

ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS



ENSAYO

EL APRENDIZAJE DE LA SUMA Y RESTA DE NÚMEROS CON SIGNO A TRAVÉS DE LA INDAGACIÓN

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL

PRESENTA:

LUZ ANGÉLICA TREJO RODRÍGUEZ

ASESOR: MTRO. ULISES ROMERO DE LA CRUZ

SAN FELIPE DEL PROGRESO, JULIO DE 2020

ÍNDICE

| | |
|--|-----------|
| INTRODUCCIÓN | 3 |
| TEMA DE ESTUDIO | 7 |
| a) Contexto..... | 8 |
| b) Descripción de preguntas centrales | 13 |
| c) Descripción del hecho estudiado..... | 15 |
| CAPÍTULO I. LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE MUESTRAN LOS ALUMNOS, MISMOS QUE PERMITIRÁN APRENDER A RESOLVER SUMAS Y RESTAS DE NÚMEROS ENTEROS CON SIGNO | 20 |
| CAPÍTULO II. ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS QUE SE GENERAN AL OPERAR SUMAS Y RESTAS CON NÚMEROS ENTEROS | 30 |
| 2.1 Errores al realizar sumas y restas con números enteros..... | 31 |
| 2.2 Dificultades que se generan al resolver sumas y restas de números dirigidos | 33 |
| 2.3 Obstáculos para operar adición y sustracción de números enteros..... | 37 |
| 2.4 Aptitudes..... | 40 |
| CAPÍTULO III. ¿CÓMO FAVORECE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE ALGORITMOS PARA RESOLVER SUMA Y RESTA CON NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS? | 43 |
| 3.1 Tipos de problemas de adicción y sustracción | 49 |
| CAPÍTULO IV. CARACTERÍSTICAS, VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE TRABAJAR HACIENDO USO DE LA INDAGACIÓN COMO ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS | 56 |
| 4.1 Ventajas de aprender mediante la indagación | 63 |
| 4.2 Desventajas de la indagación..... | 66 |
| 4.3 ¿Cómo interviene el docente al llevar a cabo la estrategia de la indagación?..... | 69 |
| CONCLUSIONES..... | 72 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 75 |
| ANEXOS | |

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene sustento en los resultados de un año de trabajo docente con un grupo de primer grado de educación secundaria y el análisis de información recopilada por medio de los siguientes recursos: diario del profesor, lectura de diversas bibliografías, los análisis referentes a la práctica docente, dentro de los que se encuentran los logros, errores y dificultades que se detectaron durante las clases de Matemáticas.

Las problemáticas que se identifican al estudiar y aprender Matemáticas en la secundaria son muy diversas dependiendo de la rama de la disciplina desde la que se analice (Geometría, Aritmética, Álgebra, Probabilidad y Estadística), también depende del grado que se está tomado como referencia, sin embargo, como las Matemáticas son una disciplina integral y gradual los problemas podrían surgir desde lo más básico de las Matemáticas, lo cual afectaría en los aprendizajes próximos que se pretenden en el nivel secundaria; tener carencias en algún tema implicará vacíos en el aprendizaje más adelante y por lo tanto dificultades.

Los resultados que se obtienen al evaluar las Matemáticas no son tan favorables por lo que se ha buscado detectar desde donde viene la problemática y en su mayoría proviene del razonamiento aritmético que los alumnos han desarrollado, debido a que muestran comprensión y dominio, pero confusión al resolver operaciones aritméticas y operaciones pre algebraicas.

Se eligió el tema de números enteros positivos y negativos debido a que uno de los ámbitos que más conflictos y dificultades provocan en el aprendizaje de las Matemáticas es la suma y resta de números con signo. El tema fue trabajado desde el enfoque de resolución de problemas porque uno de los propósitos generales de las Matemáticas es desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.

Durante la práctica docente en aulas de distintos grados y escuelas de educación secundaria, se detectó que en su mayoría los alumnos logran desarrollar razonamientos algebraicos y pre algebraicos, sin embargo presentan dificultades cuando implican la reducción de términos comunes, en especial cuando se trata de números con signo, estas carencias se observaron desde los conocimientos pre algebraicos los cuales se trabajan en primer grado de educación secundaria, pero aun en alumnos de tercer grado se siguen presentando estas dificultades. Ya sea que hay confusión al agrupar los términos correctamente para poder simplificar o hay errores cuando se opera al utilizar los signos.

Tal es el caso de los estudiantes de primer año y segundo año de secundaria, que mostraron carencias al resolver operaciones que impliquen números con signo, por esta razón se pretende resolver dicha problemática en alumnos desde el primer grado de secundaria a través de: la comprensión de la suma y resta de los números negativos y positivos, la investigación del origen de los números negativos y la resolución de problemas que impliquen este tipo de operaciones, de esta manera se involucró más al alumno en la conformación de sus propios conocimientos y las clases son menos tediosas.

Tomando en cuenta el problema detectado en alumnos de segundo grado se decidió enfocar el siguiente trabajo a la indagación como estrategia para la resolución de problemas que impliquen la suma y resta de números enteros positivos y negativos. Implementar la indagación como estrategia tuvo como finalidad que los alumnos desarrollaran una actitud de autonomía y que trabajaran la asignatura de una manera distinta al cuestionarse e involucrarse en el descubrimiento de los conocimientos, investigar y resolver dudas para que favorezcan la comprensión de las Matemáticas, esta estrategia tuvo repercusiones en el ámbito socioemocional debido a que los alumnos participaron y se sentían orgullosos cuando aportaban ideas interesantes.

El propósito general de dicha propuesta fue fortalecer el dominio y comprensión de la suma y resta de números enteros positivos y negativos para la solución de problemas en 1° “F” de la Escuela Secundaria Federalizada “Isidro Fabela”. Los propósitos específicos fueron inducir a que el alumno desarrollará el hábito de la investigación como estrategia de aprendizaje dentro y fuera del aula; desarrollar en los alumnos una actitud autónoma; consolidar en los alumnos un lenguaje aritmético en la suma y resta de números enteros; implementar el uso de la indagación para la resolución de problemas que impliquen la suma y resta de números con signo.

El presente documento se compone de cuatro capítulos, en los cuales se desglosa cada uno de los aspectos considerados dentro de la estrategia propuesta. El primer capítulo está enfocado al análisis de los conocimientos presentados por el alumno y los que hacen falta reforzar para poder transitar al desarrollo del aprendizaje de la suma y resta de números enteros positivos y negativos.

En el segundo capítulo se dan a conocer los errores, dificultades y obstáculos que se fueron suscitando en el aula de clases al trabajar los números con signo. Se presenta un ejemplo y una breve explicación de esos aspectos que desfavorecieron el aprendizaje de los alumnos, sin dejar de lado que los alumnos mostraron fortalezas y que fueron capaces de desarrollar sus propios aprendizajes y de resolver problemas.

En el tercer capítulo se realiza una descripción de la resolución de problemas y se describe el método de los cuatro pasos propuesto por Polya para resolver problemas. En este capítulo también se propone una clasificación de problemas que se podrían utilizar para abordar los contenidos relacionados a la suma y resta de números con signo, así como ejemplos de los mismos y una breve descripción de los resultados obtenidos por los alumnos.

El cuarto capítulo da cuenta de las ventajas y desventajas detectadas al llevar a cabo la propuesta, en algunos casos se describe que se podría hacer para superar esas desventajas. Además se abordan algunas características de la indagación, lo cual permite al docente

valorar que tan viable es aplicar la propuesta en el aula de clases y se enfatiza que podría ser mejorado con la finalidad de favorecer los aprendizajes de los alumnos.

TEMA DE ESTUDIO

El presente trabajo se realizó bajo la línea temática 2: Análisis de las prácticas de enseñanza, se eligió trabajar bajo esta línea debido a que es importante para la formación docente relacionar lo que se vive en la práctica cotidiana con lo que establecen diversos autores; detectar y analizar más a fondo las dificultades o errores que se generan en el aula de clases al desarrollar los contenidos temáticos de la asignatura de Matemáticas, lo cual facilitará la planeación e implementación de estrategias innovadoras que propiciarán un aprendizaje más sólido y que impactará en el aprendizaje de los alumnos.

En el nivel de educación secundaria se da por hecho que los alumnos ya tienen consolidados los conocimientos básicos de aritmética porque han trabajado esta disciplina desde los primeros años de educación básica y los conocimientos que se pretenden lograr en la secundaria son conocimientos más complejos, por esta razón es importante trabajar esos temas en los que se observa mayor dificultad, para que los alumnos cuenten con un dominio de los conocimientos que sirvan de antecedentes para otros; en este caso se buscó que los alumnos de primer grado grupo F dominaran la suma y resta de números enteros positivos y negativos ya que esto les serviría para que les fuera más fácil comprender el Álgebra.

Es importante que los alumnos fortalezcan el aprendizaje aritmético que tienen desde primer año de secundaria para que les sea posible desarrollar los conocimientos que se pretenden en los años consecuentes de secundaria. Contar con los conocimientos previos requeridos para cada contenido favorecerá el avance y la comprensión de los temas, de acuerdo a la propuesta trabajada esos aprendizajes previos serán el punto de partida para el proceso de aprendizaje.

a) Contexto

Para el desarrollo del siguiente trabajo es importante tomar en cuenta el contexto del lugar donde se llevó a cabo la propuesta comenzando de lo general a lo particular. Es decir, en primera instancia se analizará el contexto social, posteriormente el contexto cultural, el contexto económico y por último el contexto escolar el cual implica una observación de la escuela en general para después pasar al contexto del grupo de 1° F que es en el que se trabajó.

Tener en cuenta el contexto es significativo al desarrollar una propuesta didáctica porque el contexto influye mucho en los resultados que se logran, también depende de los recursos con los que se cuentan en la escuela y los recursos con los que cuenta cada alumno. Además de que analizar el contexto será útil en la planeación y diseño de la propuesta ya que se podrá saber cómo son los alumnos, con qué recursos se cuentan y que factores favorecen o dificultarían la implementación de la propuesta. Servirá también para poder analizar cómo funciona al trabajar la propuesta en un contexto urbano y más adelante se podría probar implementar la propuesta en un contexto rural.

Contexto social

La zona donde se ubica la escuela es urbana. La preparación académica de los padres va desde la primaria, secundaria, preparatoria y universidad. La mayor parte de estos se encuentran con escolaridad de preparatoria, lo cual facilita que estén más pendientes en las tareas de sus hijos y les puedan apoyar a realizarlas. La mayoría de los alumnos provienen de familias nucleares, monoparentales o extensas, esto nos permite tener el apoyo parcial de parte de los padres de familia.

Refiriéndonos a estereotipos y creencias se observa que tienen ideas más abiertas en las cuales existe cada vez menos la discriminación y exclusión de grupos vulnerables. Últimamente se ha observado que llegan personas de otros estados o localidades a vivir a Atlacomulco. La comunidad cuenta con diversos espacios y centros enfocados a la atención de jóvenes con problemas de adicciones o de conducta como rebeldía, vandalismo, pandillerismo, entre otras; constantemente se llevan a cabo campañas y pláticas cuyo objetivo

es el beneficio de los habitantes de dicha ciudad y comunidades aledañas; constantemente se incluye a la escuela secundaria en este tipo de eventos y campañas.

Contexto cultural

En Atlacomulco se habla español y algunos alumnos entienden mazahua y otomí. Son de costumbres arraigadas por lo que en algunas fechas del año los alumnos se ausentan de clases, como lo es el 12 de diciembre, donde una gran parte de ellos asisten a la peregrinación a la basílica de la Virgen de Guadalupe y algunos de los alumnos participan en el carnaval y fiesta patronal de la localidad.

