justificar y socializar sus resultados, así como exhibir las elaboraciones hechas en sus cuadernos.

De manera personal, se recomienda el uso de esta metodología ya que es una metodología alternativa que favorece la participación activa tanto de alumnos como del maestro, así el trabajo escolar colaborativo garantiza el aprendizaje y la formación matemática de ambos.

BIBLIOGRAFÍA

D´Amore, M. I. (2006). ÁREA Y PERIMETRO, Aspectos conceptuales y didácticos . Bogotá: MAGISTERIO.

Fandiño, M. I. (2008). Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Martínez, E. M. (2000). Saber matemáticas es saber resolver problemas. México, D. F: Grupo Editorial Iberoaméricana .

Martínez, E. M. (2012). Matemáticas 3 . Mexico, D.F.: Santillana.

NCTM. (2015). De los principios a la acción. Distrito Federal: 3D Editorial .

Piaget, J. (1979). Tratado de lógica y conocimiento científico (1). Naturaleza y métodos de la epistemología. Buenos Aires: Paidós.

SEP. (2011). Plan de estudios 2011. México: SEP.

SEP. (2011). Programa de estudio 2011 Guia para el maestro Educación Básica Secundaria Matemáticas. Distrito Federal: SEP.

Vernaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO

EDOMÉX
DECISIONES FIRMES, RESULTADOS FUERTES.

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense".

ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LA COMISIÓN DE TITULACIÓN CON FUNDAMENTO EN LOS LINEAMIENTOS PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE TITULACIÓN EXPIDE EL:

DICTAMEN No. 46

A la C. Mara Ventura Martínez

QUIEN PRESENTÓ SU DOCUMENTO RECEPCIONAL CONCLUIDO Y FUE APROBADO CONFORME A LOS CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LA COMISIÓN DE TITULACIÓN. POR LO CUAL, CONOCEDORES DE SU RESPONSABILIDAD SE LE INVITA A CONTINUAR CON LOS TRÁMITES ESTABLECIDOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS, FORTALECIENDO ASÍ LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN.

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., A 09 DE JULIO DE 2020.

Mtra. Luz María Serrano Orozco

Presidenta de la Comisión de Titulación

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y NORMAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN NORMAL Y FORTALECIMIENTO PROFESIONAL
SUBDIRECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL
ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO
AV. DE LOS MAESTROS No. 1, SAN FELIPE DEL PROGRESO, COL. CENTRO, SAN FELIPE DEL PROGRESO, ESTADO DE MEXICO, C.P. 50640
TEL. (01 712) 10-4-21-93
normalsanfelipe@edugem.gob.mx

Elaboró

Mara Ventura Martínez

Autorización

Mtro. Efraín Aldama García

Revisión

Mtro. Ricardo Godínez Navarrete

LIA. Omar De la Cruz Cruz Sánchez

Dictaminó

Mtra. Luz María Serrano Orozco
Presidente del Comité de Titulación