En la ciudad donde se encuentra la escuela de práctica constantemente se llevan a cabo eventos deportivos, los cuales son torneos de futbol, basquetbol, frontón y natación. Se realizan eventos políticos y cívicos entre los cuales se encuentran desfiles, ceremonias en la alameda central, exposiciones enfocadas a diversos ámbitos y ferias; se considera a la escuela secundaria federalizada “Isidro Fabela” para participar en este tipo de eventos. Se han obtenido premios y reconocimientos en algunos concursos que se han realizado.

Contexto Económico

La mayoría de las familias son de clase media baja, los padres de familia se dedican al comercio, agricultura, a prestar servicios de transporte, obreros, entre otros.

Los servicios con los que cuenta la cabecera de la localidad son una terminal de autobuses y varias bases de taxis con rutas hacia las comunidades aledañas de los distintos municipios. Esto permite que el servicio educativo de la cabecera se cubra al 100%; maternidad, preescolar, primaria, secundaria, preparatorias y universidades.

Existen varios centros médicos y una gran variedad de tiendas departamentales. Los medios de comunicación van desde el correo postal, casetas telefónicas, centros de envíos y mensajería, cibercafés, una estación de radio, servicio de agua, drenaje, luz, zonas deportivas, centros culturales, bibliotecas públicas, alameda y un cine teatro. La mayoría de las casas están construidas con tabicón y concreto, ya que son contadas las casas que están construidas con adobe y tejas. Las avenidas se encuentran pavimentadas y con alumbrado público.

Contexto escolar

La Escuela Secundaria Federalizada “Lic. Isidro Fabela” C. C.T 15DES0001R, CLAVE ES: 154-1, Zona 30 sector 8 se ubica en Juan N. Reséndiz No. 1 Col. centro Atlacomulco, dentro de la cabecera municipal. El horario escolar del Turno Matutino es de 7:00 a 13:00 hrs. El turno cuenta con 34 docentes distribuidos en las diferentes asignaturas, dos directivos; 1 director y 1 subdirectora, 3 prefectos, un trabajador social, 7 administrativos, un contralor, 4 conserjes. La matrícula del ciclo escolar 2018-2019 fue de 705 alumnos 354 mujeres y 353 hombres.

Dentro de la infraestructura la institución tiene una barda perimetral, una dirección, oficinas administrativas, 18 salones, 2 laboratorios, una biblioteca, dos aulas de medios, 1 sala de maestros, 6 aulas para talleres tecnológicos, 3 prefecturas, 6 baños, una papelería y una tienda cooperativa escolar. Los salones cuentan con butacas para cada alumno, pizarrón, escritorio, silla para el docente, algunos con proyector (8) e iluminación adecuada. La escuela está provista con servicios de agua potable, bebederos, drenaje, luz e internet para el área administrativa, telemática y biblioteca.

La organización escolar está repartida con las diferentes comisiones anuales que se realizan a lo largo de todo el ciclo escolar, el trato entre docentes es respetuoso, tolerante y cordial, mientras que la relación de los maestros con los alumnos es interactiva. La escuela se encuentra inscrita en el programa de “Escuelas al 100” y provee programas estatales y federales como: escuelas para padres, café literario, campañas de salud, becas gubernamentales, entre otros.

Las asignaturas son cubiertas por personal calificado de acuerdo al perfil de la materia. Ninguna de ellas carece de atención por parte del personal docente. Refiriéndonos a la matrícula de la institución se pudo encontrar que un 65% proviene de comunidades aledañas, un 25% de alumnos proviene de la cabecera municipal y el 10% viven en la ciudad.

La preparación académica de los padres va desde la primaria, secundaria, preparatoria y universidad. La mayor parte de estos se encuentran con escolaridad de preparatoria, lo cual facilita que estén más pendientes en las tareas de sus hijos y les puedan apoyar a realizarlas. El 65% de los alumnos proviene de una familia nuclear, compuesta por padre, madre e hijos, el 30% es miembro de familias monoparentales (esto debido a que muchos adolescentes únicamente viven con su papá o su mamá), también existen familias reconstruidas (los padres se casan con nuevas parejas).

El 5% de los alumnos son de familias ampliadas, dado que los jóvenes viven con abuelos o tíos debido a la migración que hay por parte de los padres. Es importante mencionar que la participación de la familia en la escuela es pasiva; acuden y aceptan en la mayoría de los casos lo que se les propone, aunque algunos de los padres o tutores que trabajan todos los días para proveer el sustento del hogar dejan de lado las visitas escolares perjudicando el seguimiento en el desarrollo educativo de sus hijos.

Respecto al grupo 1° F está compuesto por 36 alumnos de los cuales 23 son mujeres y 13 son hombres. Se observa que dentro del salón hay grupos de alumnos muy marcados que se reúnen para realizar los trabajos, para compartir cosas externas a la escuela entre otros. Algunos grupos conformados son favorables o en algunos casos son motivo de distracciones durante las clases. Durante el transcurso del actual ciclo escolar se dio de baja a dos alumnos por problemas de conducta y situaciones familiares, un alumno fue cambiado al turno de la tarde y se integró una alumna al grupo porque llegó de otro estado.

En cuanto a la convivencia del grupo se manifestó una relación armónica y respetuosa entre ellos mismos y con los docentes. Se observó también que se apoyaban mucho en cuanto notaban que había compañeros que tenían dudas o dificultades se acercaban a ayudar o bien tenían la confianza de expresar sus dudas ya sea a otro compañero o la docente. Pero debido a las conductas de incumplimiento y algunos problemas que se suscitaron constantemente se suspendió a varios alumnos o se llegó a la baja definitiva.

Aproximadamente un 85% de los alumnos cumplía con los trabajos de la asignatura y participaban durante las clases aportando ideas o manifestando las dudas que surgen, al solicitar su participación frente al grupo eran muy pocos los que mostraban inseguridad al pasar al pizarrón y participar, poco a poco iban desarrollando la confianza para expresarse ante el grupo. La respuesta que se tuvo de los alumnos en cuanto al cumplimiento e interés en la asignatura variaba constantemente.

Algunos días el grupo era tranquilo y trabajaba bien como puede haber días en los que mostraban desinterés y poca participación, debido a los cambios constantes de lugares que hacía la tutora cambiaba la forma de trabajar de los alumnos, para algunos el cambio de lugares les beneficiaba porque convivían más con sus compañeros y a veces trabajaban conjuntamente pero en otros casos el cambio fue desfavorable ya que se observaban malas conductas e incumplimiento por parte de alumnos que al principio se mostraban responsables y comprometidos con sus estudios.

b) Descripción de preguntas centrales

Las preguntas medulares a desarrollar en este trabajo son:

1.- *¿Qué conocimientos matemáticos mostraron los alumnos y cuáles hacían falta consolidar al resolver sumas y restas de números enteros con signo?* La pregunta sirvió para dar cuenta de los conocimientos previos que los alumnos tenían acerca del tema y de esta manera la docente sabría desde donde partir para desarrollar los nuevos conocimientos; detectar en qué aspectos se tendría que hacer mayor énfasis; saber qué alumnos presentaron mayores carencias y en dónde se hicieron presentes las deficiencias.

Lo cual fue útil para detectar a los alumnos en los que se debía poner mayor atención y qué alumnos estaban un poco más avanzados de conocimientos. Los recursos usados para resolver esta pregunta fueron una evaluación diagnóstica, observación del trabajo continuo de los alumnos, la experiencia docente en las aulas y diversas fuentes de consulta.

2.- *¿Cuáles fueron los errores, dificultades y obstáculos que se generaron al operar sumas y restas con números enteros?* En este cuestionamiento se pretendía analizar los errores, dificultades y obstáculos que se presentaron al operar con números positivos y negativos para que de esta manera se trabajara tomando en cuenta estas situaciones poco favorables para el aprendizaje, este análisis contribuyó a saber a qué se debía la problemática y erradicar a través de la implementación de diversas estrategias los conocimientos erróneos, los obstáculos y las dificultades que se suscitaron en la suma y resta de números enteros positivos y negativos.

3.- *¿Cómo favoreció la resolución de problemas en la construcción de algoritmos para resolver suma y resta con números enteros positivos y negativos?* En esta interrogante se analizó qué tan favorable es la resolución de problemas para el desarrollo de algoritmos que impliquen suma y resta de números con signo. Para responder esta pregunta se hizo uso de las citas de autores que hablaban de la resolución de problemas, los resultados obtenidos en las evaluaciones y los productos del trabajo en clase. La utilidad de esta pregunta fue

reflexionar acerca de las ventajas y desventajas de trabajar bajo el enfoque de resolución de problemas y qué impacto causó en el aprendizaje de los alumnos.

4.- ¿Cómo favoreció la implementación de la estrategia de indagación en el aprendizaje de suma y resta de números con signo? En esta pregunta se evaluó qué tan apta es la implementación de la indagación para lograr la comprensión del tema de estudio, se analizaron las ventajas y desventajas de trabajar a través de la indagación en primer año de secundaria; además se tomaron en cuenta algunos aspectos importantes que se deben considerar al trabajar por medio de la indagación.

La importancia de dar respuesta a esta pregunta es que ayudó a saber cuáles son los pros y los contras de aplicar la propuesta para que los alumnos logaran un mejor aprendizaje; además de que se determinará en qué condiciones y en qué tipo de contexto se podría llevar a cabo, servirá también para realizar las mejoras necesarias a la propuesta de tal modo que se logren los propósitos que se han ideado al llevar a cabo la propuesta y de esta manera obtener los mejores resultados posibles.

c) Descripción general del hecho estudiado

Se percibió que en algunos alumnos de secundaria aún había muchas carencias conceptuales de números con signo, un bajo manejo de lenguaje aritmético y algebraico, confusión al operar con números positivos y negativos, así como dificultades en la comprensión y aplicación de leyes de los signos para suma y resta. Algunos alumnos se confundían al utilizar ley de signos para multiplicación y división.

En el nivel de educación secundaria se da por hecho que los alumnos ya tienen consolidados los conocimientos básicos de aritmética porque ya han estado familiarizados con esta disciplina desde los primeros años de educación básica y se pretende que en el nivel de educación secundaria desarrollen conocimientos relacionados con Álgebra, Geometría y Probabilidad. Por esta ideología se dedica muy poco tiempo al repaso de aprendizajes previos, aquí se origina la importancia de que los alumnos tengan bien consolidados los conocimientos en el tiempo y grado correspondiente por lo cual es necesario que los docentes busquen y diversifiquen estrategias.

Es importante que los alumnos reduzcan esas deficiencias en el aprendizaje aritmético que tienen desde primer año de secundaria para que les sea posible desarrollar los conocimientos que se pretenden en los años consecuentes de secundaria. Sin embargo, se percibió que en algunos alumnos de secundaria aún había muchas carencias conceptuales de números con signo, un bajo manejo del lenguaje aritmético, confusión al operar con números negativos y positivos, así como dificultades en la comprensión y aplicación de leyes de los signos.

Durante las 4 semanas de prácticas de conducción realizadas al inicio del 7° semestre en la Escuela Secundaria Federalizada “Isidro Fabela” el problema detectado en alumnos de 2° “C” y “D”, fue referente a los errores y dificultades que los alumnos suelen tener al resolver problemas que impliquen sumar y restar con números positivos y negativos enteros. Estos resultados se obtuvieron en la aplicación del examen diagnóstico aplicado al inicio del ciclo escolar.

A continuación, se describen dos problemas que ejemplifican el problema que radicó en los grupos de alumnos antes mencionado.

Problema 1:

Encuentra la ecuación que expresa el perímetro de la siguiente figura:

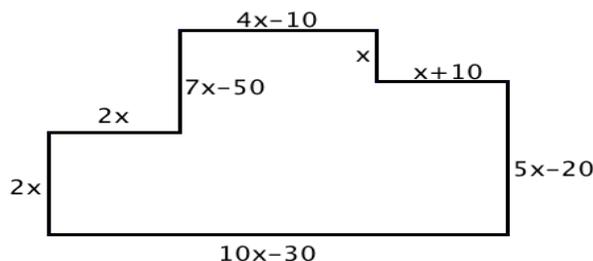


FIGURA I Representación del problema

Solución dada por los alumnos:

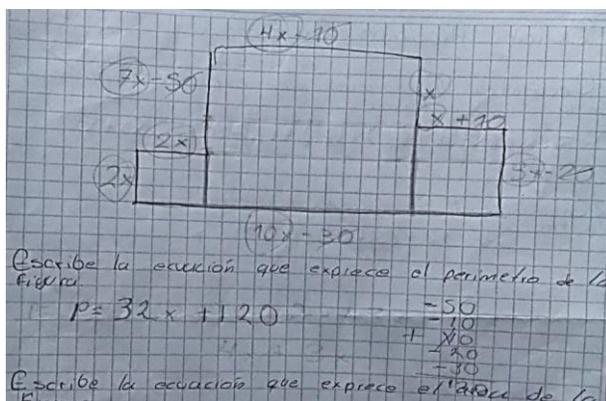


FIGURA II Solución 1 dada por los alumnos

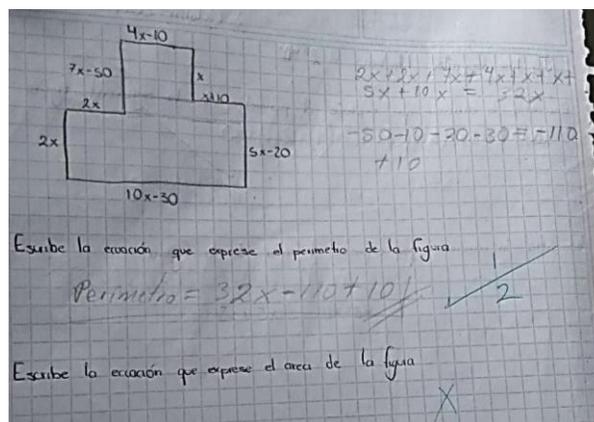


FIGURA III Solución 2 dada por los alumnos

Al analizar la solución que dan los alumnos a dicho problema, se puede notar que identificaron que el problema implicaba sumar los términos, para lo cual se requiere agrupar términos semejantes para después simplificar haciendo las operaciones necesarias, al sumar los términos dependientes no se observó problema porque implican solo números positivos, pero con los términos independientes se obtienen repuestas distintas. En la primera solución se observa que los alumnos consideraron la operación como una suma en la que no importaba el signo y al deducir que era suma colocaron el signo positivo, incluso expresaban que al referirse a sumar el resultado llevaba signo positivo.

La segunda solución evidencia que los alumnos agruparon números positivos con positivos y los sumaron conservando el signo positivo, posteriormente agruparon números negativos con negativos y los sumaron conservando el signo, pero al no saber cómo operar con número positivo y negativo optaron por colocar los números como tal.

Problema 2:

Obtener el perímetro de la siguiente figura:

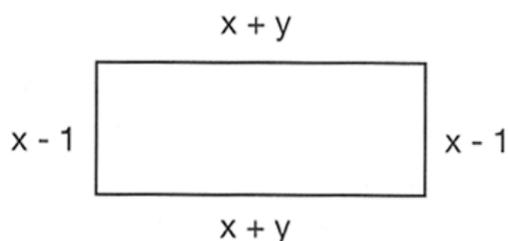


FIGURA IV Representación del problema

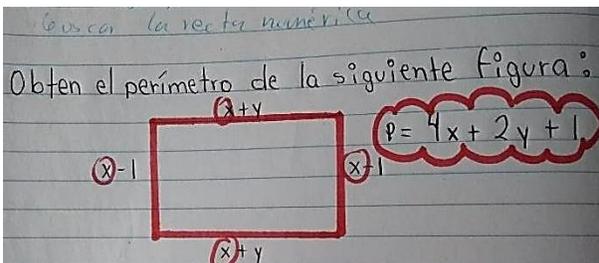


FIGURA V Solución 1 dada por los alumnos

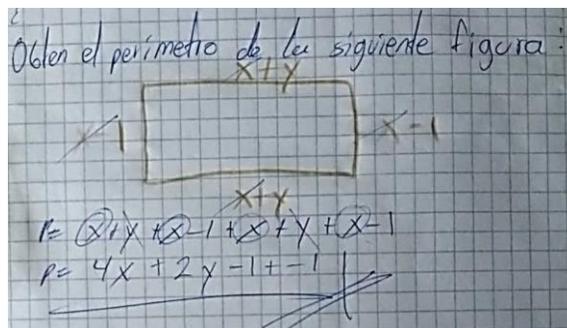


FIGURA VI Solución 2 dada por los alumnos

Al analizar la primera solución que dieron algunos alumnos, se puede afirmar que lograron conceptualizar que el perímetro es la suma de todos los lados de la figura y agruparon términos para llevar a cabo la suma, pero al operar los términos independientes al tratarse de números negativos lo que hicieron fue aplicar la ley de signos que sabían. Sin embargo, la ley era correcta pero no aplicaba para estos casos, es decir aplicaron la ley de los signos para la multiplicación en lugar de ocupar la ley de los signos para suma y resta.

Los alumnos expresaban lo siguiente: “tenemos -1 y -1 y el maestro de 1° nos decía que negativo y negativo se multiplican y dan positivo”

La segunda solución denota que los alumnos desarrollaron el resultado escribiéndolos tal y como están en la figura solo agregan el signo de suma después de escribir la medida de cada

lado y posteriormente llevaban a cabo la simplificación de la ecuación agrupando términos semejantes; entonces en su respuesta final anotaban que al sumar las “x” se obtiene $4x$, al sumar las “y” se obtiene $2y$ porque aparecen 2 veces “y”, hasta aquí el resultado es correcto pero al llevar a cabo la suma de dos números negativos escribieron tal cual la operación y se propicia el error que es tener dos signos seguidos.

Los alumnos expresaban lo siguiente:

“Tenemos -1 y le sumamos -1 entonces se escribiría $-1+-1$ y después ya no sé cómo hacerle por eso la escribo así para decir que estoy sumando un número negativo”

Los contenidos temáticos que se trabajaron durante la jornada de prácticas en la cual se implementó la propuesta didáctica fueron:

- ***Identifica y localiza números con signo en la recta numérica. Utiliza los números simétricos y el valor absoluto.*** Este contenido funciona como un antecedente al trabajo de números con signo, implica el uso de la recta numérica la cual es un instrumento que facilita la comprensión de los números con signo, se abordan también conceptos como el valor absoluto, los números simétricos y el cero. Estos conceptos sirven como base debido a que son elementos muy importantes de los números positivos y negativos.
- ***Resuelve problemas de suma con números enteros positivos y negativos.*** Se abarcan los problemas que impliquen la adición de números positivos y negativos es aquí donde se comienzan a detectar las dificultades y se buscan las estrategias para una mejor comprensión, se recolectaron evidencias de los principales errores y los avances que hubo conforme se fue desarrollando el contenido.
- ***Resuelve problemas de resta con números enteros positivos y negativos.*** El contenido hace referencia a la forma en que los alumnos resuelven problemas que impliquen la sustracción de números con signo, se presentaron confusiones porque se quedaban con el contenido anterior que era de suma. En este contenido se hicieron más notorios errores porque había más dudas y errores, se tuvo que explicar varias veces e investigar para lograr el dominio de este contenido.

**CAPÍTULO I. LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE
MUESTRAN LOS ALUMNOS, MISMO QUE PERMITIRÁN
APRENDER A RESOLVER SUMAS Y RESTAS DE NÚMEROS
ENTEROS CON SIGNO**

Al iniciar con cualquier tema se deben tomar en cuenta los conocimientos previos con los que los alumnos cuentan, para poder saber desde donde se debe comenzar y en caso de ser necesario dar un breve repaso a lo que antecede al contenido, en algunas ocasiones los alumnos necesitan recordar esos conocimientos. Durante el proceso de enseñanza es importante monitorear constantemente el trabajo de los alumnos para poder detectar las carencias de conocimientos al resolver problemas con suma y resta de números con signo, también servirá para saber qué dificultades van surgiendo durante la resolución de problemas y los obstáculos que se presentan. Es importante ver los progresos y habilidades que desarrollan algunos alumnos.

Para lograr que los alumnos comprendan los números con signo deberán tener bien definidos los conceptos de recta numérica, valor absoluto, la simetría de los números y la concepción del cero. Estos temas fueron abordados de manera general en los niveles anteriores, pero es necesario como inicio del tema plantear problemas en los cuales se ponga a prueba lo que los alumnos saben y de esta manera conocer y comprender como conciben los alumnos los conceptos necesarios para el desarrollo del contenido de interés. Por esta razón el primer contenido que se trabajó al aplicar la propuesta fue: Identifica y localiza números con signo en la recta numérica. Utiliza los números simétricos y el valor absoluto.

Como inicio se planteó el siguiente problema con el fin de saber si los alumnos tenían conocimiento de los números negativos y cómo eran entendidos por ellos:

Maribel tenía \$4,650 de saldo en su tarjeta de débito y decidió comprar un refrigerador. Si el refrigerador tenía un costo de \$7,860 y lo pagó con su tarjeta de débito. ¿Cuál es el saldo actual con el que cuenta Maribel en su tarjeta de débito?

¿Cómo llegué a esta respuesta?

¿Cómo puedo justificar mi respuesta?

Las respuestas de los alumnos fueron distintas dependiendo de cómo entendían el problema y de los que ellos sabían. En un primer momento expresaban que no le quedaba nada, otros decían que no lo había podido comprar porque le faltaba dinero para poder comprarlo y muy

pocos alumnos respondieron que Maribel quedaba debiendo dinero. Para comprender mejor el procedimiento que los alumnos llevaban a cabo y saber que conceptos tenían se recurrió a solicitar la participación de los alumnos para tener la oportunidad de escuchar sus razonamientos y su forma de expresarse.

Se observó que los alumnos contestaron de inmediato que no le alcanzaba entonces no lo compraría, pero al realizar un razonamiento más detallado restaron lo que costo el refrigerador menos el saldo que tenía Maribel en la tarjeta y de esta manera era que concluían que quedaba debiendo \$3210. Durante la participación para defender sus respuestas fue evidente que los alumnos apoyaban las opiniones de algunos compañeros y ayudaban a justificar las respuestas. De manera indirecta los alumnos se incluyeron al análisis de respuestas y fueron aportando ideas, con ayuda de la docente se pasó a representar esa deuda con números negativos.

El problema descrito anteriormente sirvió como punto de partida para la concepción de números negativos y del 0, debido a que se pudo visualizar que antes del cero (que la mayoría concebía como vacío o nada) existían números, los cuales son los números negativos. “Cuando se comienza a enseñar matemáticas, quizás no se enfatiza la importancia del cero y de la negatividad, como elementos fundamentales en la construcción del concepto de número signado, siendo que éste es uno de los más difíciles de adquirir por los alumnos”. (Gallardo & Hernández. 2007, p. 3) Se le debe dar la importancia a la conformación de conceptos de la negatividad y del 0 debido a que estos serán la base para la definición y comprensión de otros conceptos.

El cero es entendido de distintas maneras, se observó que los alumnos expresaban que es un número que no tiene valor, un vacío, un símbolo, que no queda nada, un valor neutro o algo que no existe. Aunque los alumnos expresaban de distintas maneras la definición de cero muestran tener noción del significado del 0. Que los alumnos contaran con este conocimiento tuvo un gran impacto en la comprensión de conceptos como los números simétricos, el valor absoluto, los números negativos y la recta numérica.

Uno de los conocimientos que facilitó trabajar con números positivos y negativos es la recta numérica, como lo menciona Bruno, A. (2006)

La importancia del conocimiento de la recta, como modelo y como contenido matemático, radica en que es una representación común a todos los sistemas numéricos y sirve de hilo conductor para el conocimiento numérico. La recta debe tener un tratamiento a lo largo de toda la escolaridad a medida que los alumnos van conociendo los diferentes tipos de números. Sin embargo, la realidad es que su uso depende del docente y, en ocasiones, de la propuesta curricular que él siga. (p.127)

La recta numérica representa un modelo para facilitar la comprensión de números con signo debido a que de esta manera los alumnos lograron visualizar y hasta para algunos alumnos fue un recurso de gran apoyo para resolver las dudas que se tenían. La recta numérica es un elemento importante en el aprendizaje de la suma y resta de números con signo e incluso para algunos alumnos era considerada como su guía para verificar que su forma de operar numéricamente era correcta.

Al solicitar a los alumnos que dibujaran una recta numérica en su libreta de acuerdo a como ellos recordaban que era; en un inicio los alumnos mostraron conocer la recta numérica pero sólo en los números positivos, 7 alumnos aproximadamente dibujaron una recta numérica que tenía un sentido positivo y uno negativo. También había errores al numerar la recta numérica.

Para desarrollar los conocimientos esperados los alumnos debían conocer la dualidad de los signos. De acuerdo a Baldor, A. (1999) “Los signos + y – tienen en Álgebra dos aplicaciones: una, indicar las operaciones de suma y resta, y otra, indicar el sentido o condición de las cantidades. Esta doble aplicación se distingue porque cuando los signos+ o – tienen la significación de suma o resta, van entre términos o expresiones incluidas en paréntesis. Cuando van precediendo a un término, ya sea literal o numérico, expresan el sentido positivo o negativo”. (p.15)

Otro de los aspectos que es necesario que los alumnos conozcan es saber diferenciar cuando los signos representan operación y cuando representan si un número es positivo o es negativo. Los estudiantes expresaron los números con signo de distintas maneras, lo cual es correcto pero que en un futuro les pudiera generar confusiones o una deficiencia en el manejo del lenguaje matemático. Por ejemplo: los alumnos expresaban de distinta manera los siguientes números: “-8” algunos expresaban que se decía menos ocho, otra forma de decirlo era ocho negativo; “+12” para este caso decían que se leía más dos, dos positivo o simplemente dos.

Para poder resolver problemas que impliquen números con signo los alumnos debían comprender primero el problema en su totalidad, lo primero que se requería saber es cómo se representan numéricamente diversos enunciados que son de situaciones familiares para el alumno sin embargo van implícitos en la vida cotidiana, derivado de esta situación se planteó la pregunta ¿Qué situaciones implican el uso de números con signo? Los alumnos aportaron ideas en las cuales decían que en las ganancias y pérdidas, en los casos de deber o tener dinero, en los partidos de fútbol para los goles a favor o goles en contra. La investigación de más ejemplos fue una de las primeras tareas en las que se comenzaba con la indagación.

Tener noción de en qué casos se ocupaban los números con signos tuvo la función de ser la base para que los alumnos comprendan los problemas al ser estos el fin y medio principales de las matemáticas. Se pretendía que los alumnos fueran capaces de comprender los problemas de modo que les fuera posible expresarlo numéricamente tomando en cuenta los datos que se daban y los datos que se solicitaban.

Los alumnos deberían saber cómo expresar los enunciados en números con signo, pero con la participación de los alumnos se manifestaba que al principio había confusiones pero bastó un ejemplo para que los alumnos recordaran, por ejemplo se planteó la pregunta ¿Cómo escribirías numéricamente cinco grados bajo cero? Las respuestas fueron que era “5” y muy pocos alumnos respondieron que eran “-5”.

Posteriormente los alumnos comenzaron a aportar ejemplos de oraciones que se podían representar con números negativos o positivos. De lo cual se obtuvo lo siguiente:

“... durante el análisis grupal una alumna dijo: cuando debemos algo podría ser negativo y cuando por ejemplo nos pagan algo sería positivo” (Diario del profesor, 12/11/19) poco a poco más alumnos fueron participando mencionando que también podría ser lo que se gana y lo que se pierde o por ejemplo aumentar o disminuir como por ejemplo para aumentar o bajar de peso, en los termómetros o en recorridos.

Una vez que se sabía qué conocimientos tenían los alumnos del cero y de los números negativos y del valor absoluto fue necesario diagnosticar como ordenan de los números. Los alumnos coincidían en que el número que es neutro es el cero, siendo esta la barrera que divide a los números negativos de los números positivos. En la clase un 75% de los alumnos mostraron saber cómo determinar el orden de los números.

Uno de los modelos usados para poder ordenar números con signo era la recta numérica y ellos deducían que hacia la derecha eran números positivos y al izquierdo eran negativos, algunos alumnos mostraron deficiencias de conocimientos porque se guiaban por el valor absoluto y no por el signo, incluso se suscitó la siguiente situación en el aula de clases: “... un alumno expresa que en un ejercicio que se resolvió, sus compañeros se equivocaron porque decían que -65 era menor que 45 y eso estaba mal porque ni modo que 65 era menor que 45...” los alumnos justificaron sus respuestas para convencer a su compañero, sin embargo fue complicado que el alumno lograra comprender este razonamiento.

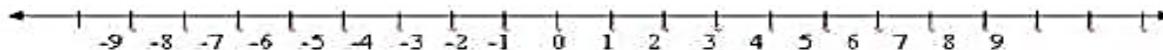
Mientras defendían sus respuestas dieron muestra de múltiples conocimientos que fueron de gran ayuda en el desarrollo del contenido. Si bien se identificaron vacíos del conocimiento se observó que por lo menos tenían nociones de alguno de los conceptos necesarios para que los alumnos desarrollaran conocimientos progresivamente, pero al ser distinto saber la teoría que saberlo aplicar se planteó el siguiente problema para detectar en que ámbitos había mayor carencia y cuáles eran las fortalezas en cuanto a estos conceptos:

Al terminar la temporada de futbol mexicano, la tabla de resultados se encontraba muy apretada, para definir cuáles eran los ocho equipos que pasaban a la liguilla; por lo que se acordó tomar en cuenta el resultado de sumar

los goles a favor y los goles en contra de cada equipo; luego ordenar los equipos para elegir los ocho que resultaran con mejor posición; es decir, con mayor número de goles a favor o con menor número de goles en contra.

Los resultados de sumar los goles a favor y los goles en contra son los siguientes: Morelia 8 goles en contra, Monterrey 5 goles a favor, Toluca 3 goles a favor, América 7 goles a favor, Jaguares 4 goles en contra, Pumas 5 goles en contra, Cruz Azul 7 goles en contra, Tigres 6 goles en contra, Chivas 5 goles en contra, Santos 3 goles a favor, Atlante 2 goles en contra, Necaxa 4 goles a favor.

1.- Ubica en la recta numérica los equipos en función de número de goles a favor



o en contra.

2.- Anota en la siguiente tabla los ocho equipos que pasan a la liguilla de acuerdo con la actividad anterior.

| POSICIÓN | EQUIPO |
|---------------|--------|
| Primer lugar | |
| Segundo lugar | |
| Tercer lugar | |
| Cuarto lugar | |
| Quinto lugar | |
| Sexto lugar | |
| Séptimo lugar | |

- Anota los dos equipos que están a la misma distancia de cero: _____
- Si un equipo acumuló durante el torneo 15 goles a favor y 15 goles en contra, ¿Cuál es su resultado? _____
- El resultado final del equipo Morelia fue 8 goles en contra. ¿Cuántos goles a favor y cuántos en contra pudo haber acumulado? _____

El problema anterior engloba todos los conceptos manejados y puso a prueba a los alumnos porque en este problema debieron analizar bien el problema y posteriormente retomar lo que sabían teóricamente y lo aplicaron en una situación que tal vez no tenían la idea de que

involucraba números con signo, sirviendo como un referente que haría concientizar a los alumnos la utilidad de los números con signo.

Al llevar a cabo la resolución del problema la mayoría de los alumnos se reunió en pequeños grupos de acuerdo a sus afinidades y al monitorear constantemente el trabajo de los alumnos se percibió que intercambian sus conocimientos y discutían lo que cada uno sabe complementando para llegar a la resolución del problema. Si alguno de los alumnos mostraba pocos conocimientos entre todos expresaban lo que sabían y algunas veces se acercaban a la docente para resolver dudas que se propiciaban a partir de la discusión de conocimientos que cada uno sabía.

La primera sección del problema da cuenta de lo que sabían los alumnos acerca de lo que se expresa con los números negativos y números positivos y como ubicarlos en la recta numérica. Implicó que los alumnos convirtieran los enunciados que expresaban los goles de cada equipo a número ya sea positivo o negativo dependiendo de si eran goles a favor o goles en contra y posterior a ello ubicaron estos números en la recta numérica, en esta primera parte se obtuvo una respuesta favorable, ya que la mayoría de los alumnos lograron realizar correctamente esta representación numérica que serviría de guía para desarrollar el resto del problema, aunque en donde hubo dificultades fue al usar la recta numérica.

En la tercera sección del problema se ve como los alumnos ordenaron los números con signo, para los que hicieron la representación correcta en la recta numérica fue mucho más sencillo, pero por lo menos una cuarta parte del grupo mostró poco dominio en cuanto a ordenar números o si ubicaron incorrectamente en la recta implicaba también que hubiera confusión o errores en esta parte del problema.

Se plantearon preguntas que se resolverían con las secciones anteriores la primera de ellas en la que se solicita que anoten los dos equipos que están a la misma distancia de cero se requirió que los alumnos hicieran uso de la simetría de los números con signo y del valor absoluto, en esta pregunta se observaron pocos problemas en cuanto a la manera en que los alumnos

resuelven, pero como es un problema integral estar mal desde el principio implicaba respuestas erróneas.

En la siguiente pregunta se solicitaba que los alumnos determinaran el resultado de hacer una operación en este caso una suma resta en la que se llegara al cero. La respuesta de los alumnos fue correcta pero lo expresaban en otro término y entendían más al manejar que es como si por ejemplo tuvieran 15 pesos y compraran algo de 15 pesos pues no les queda nada. Fue evidente el concepto que se ha desarrollado al definir y entender al cero como sinónimo de nada.

La última pregunta implicaba que los alumnos diseñaran una posible adición o sustracción de números con signo que diera como resultado -8 . Al ser una pregunta abierta y en la que podía haber diversos resultados se observó que aproximadamente el 60% de los alumnos lograban establecer una operación que cumplía con el resultado al que se quiere llegar, se presentaban confusiones en cuanto a cómo escribir la operación y el manejo de los signos, por ello es importante que el alumno supiera que los signos tienen un doble significado de acuerdo a como está ubicado en la expresión aritmética.

Hasta el momento se han mencionado los conceptos clave y que serán el punto de partida para que los alumnos logaran desarrollar el aprendizaje esperado relacionado con la adición y sustracción de números con signo, sin embargo había aún más conceptos implícitos pero que se observó que los alumnos ya dominaban en su mayoría y eran importantes pero no trascendentes en el desarrollo del contenido.

Para trabajar las carencias que se hicieron visibles en los problemas introductorios se hizo uso de algunos ejercicios que ayudaron a que los alumnos ejercitaran el razonamiento matemático y que además analizaran diversos casos que se podían propiciar, también fueron útiles para observar el progreso que los alumnos iban presentando pero de una manera más general.

Los conocimientos previos con los que contaba el grupo en el que se trabajó dependía mucho de lo que han desarrollado en los niveles anteriores y de la forma en que ellos aprendieron a operar o manejar la recta numérica y dependía también del razonamiento matemático con el que contaban los alumnos, para unos era más difícil de entender que para otros.

Las características del grupo favorecieron a que los alumnos fueran apoyados para la comprensión de lo que se requería saber y de esta forma lograron nivelarse con el resto del grupo, lo cual permitió avanzar en el trabajo dentro del aula para que los alumnos pudieran desarrollar las habilidades y conocimientos correspondientes al nivel educativo en el que se encontraban.

**CAPÍTULO II. ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS QUE
SE GENERAN AL OPERAR SUMAS Y RESTAS CON NÚMEROS
ENTEROS**

En la enseñanza de las Matemáticas es importante conocer los errores, las dificultades y los obstáculos que se van suscitando en el desarrollo del contenido, su importancia se deriva de que conocer los factores que están afectando el aprendizaje de los alumnos ayudará a saber cuáles conocimientos se deben reforzar y poner especial atención, dará una idea al docente para saber qué es en lo que los alumnos aún tienen dudas o si hay carencias en el aprendizaje, es fundamental que el docente constantemente este monitoreando el trabajo de los alumnos para poder detectar que es lo que causa que no se estén logrando los aprendizajes esperados y una vez detectados hacer algo al respecto para que de esta forma se logren consolidar los conocimientos en el alumno.

La forma de actuar frente a estos factores poco favorables es muy diversa dependiendo de la forma en que cada alumno aprende y al tipo de factor al que nos referimos ya que actuaban diferente si se trataba de un error, de un obstáculo o de una dificultad. Algunos alumnos se encaminaban más a un aprendizaje autónomo, es decir ellos se indagaban y buscaban cómo solucionarlo.

Otros estudiantes requerían apoyo de sus compañeros o de la docente y algunos se rendían ante las situaciones y preferían abandonar la actividad y esperar a que se dieran las respuestas pero con la implementación de la indagación como estrategia esta actitud de los alumnos iba cambiando poco a poco y aunque no se logró en todos los alumnos en su totalidad si se observó un cambio en cuanto a la forma de trabajo y actitud.

Antes de iniciar con la descripción de las situaciones observadas durante las sesiones es necesario identificar la diferencia entre error, dificultad y obstáculo que aunque parecieran términos similares y que incluso se llegan a manejar como sinónimos, no se refieren a lo mismo y su origen es la clave para poder identificar en que caso se podrían clasificar en errores, dificultades u obstáculos.

Los autores (Gallardo & Hernández. 2007, p. 6) mencionan:

Las investigaciones sobre los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de los números negativos son muy variadas. De ahí que los

antecedentes se pueden clasificar en tres grandes grupos (Cid, 2003): como propuestas de enseñanza, por dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos, y por las implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo.

Es decir, se identificaron diferentes conflictos en el aprendizaje, pero fue necesario identificar las diferencias entre estos términos para saber la manera en que se debía actuar y tener en cuenta que es lo que estaba generando este conflicto en el aprendizaje de los alumnos.

Se sintetiza que un obstáculo será un conocimiento que tiene el alumno pero que no aplica en el caso presentado, es decir, se genera confusión con lo que los alumnos ya saben. Un error es una equivocación que cometía el alumno ya sean por algún número mal escrito o por una concepción mal entendida. Sin embargo ambos impedían que se logaran los conocimientos necesarios. Dichas concepciones se analizarán de manera particular en cada apartado correspondiente a cada uno de dichos aspectos.

2.1 Errores al realizar sumas y restas con números enteros.

Los errores surgen por diversos factores, por lo general están relacionados con un esquema cognitivo inadecuado en el alumno, los cuales se mantienen en el tiempo y están apoyados en conocimientos erróneamente adquiridos con anterioridad. Se debería trabajar frente a los errores ya que estos generan un obstáculo o los alumnos se quedarán con conocimientos erróneos que les seguirán causando conflictos más adelante y que les impida desarrollar los conocimientos consecuentes.

Para ello se debía saber desde donde venía el error y que el alumno justificara sus respuestas para saber en qué parte del proceso de aprendizaje los alumnos cometieron los errores porque estos errores podían hacer que todo el procedimiento y el resultado fueran incorrectos. Durante las sesiones correspondientes a los contenidos seleccionados para llevar a cabo la propuesta se detectaron diversos errores que a continuación se describen:

- **Errores al localizar números en la recta:** Como inicio se trabajó con la recta numérica debido a que este sería un modelo en el cual los alumnos podrían basarse para comprender mejor los números con signo y la adición y sustracción de números enteros. “Difícilmente se podrá entender la representación de la suma y de la resta (tanto la de puntos-flecha como la de tres flechas) si previamente no ha habido un trabajo dedicado a representar números con puntos y flechas indistintamente” (Bruno. A, 2006, p. 146).

Cuando se solicitaba a los alumnos que localizaran números en la recta numérica algunos de ellos no lograban identificar en donde se localizaban los números negativos y los números positivos.

- **Errores al escribir los resultados:** Un error muy común en el desarrollo del contenido correspondiente al tema de estudio se suscitaba cuando los alumnos escribían el resultado, los alumnos operaban de manera correcta, expresaban comprender la operación pero por alguna razón los alumnos escribían de manera incorrecta el resultado, es decir, escribían el resultado pero sin signo o con el signo contrario. Al pedir a los alumnos que justificaran su respuesta ellos mismos detectaban el error o sus compañeros hacían notar el error y corregían de inmediato ya que tampoco se explicaban porque habían escrito ese resultado.
- **Ignorar el signo:** En ocasiones los alumnos tomaban el número pero no consideraban el signo que lo acompañaba, solo operaban como si fueran enteros normales y tomaban el signo operacional. Por ejemplo en una operación resolvían de la siguiente manera: $-5 + 7 = 12$ Se observó que realizaron la operación pero no tomaban en cuenta el signo que anteceda al 5, por lo cual se obtenía un resultado erróneo. Los recursos que fueron de gran ayuda para que la mayoría de los alumnos dejaran ese error, son la recta numérica y las investigaciones encaminadas a la indagación que se hicieron al respecto.
- **Escribir de manera incorrecta los números con signo:** ... se le dictaron algunos enunciados a los alumnos y ellos lo tenían que expresar de forma numérica, observe que uno de los alumnos sabía identificar en que caso se trataba de número positivo o de número negativo, pero me percaté de que escribía primero el número y luego el signo...” (Diario del

profesor, 12/Nov/2019). Este fue un error poco común pero importante porque escribir de manera incorrecta los números, influye mucho, si se escribe el número antes del signo podría confundirse con el signo operacional.

- **Obviar respuestas.** Los alumnos solían sacar conclusiones de los problemas, las cuales suponían que eran suficientes para dar soluciones, sin embargo hacer esto género un error. Se presentó a los alumnos el siguiente problema:

Buscando agua, una rana cayó en un pozo de 30 m de hondo. En su intento de salir, la obstinada rana conseguía subir 3 metros cada día, pero por la noche resbalaba y bajaba dos metros. ¿Podrías decir cuántos días tardó la rana en salir? ¿Cómo convenceré de que mi respuesta es correcta?

Al solucionar el problema la mayoría de los alumnos concluyeron que cada día la rana avanzaba un metro, "... Una alumna expresó que cada día avanzaba tres metros, pero después regresaba uno entonces a tres le restamos dos queda uno, entonces cada día avanzaba un metro y como eran 30 metros entonces tardaba 30 días" (Diario del profesor, 14/11/2019). La operación realizada por la alumna fue correcta pero el error estuvo al concluir que como eran 30 metros entonces eran 30 días porque si se analizaba el problema la rana lograría salir en el día 28, porque ese día recorría los tres metros y completaba los 30 metros. La mayoría de los alumnos operaron de la misma forma.

2.2 Dificultades que se generan al resolver sumas y restas de números dirigidos.

Las dificultades son entendidas como aquellas circunstancias que generan que para el alumno sea difícil entender parcial o totalmente algún conocimiento, estas situaciones pueden ser externas a las aulas de clase, derivadas de la forma en que cada alumno aprende, o incluso relacionadas a las deficiencias en otra asignatura, en este caso la más relacionada es español. "... las dificultades manifiestas en los alumnos para su entendimiento repercuten tanto en la comprensión de otros conceptos como en la correcta interpretación de determinadas

situaciones y la solución de problemas asociados a ellas.” (Machado, Alexander & Romero, 2019, p. 4)

Específicamente se analizan las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de las cuales se derivan dos categorías que son las dificultades más comunes, estas son las dificultades en el aprendizaje del cálculo y las dificultades en la resolución de problemas matemáticos.

Las dificultades en la resolución de problemas de los alumnos con dificultades para el aprendizaje de las Matemáticas están más relacionadas con la adecuada aplicación de los diferentes procesos implicados -traducción, integración, planificación, operar, revisión y control- que con la ejecución de operaciones. (Romero. J & Lavigne. R, 2005, pág. 79)

Cada alumno presentaba dificultades muy distintas, lo que para unos parecía fácil o muy obvio para algunos otros representaba una dificultad. Podían influir situaciones personales, en algunas ocasiones los alumnos estaban concentrados en tantas cosas que centraban más su atención en cosas externas por lo cual en ocasiones los alumnos estaban distraídos y se les complicaba mucho el aprendizaje o incluso la falta de comprensión lectora. Fue aún más complicado por las características de la comunidad, las situaciones familiares por las que cada alumnos pasaba y la edad en la que los alumnos estaban.

Los estudiantes presentaron otro tipo de dificultades al estudiar los números enteros y operaciones en las que se incluían estos números, “... las dificultades de los alumnos para comprender y operar con los números negativos reflejan las etapas del desarrollo histórico de estos números (Glaeser, 1981; González Marí, 1995), de tal manera que se hace necesario conocer un poco sobre su historia para llevar a cabo su enseñanza.” (Machado, et. al, 2019, p. 4), una estrategia que podía ser muy útil para que los alumnos lograran erradicar esta dificultad era investigar, preguntarse como surgieron y conocer la utilidad de estos números

Es en estas dificultades en donde se hizo presente la estrategia utilizada, los alumnos indagaban para conocer porque surgieron los números negativos, qué representaban estos

números. Al concientizar a los alumnos de cómo fueron surgiendo y porque son útiles los alumnos estaban más interesados en el tema y concebían de una manera distinta los números negativos, además hubo una mejor comprensión de los problemas y por ende fueron presentando menos deficiencias. Durante el desarrollo de conocimientos relacionados con los números enteros y las operaciones de suma y resta se observaron diversas dificultades:

- Una de las principales dificultades en la resolución de los problemas era la correcta comprensión de los mismos para posteriormente realizar el procedimiento correspondiente y llegar a un resultado. Al resolver los problemas hubieron algunos alumnos que manifestaban no comprender el problema pero fue necesario leer nuevamente el problema e ir analizando cuáles eran los datos que se estaban proporcionando y que es lo que solicitaba el problema. Uno de los problemas en los que fue más evidente esta situación fue el siguiente:

Pitágoras nació en el año 580 antes de Cristo y murió en el año 501 antes de Cristo. ¿Qué edad tenía Pitágoras cuando murió? Muy pocos alumnos lograron responder el problema, algunos de ellos decían que era ilógico el año en que nació fuera mayor que el año en que murió, resultó un poco complicado que los alumnos lograran comprender el problema porque no estaban tomando en cuenta la parte que decía antes de Cristo ellos sólo se estaban enfocando a los números.

- Durante las clases la mayoría de los alumnos manifestaba que no sabían porque se incluían esos paréntesis y les generaba mucho conflicto cuando se les presentaban este tipo de operaciones. Se cree que los alumnos consideraban que al incluir estos signos tenían que realizar otra operación o que se resolvía de una manera distinta. Fue necesario explicar a los alumnos que si se colocaban los paréntesis con un signo de por medio, entonces los paréntesis estaban representando separación de términos pero el signo de suma o resta determinaba la operación que llevarían a cabo.
- Una dificultad a la que se enfrentaron los alumnos fue determinar en qué caso tenían que aplicar los números negativos o números positivos, comprendían el problema pero se

observaba que a los alumnos les costaba un poco de trabajo saber a qué tipo de entero se hacía referencia (positivo o negativo). En algunos casos el mismo problema sugería de manera indirecta a qué tipo de número dirigido hacia referencia, por ejemplo, se referían a edades, se sabía que nadie puede tener edades negativas, es decir sería incorrecto decir que alguien tiene menos 73 años pero aun así era difícil para los alumnos.

- Un factor que dificultó mucho que los alumnos aprendieran fue la motivación de los alumnos por aprender, y en especial temas de Matemáticas que es considerada la materia más difícil. Si los alumnos tienen la idea que no van a entender nada y además no le encuentran una aplicación real de lo que ven en Matemáticas será difícil para el estudiante y para el docente lograr los aprendizajes que se esperan. Es por esta razón que se tienen que buscar estrategias que llamen la atención del alumno y que impliquen que el alumno se involucre.

2.3 Obstáculos epistemológicos para operar adición y sustracción de número enteros.

Tomando en cuenta las definiciones manejadas por Duroux y Brousseau se determina que un obstáculo es un conocimiento o una concepción que produce respuestas adaptadas a cierto contexto, pero que genera respuestas falsa si se aplica en otro contexto. Ese conocimiento frecuentemente está muy arraigado en el alumno que es difícil que el alumno abandone ese conocimiento o en su caso sepa identificar en que caso es funcional lo que sabe, como lo menciona Brousseau (como se cita en Cid, E., 2000, p. 2) “Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada.”

De acuerdo a Brousseau los obstáculos epistemológicos son aquellos que son propios del contenido y que prevalecen en la historia en cuanto al desarrollo conceptual. En el aprendizaje de la suma y resta de números enteros se presentaban diversos obstáculos que impedían que hubiera un avance estándar de los alumnos, algunos alumnos se quedaban en el proceso, había algo que les causaba confusión o que no les permitía lograr resolver los problemas u operaciones presentadas de una manera correcta o lo más cercano a una respuesta acertada.

- Una situación que se repetía mucho era que algunos alumnos iban adelantados y conocían la ley de los signos para la multiplicación pero solían confundir las leyes de los signos, pero como lo menciona Gallardo & Hernández, (2007), p. 22 “La sustracción de enteros debe ser comprendida en todos los casos antes de enseñar la multiplicación vía reglas de signos. Ello evitará extrapolaciones erróneas”. En este caso los alumnos tenían el conocimiento de cómo operar con signos cuando se trataba de números enteros pero fue desfavorable porque para las operaciones que se les estaban presentando lo que sabían no aplicaba.

Para que los alumnos lograran superar este obstáculo se les explico que pasa con los signos dependiendo de la operación a realizar, incluso para orientarse y poder identificar los signos que se involucraban y las operaciones a las que se hacía referencia ocupaban las palabras

“deber”, “tener”, “agregar” “quitar”. Se establecieron las reglas que aplicaban para las sumas y restas, pero esto implicaba que los alumnos tuvieran conocimiento del valor absoluto. Y se usaba la recta numérica para unificar resultados cuando se suscitaban discusiones por resultados que se obtenían.

- Algo que impedía que los alumnos operaran con números dirigidos era la confusión cuando las operaciones incluían paréntesis, algunos de ellos sabían que los paréntesis en Matemáticas representaban que se tenía que hacer una multiplicación. Una alumna expresó “... maestra pero no se supone que estamos viendo sumas y restas y porque ya nos puso multiplicación en este problema” (diario del profesor, 26/11/2019), se deberá trabajar para que los alumnos logren comprender y diferenciar que los paréntesis pueden representar también separación de términos.
- Los alumnos hacían notar que se les complicaba mucho la resta de números negativos, un obstáculo notable era utilizar la regla de suma de los enteros para solucionar las restas, para algunos casos era correcto pero había algunas operaciones en las que seguir usando esa forma de operar era incorrecta, por ejemplo, se obtenían los siguientes resultados:

$$-9 - (-4) = -13 \qquad -7 - 3 = -4 \qquad 7 - 5 = 2$$

En este ejemplo la primera operación fue contestada de manera incorrecta y al justificar su respuesta los alumnos dijeron que obtenían ese resultado porque como encontraron dos signos seguidos aplicaron la multiplicación de signos, entonces negativo por negativo daba positivo, entonces sumaban 9 más 4 y se colocaba el signo negativo que tenía el 9, en la segunda operación los alumnos hacían la resta 7 menos 3 y obtenían 4 pero al resultado le agregaban el signo negativo que está al principio de la operación, la tercera operación era correcta.

- Los alumnos entendían la suma como aumento y la sustracción como disminución, por esta razón aunque se tratara de signos que se encontraban y por lo cual se debía actuar de manera distinta los alumnos no tomaban en cuenta las condiciones y solo se guiaban por

la operación lo cual les impedía desarrollar las habilidades para responder estas operaciones. Ocurrió lo mismo que en el obstáculo anterior, su conocimiento solo aplicaba en algunos casos.

- Separación entre pensamiento académico y pensamiento natural. Algo que no favorecía mucho el entendimiento de los números con signo era que para la mayoría de los alumnos fue complejo vincular lo que aprende en la escuela con lo que sucede en situaciones comunes. Algunos de los alumnos incluso manifestaban que no encontraban la aplicabilidad de los signos negativos, pero al analizar en qué situaciones estaban presentes los números con signo era posible ampliar sus conocimientos y además les parecía más fácil entender con situaciones en las que no se daban cuenta que hacían uso de este tipo de números.
- Ausencia de representación de los procesos de pensamiento. Los alumnos se enfrentaban a un obstáculo porque les faltaba alguna representación que les permitiera una mejor comprensión. O a veces hacían la representación pero de una manera incorrecta y en lugar de ser un recurso que ayudara les generaba conflicto y confusión. Las representaciones usadas fueron gráficamente con la recta numérica y simbólica con la escritura de las operaciones.
- Ausencia de un modelo unificador para el tema de los números enteros. Algo que también generaba problemas en el aprendizaje era que algunos de los métodos para enseñar este tema no eran favorables para algunos de los alumnos, a pesar de que se variaban los recursos y las expresiones para que los alumnos aprendieran se observaba que era algo difícil para los alumnos lograr comprender los problemas que implicaban número enteros positivos y negativos.
- Se presume que a los alumnos les generaba un obstáculo trabajar con más de dos números, por ejemplo lograban responder operaciones sencillas de dos términos pero cuando se les presentaban adiciones o sustracciones con cinco términos en ocasiones no sabían cómo resolver y escribían un resultado del cual no estaban muy convencidos,

también se observó que iban realizando las operaciones pero llegaba el momento en que ya no avanzaban porque no sabían si iban bien. Un ejemplo de este obstáculo fue al resolver una operación como la siguiente:

- 1 Un termómetro que deja marcadas las temperaturas máxima y mínima en grados Celsius $^{\circ}\text{C}$, registró los siguientes datos durante cinco días:
Día 1: 22°C y 5°C . Día 2: 18°C y -2°C .
Día 3: 0°C y -4°C . Día 4: -2°C y -10°C .
Día 5: 5°C y -4°C .
- Calcula la amplitud térmica de cada día.
 - ¿Qué día tiene mayor amplitud térmica?

FIGURA VII Problema presentado a los alumnos

Al resolver el problema se observó que los alumnos operaban de manera correcta cada par de números pero se les anexo una última pregunta en la que se solicitaba que los estudiantes determinaran la suma total de las temperaturas de la semana, pero al tratarse de sumar muchos números se cometieron muchos errores y se obtenían diversas respuestas.

2.4 Aptitudes

Es necesario que también se tomen en cuenta los conocimientos que el alumno dominaba porque este es un campo de aprovechamiento, se pueden usar las habilidades que desarrollaron los alumnos como apoyo para que los demás alumnos se fueran nivelando, además que en este grupo funcionaba mucho el aprendizaje entre pares, "... para una de las alumnas era muy fácil comprender y resolver los problemas y cuando sus compañeros no entendían ella intervenía para ayudar a sus compañeros"(Diario del profesor, 27/11/2019).

Algo que motivaba a los alumnos es que también se evidenciaran y se tomaran en cuenta las aportaciones acertadas que realizaban, muchas veces se aprende de los alumnos, como docentes nos complicamos a veces queriendo que nuestros alumnos comprendan de una manera muy formal, pero los alumnos ven las cosas de una manera mucho más sencilla y llegan a sorprender con sus razonamientos. Es importante reconocer que en las clases había

muchas aportaciones correctas de los alumnos y fue posible observar que cuentan con muchas habilidades favorables para la adquisición de nuevos conocimientos.

Resultaba muy favorable que los alumnos comprendieran que todos son capaces de aprender Matemáticas que se quitaran esa idea de que no sirven para las Matemáticas y esto se lograra si no desechamos de inmediato sus opiniones, si no que rescatamos lo correcto de cada aportación y en caso de observar errores concientizar al alumno de porqué su respuesta es errónea y que hasta el descubra el error.

Los errores, dificultades y obstáculos no deben de verse como algo malo o como motivo de frustración, al contrario se debe de aprovechar estas situaciones para saber qué es lo que se llega a cometer y es incorrecto para que así sea posible desarrollar técnicas para que se logre erradicar estas situaciones, si jamás nos equivocamos entonces es de preocuparse porque entonces no sabremos qué hacer cuando se presente una situación totalmente desconocida.

Es importante que los alumnos tengan la cultura de abstenerse de burlarse de los compañeros cuando alguien se equivoca y mejor aportar ideas que ayuden a comprender porque se generó el error. Se deberá generar en el grupo la confianza de expresar las dudas, participar sin miedo a equivocarse porque de los errores se aprende y compartir los conocimientos que poseen para que sea de ayuda para los demás.

**CAPÍTULO III. ¿CÓMO FAVORECE LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE ALGORITMOS PARA
RESOLVER SUMA Y RESTA CON NÚMEROS ENTEROS
POSITIVOS Y NEGATIVOS?**

Durante la aplicación de la propuesta didáctica implementada y analizada en el presente documento se trabajó mediante la resolución de problemas, debido a que la resolución de problemas es el medio y el fin de las Matemáticas como lo menciona Maza, C. (1991) “La resolución de problemas no es, pues, el objetivo terminal de la enseñanza de las operaciones, si no el punto de arranque y el elemento que caracteriza todo el proceso de enseñanza” (p.20).

Es decir, el aprendizaje de las Matemáticas se debe desarrollar haciendo uso del planteamiento de diversos problemas para que los alumnos vayan ejercitando y aprendiendo a resolver problemas, además que es la parte medular de las Matemáticas pero además deberá ser nuestra meta, los alumnos deberán adquirir los conocimientos y habilidades que permitirán cumplir con el perfil de egreso de los estudiantes al finalizar la educación secundaria.

De acuerdo al plan de aprendizajes clave se considera que uno de los propósitos generales de la educación básica es:

Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las Matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas. (p. 161)

Con la estrategia implementada se conjugó la resolución de problemas y la indagación con la intención de que se cumplieran los propósitos mencionados, se pretendía que los estudiantes fueran capaces de resolver problemas de manera autónoma; aplicaran sus conocimientos en situaciones reales y se desarrollara en ellos el interés y el gusto por realizar métodos que llevaran a una respuesta de los problemas.

Se observó que durante las sesiones los alumnos fueron mostrando confianza en sí mismos al participar frente al grupo exponiendo como es que llegaban a los resultados que ellos proponían y presentando una actitud positiva en el aprendizaje. Los alumnos se fueron incluyendo cada vez más al aportar ideas o sugerencias, ellos detectaban los errores cometidos por ellos o por sus compañeros y de manera conjunta corregían.

Para dar paso al análisis de la resolución de problemas y los resultados obtenidos al trabajar con este enfoque en el aprendizaje de las matemáticas es necesario definir el concepto de problema. Hay muchas definiciones respecto a que es un problema, pero de acuerdo a Trigo (2007)

Un problema en términos generales es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes: La existencia de un interés; la no existencia de una solución inmediata; la presencia de diversos caminos o métodos de solución; la atención por parte de un individuo para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. (p. 51)

Se deduce entonces que un problema será aquella situación que genere un estado de desequilibrio, el alumno deberá hacer uso de sus habilidades para poderle dar una solución y durante el paso a descubrir la solución se encontrara con diversos métodos de solución pero es importante analizar bien los datos y que el docente escuche el razonamiento del alumno, en ocasiones se ve que los docentes inmediatamente descartan los procedimientos de los alumnos aunque ellos lleguen al resultado y el razonamiento tenga lógica y simplemente los descartan porque no es el procedimiento que el docente pretende que los alumnos aprendan.

Se debe tener en cuenta que no todos entendemos ni razonamos de la misma manera, demos a los alumnos la oportunidad de desarrollar sus propios métodos de justificar sus respuestas y sobre todo de pensar, los problemas tienen que tener la característica de representarles un reto, de demandarles analizar y recuperar lo que saben y lo que están aprendiendo para llegar a una solución.

Al incluir la resolución de problemas como enfoque de las secuencias didácticas se presentaron diversos procedimientos y resultados, algunos de ellos muy acertados y que incluso llegaban a aplicar conocimientos avanzados a su nivel, pero también había los casos en los que se cometían errores y era buena señal, significa que el alumno estaba desarrollando nuevos aprendizajes y que estaba experimentando, se estaba incluyendo en el descubrimiento

de conocimientos. Estos errores también sirven como medio para aprender ya que con ellos se iban descartando conocimientos erróneos o mal comprendidos.

Se debe considerar que al detectar errores en los procedimientos se debía corregir pero buscando la manera de que el mismo detectara que es lo que fue incorrecto y porque, al descartar de inmediato sus resultados y métodos se provoca en el alumno desinterés e inseguridad, o bien puede llegar a desarrollar la idea de que las matemáticas son difíciles o muy aburridas.

Una de las ventajas de trabajar bajo la resolución de problemas fue que sirvió como recurso para detectar las deficiencias que aún tenían los alumnos así como las habilidades que en ellos se han desarrollado. Por esta razón era importante recuperar los resultados buenos y los malos, así como fomentar en los alumnos participar porque si no cómo sabrán si ellos estaban bien o mal.

Busquemos incluir a todos los alumnos en las clases, es indispensable generar en ellos confianza y buscar las estrategias para que todos participen, démosles la oportunidad de equivocarse, a veces los docentes se desesperan al ver errores y porque en ocasiones los alumnos tardan en encontrar la solución y prefieren dar las respuestas “para evitar pérdida de tiempo y confusiones”. Pero de esta manera ellos hacen uso de sus conocimientos y estarán descubriendo sus habilidades Polya, G. (1965) afirma:

La oportunidad puede perderse incluso si el estudiante tiene un talento natural para las matemáticas, ya que él, como cualquier otro, debe descubrir sus capacidades y sus aficiones; no puede saber si le gusta el pastel de frambuesas si nunca lo ha probado. (p. 5)

Los problemas se fueron graduado de acuerdo al avance que fueron teniendo, es decir, se empezó con problemas con una dificultad moderada que permitía que los alumnos aprendieran poco a poco a resolver problemas para que logran resolver tareas cada vez más complejas en las cuales fueran integrando y usando los conocimientos que hasta el momento

han ido adquiriendo. Los problemas usados debían despertar en los alumnos el interés, lo cual se logró incluyendo problemas reales, lo más apegados a la realidad posible y que fueran situaciones a las que los alumnos se enfrentaban o podrían enfrentarse, debían ser coherentes y contar con los datos necesarios para poder ser resueltos.

“La resolución de problemas propiamente dicha implica la búsqueda racional de una solución o soluciones a través de una serie de estrategias que ayudan a solucionar o afrontar una situación problemática” (García E., Bados A., 2014, p.5), en la búsqueda de una solución es recomendable tener un método el cual guíe todo el procedimiento y que favorezca a unificar estrategias que den solución a la problemática presentada.

Al llevar a cabo la resolución de problemas los alumnos requirieron cierta guía y apoyo, en un principio se requería de alguien que orientará al alumno, pero de manera que se fue trabajando bajo este enfoque los alumnos iban desarrollando las habilidades y conocimientos necesarios y de esta manera podrán enfrentarse a situaciones que se les presenten en la vida real.

Para llevar a cabo la resolución de problemas, Polya propone una serie de pasos, dicha serie es conocida como método de los cuatro pasos:

1.- Comprender el problema, estableciendo cual es la meta y los datos y condiciones de partida. Se podría decir que esta es la parte esencial en el proceso de resolver problemas, si el alumno tiene dificultades para comprender el problema como se pretende que pueda resolverlo, es necesario que el alumno analice bien el problema, y que pregunte si es que algo del problema es poco comprensible para él, debido a que este será el punto de partida. En el aula de clases se observó que este primer paso es en el que se suscitaron los obstáculos que impedían avanzar en la búsqueda de la solución o que hubiera una mala comprensión del problema implicaba una respuesta incorrecta.

Una vez que se comprendía el problema se debería identificar cuáles son los datos que proporcionaba el problema y que es lo que se solicitaba en la pregunta planteada, pero es

importante también que se tuvieran en cuenta las condiciones que se establecían en el problema. Una estrategia utilizada para los alumnos a los que se les complicaba identificar los elementos principales del problema era subrayarlos o escribirlos separados del problema.

Para la correcta comprensión podríamos apoyarnos en la asignatura de español trabajando de manera conjunta para que se atienda esta problemática que afecta el aprendizaje de las Matemáticas.

2.- Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución, conectando los datos con la meta. Una vez que se comprendía el problema y se identificaban los elementos clave del problema se comenzaba a idear algún método que llevara a una posible respuesta, para poder construir el proceso que se seguiría se partía de los datos que se proporcionaban y que es lo que se preguntaba, esta parte del proceso exigía que el alumno recuperara lo que sabe, hiciera uso del razonamiento lógico y experimentara ideando como podía actuar para resolver este problema.

En la exploración de un plan que llegue a la solución el alumno ponía a prueba sus habilidades y conocimientos, se requería que el alumno indagara para poder idear una estrategia lógica. Al resolver problemas la mayoría de los estudiantes se mostraba interesado y proponían diversos procedimientos para llegar a un resultado, en ocasiones se reunían en equipos para que de esta manera entre todos logaran la solución, pero se daba la oportunidad de que fueran los alumnos quienes crearan un plan. Como lo menciona Polya, C (1965)

Un profesor de Matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, mata en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello. (p. 3)

La docente podía intervenir para orientar al alumno o para ayudarlo a que el mismo fuera analizando el plan que ideó mediante preguntas que le causaran curiosidad y que lo guiaran para valorar si su método propuesto era funcional en el problema presentado.

3.- Llevar a cabo el plan ideado previamente. En esta fase el alumno ahora aplicaba el plan ideado en la etapa anterior, puede que en el proceso fuera modificando algunas cosas o que incluso decidieran cambiar de estrategia, era indispensable que el alumno pusiera especial cuidado al llevar a cabo el método pensado, ya que se observaba que los alumnos comprendían lo que tenía que hacer y su método para resolver era correcto, sin embargo durante el proceso algunos se equivocaban y esto llevaba a un resultado erróneo.

4.- Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado. Esta etapa es conocida como comprobación, aquí se llevó a cabo un análisis del camino que se siguió y el resultado al que se había llegado, para evaluar si la estrategia utilizada fue factible y si se llevó a cabo de manera correcta, para posteriormente comparar resultados y determinar si el resultado era correcto. Por lo regular este paso se llevó a cabo de manera grupal, al finalizar el tiempo destinado para que los alumnos resolvieran el problema y cuando ya habían acabado todos los alumnos o por lo menos la mayoría se compartía resultados y procedimientos para de esta manera unificar conocimientos.

En esta parte del proceso la docente debía poner mayor atención, porque se hizo visible el plan aplicado por el alumno, esta podría ser la oportunidad para descartar o rescatar las ideas de los alumnos, además de que se dio una idea de porque se estaba viendo obstaculizado el proceso de aprendizaje. Polya, C (1965) expone “ El maestro debe ponerse en su lugar, ver desde el punto de vista del alumno, tratar de comprender lo que le pasa por la mente, y plantear una pregunta o indicar algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno.” (p. 25)

Es por esta razón que se solicitaba que los alumnos tuvieran un orden en sus cuadernos porque al llevar a cabo esta etapa de evaluación había ocasiones que los propios alumnos no entendían el orden que llevaban y existían confusiones, una problemática que se presentaba

era que por ejemplo se dejaba el problema para resolver en la sesión y los alumnos lograban llegar a la solución, se observaba que dominaban los conocimientos y eran capaces de justificar su respuesta, pero se terminaba la clase y en la siguiente sesión ya no recordaban del todo el procedimiento y al tratar de consultar su cuaderno era complicado entender las estrategias usadas por el alumno.

Los problemas se clasifican en diversos tipos de acuerdo a la forma del planteamiento y dependiendo lo que se solicita. “Polya sugiere dos categorías de tipos de problemas: Aquellos en los que se pide encontrar algo, problemas donde algo debe ser probado” (Trigo, 2007, p. 51). La primera categoría propuesta por Polya se refiere a los problemas en los que se proporcionan los datos, con los cuales los alumnos deberán seguir un proceso para poder responder la pregunta planteada

En las sesiones de clase se observó que en especial este tipo de problemas son más complicados para los estudiantes porque en algunas ocasiones se observaba que había algo que limitaba a los alumnos y surgían muchas dudas, la segunda categoría propuesta tiene la característica de que además de la información necesaria para resolver el problema se da una respuesta tentativa en la cual la solución será realizar una comprobación y determinar si lo que se propone en el problema es correcto y en caso de no ser así presentar cual es la respuesta correcta y porque se deduce que esa es la respuesta.

3.1 Tipos de problemas de adicción y sustracción

Dentro de la clasificación propuesta por Polya podemos incluir subniveles en la primera categoría, estas subcategorías serían la clasificación que propone Maza, C. (1991), específicamente para los problemas de adicción y sustracción:

Problemas de combinación: Consiste en disponer de dos cantidades iniciales que no tienen elementos en común. El problema consiste en determinar cuántos elementos resultan al reunir o combinar los elementos de ambos conjuntos. Este tipo de problemas no fueron usados durante la implementación de la estrategia propuesta debido a que estos problemas son para situaciones de otro tipo, son más funcionales para Aritmética, en este caso para abordar números positivos y negativos se hace uso de situaciones en las que los elementos pertenecen al mismo orden para de esta manera no causar confusiones al buscar la solución.

Problemas de cambio aumentado: En él, una cantidad inicial se cambiaba debido al cambio registrado de otra cantidad. El problema consiste entonces en averiguar la cantidad final que resultará. Este fue el tipo de problemas que se trabajaron para abordar la adición de números con signo. Se les presentaron a los alumnos problemas en los que se les daba el dato de inicio y posteriormente se indicaba un cambio y la pregunta planteada implicaba que los alumnos realizaran suma de números enteros para llegar a la respuesta solicitada. Ejemplo de un problema de este tipo presentado a los alumnos es el siguiente:

- *En un juego, los equipos pierden un punto cada vez que pierden un turno y ganan un punto cada vez que su equipo adivina correctamente.
El equipo de María perdió 8 turnos y adivinó correctamente 6 veces. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo de María?*

Como se presentó el problema la cantidad inicial eran los -8 puntos del equipo y sumarle los 6 puntos que logró acumular el equipo dando como resultado -2, dando respuesta a la pregunta el equipo obtuvo -2 puntos o bien perdió 2 puntos, sin embargo al resolver los alumnos aplicaron otro procedimiento al colocar el 6 como cantidad inicial y restarle los puntos que perdió. Ambos métodos son correctos y llegan a la misma solución. Aunque el objetivo era que este problema fuera del tipo cambio aumentado.

Problemas de cambio disminuyendo: En este caso, el cambio experimentado por la cantidad inicial implica su disminución hasta conseguir la cantidad final. Se presentó a los alumnos el siguiente problema:

Después de subir 8 pisos el ascensor de un edificio llega al piso 7 ¿De qué planta ha salido?

El problema se debía analizar detalladamente para poder establecer una operación que permitiera llegar a la respuesta, la intención del problema presentado era que los alumnos identificaran que como cantidad inicial se tomaba el piso al que llegó, en este caso el piso 7 y restarle los 8 pisos que subió para poder llegar a la cantidad final que demandaba el problema, es decir descubrir desde que piso salió, llevando a cabo la resta $7 - 8 = -1$ se deducía que el elevador salió del piso -1 o bien algunos alumnos expresaron que era del sótano.

Problemas de comparación: Consiste en disponer inicialmente de dos cantidades que han de ser comparadas determinando cuantos elementos más presenta la cantidad mayor respecto de la menor. Este tipo de problemas resulta favorable para la correcta comprensión, además que es una manera variada de presentar situaciones que lleven a plantear y resolver sumas y restas de números enteros.

A continuación se exponen problemas de este tipo trabajados durante las semanas de trabajo correspondientes a la propuesta didáctica:

En una industria de congelados, la nave de envasado está a $10^{\circ} C$, y en el interior del almacén frigorífico, a $15^{\circ} C$ bajo cero. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la nave y la cámara?

El problema implicaba calcular una diferencia entre dos cantidades, en este caso se hablaba de temperaturas en dos partes de una industria de congelados, al hablarse de diferencia se refería a una sustracción, sin embargo al tratarse de números dirigidos los signos influían para saber si se haría suma o resta. En la situación trabajada se tenía que tomar en cuenta el orden que estaba marcando de manera indirecta la pregunta, quedando la siguiente operación: $10 - (-15)$ de lo cual resulta 25 grados. Otro aspecto que se debía resaltar era el uso de los paréntesis que están indicando que se está haciendo una separación del signo operacional y el número dirigido.

Pitágoras nació en el año 580 antes de Cristo y murió en el año 501 antes de Cristo. ¿Qué edad tenía Pitágoras cuando murió?

El problema solicitaba de una manera implícita calcular la diferencia de los años presentados para de esta manera obtener la edad de Pitágoras. Para calcular la edad de alguien lo que se suele hacer es restar el año actual o el año de la muerte menos el año en que nació, con los datos presentados se generó una resta de números negativos porque se estaban manejando años antes de Cristo. Se realizaba la resta $-501 - (-580) = 79$.

En este tipo de problemas el orden en que se ubicaban los factores de la resta si influía, se observó que algunos alumnos siguieron el siguiente procedimiento: restaron el año en que nació menos el año en que murió $-580 - (-501)$ el resultado obtenido al operar de esta manera es -79 , es importante la comprensión del alumno y el correcto planteamiento del problema, el docente deberá poner especial atención en la manera que los alumnos resuelven problemas ya sea de este tipo o de los descritos anteriormente.

***Problemas de igualación:** Son similares a los de comparación, vendría a preguntar cuanto ha de añadirse a la cantidad menor para alcanzar la mayor o, al revés, cuanto ha de disminuirse la cantidad mayor para igualarla con la menor.

El trabajo de la docente al desarrollar las clases bajo este enfoque fue un poco contradictorio, debía apoyar al alumno y guiarlo en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de los problemas, pero al mismo tiempo debía propiciar el aprendizaje autónomo, es decir dar la libertad al alumno para que hicieran uso de sus conocimientos y usaran su creatividad y conformaran un método que le permitiera encontrar una posible respuesta, en otra palabras “El maestro debe ayudarlo, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo.” (Polya, G, 1965, p. 25)

La actitud que los alumnos fueron presentando en el aula de clases en el transcurso de las sesiones fue cambiando, fueron mostrando cada vez más interés en la resolución de problemas, además de que se observaba que los alumnos se sentían incluidos en la

conformación de su aprendizaje, con esta forma de trabajo también se incluía lo emocional, ya que se iba generando en los alumnos confianza y más inclusión en el grupo.

Plantear problemas para que se logren los aprendizajes esperados en Matemáticas es un requerimiento y algo característico de la asignatura pero lo innovador de la propuesta didáctica es que se combinó la resolución de problemas y la indagación, la respuesta de los alumnos era muy variada de acuerdo a las debilidades y fortalezas de cada alumno, algunos alumnos mostraban una actitud pasiva al no intentar resolver los problemas y preferir esperar a que sus compañeros les pasaran las respuestas. Algunos estudiantes llevaban a cabo la resolución del problema apoyándose de una representación gráfica para posteriormente ser resuelto, intercambiaban ideas y en equipos o parejas iban aportando ideas para encontrar una respuesta.

Se trató de que los alumnos desarrollaran una nueva manera de resolver problemas, comúnmente a los alumnos se les da una serie de problemas y suele ser para ellos algo tedioso al ser demasiados problemas, complicados y además cuentan con muy poco acompañamiento del docente. O se hace lo contrario, se les presentan a los alumnos problemas pero el maestro los resuelve, con lo cual se pierde la oportunidad de que el alumno desarrolle las habilidades necesarias para que sea capaz de resolver problemas que se le presenten en la vida real.

La forma de trabajar los problemas fue de la siguiente manera, en un primer momento se les proporcionaba a los alumnos el problema ya sea en un cartel o de manera impresa, al inicio los alumnos requerían un acompañamiento para lograr la comprensión del problema, de manera conjunta se realizaba la lectura del problema y mediante participaciones se iban extrayendo los datos clave del problema y aportando ideas para buscar una manera de operar para obtener un resultado que diera respuesta a la pregunta planteada, posteriormente se pasó a dejar que los alumnos resolvieran los problemas en pequeños grupos o parejas formados por afinidad para realizar la resolución de problemas.

Hasta que en un momento se llegó a que los alumnos solucionaran de manera individual y solo preguntaban si es que algo del problema era poco comprensible; se daba la situación de

que tenían una propuesta de solución pero no estaban seguros entonces consultaban con la docente o con sus compañeros para afirmar que iban bien; en otros casos cuando había algo que obstaculizaba llegar a la solución los alumnos consultaban con los demás y en su caso reflexionaban para ellos mismos encontrar porque el resultado era incorrecto.

**CAPÍTULO IV. CARACTERÍSTICAS, VENTAJAS Y DESVENTAJAS
DE TRABAJAR HACIENDO USO DE LA INDAGACIÓN COMO
ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE SUMA Y RESTA DE
NÚMEROS ENTEROS**

La propuesta de trabajo se ideó con la finalidad de implementar una estrategia que permitiera favorecer el aprendizaje de las Matemáticas en los alumnos de secundaria, específicamente en la suma y resta de números enteros abarcando los números positivos y negativos y que además permitiera desarrollar las habilidades y conocimientos que deberían lograr los alumnos de primero de secundaria. Se buscó generar en los alumnos un aprendizaje permanente, es decir que fuera muy bien desarrollado para que de esta manera los alumnos recordaran estos conocimientos y les permitieran adquirir conocimientos más complejos.

La estrategia analizada en el presente documento se basaba principalmente en una forma de trabajo que se implementa muy poco en las aulas de México, esta dinámica de aprendizaje es a través de la indagación entendiendo dicho concepto de acuerdo a Brubacher J (2005) quien afirma que “La indagación se refiere a nuestros intentos por conocer y dar sentido al mundo (o a partes de este) que nos rodea” p. 53.

Es decir las acciones que se realizan para lograr comprender más lo que sucede en nuestro entorno, dicha forma de trabajo tiene múltiples ventajas y desventajas las cuales son necesarias analizar y se deben tener en cuenta para poder definir qué tan favorable es esta estrategia, incluso saber si habrían algunas especificaciones para poder llevar a cabo dicha propuesta en las aulas de clases en las que se trabajara en un futuro cuando se ejerza formalmente la docencia.

Para realizar la valoración que permita saber que tan viable es esta forma de trabajo se implementó el aprendizaje a través de la indagación en un grupo de primer grado de secundaria para saber cuáles son los pros y los contras de un aprendizaje mediado principalmente por ese estado de curiosidad que se genera en los alumnos. Además se requiere tener bien definido que es lo que conlleva la indagación y cuál es el papel del docente, porque es algo muy distinto a la enseñanza tradicional, dicho análisis servirá para saber que recursos ayudaran y poder realizar una planeación adecuada.

Comúnmente se observa que las metodologías implementadas conservan algunas características del aprendizaje tradicional y por más que se ha tratado de desaparecer estas

características a veces parece imposible, los procesos de enseñanza en su mayoría se rigen de la siguiente manera: se entiende que el maestro da la lección, presenta algunos ejemplos, el alumno resuelve ejercicios y una vez que se puede decir que el alumno ha entendido como resolver ahora se procede a dejarle ejercicios para que el alumno se aprenda de memoria el procedimiento.

Durante las observaciones los alumnos hicieron saber que a la mayoría les parecía aburrido y muy tedioso, que no le entendían a las matemáticas y demás expresiones. Con la estrategia presentada el alumno es quien generaba su conocimiento, se incluía en la formación de su conocimiento para lograr que el alumno desarrollara un razonamiento deductivo e inductivo.

La indagación es una estrategia implementada con el propósito de que el alumno desarrollara una actitud de curiosidad, que le permitiera saber en qué se fundamentaba lo que sabía y descubra que es capaz de formar su propio conocimiento, esta forma de trabajo implica además que se realizara una investigación y se recurriera a diversas fuentes de información para saber lo que se desconocía o reforzar lo que se sabía, era necesario tener en cuenta que “No significa que cada alumno se transformará en un investigador, pero el saber cómo se reúnen los conocimientos hará que uno tenga más ganas de asumir una posición tentativa. Podemos ser menos dogmáticos. Podríamos darnos cuenta de que podríamos cambiar de opinión”. Bateman. W (2000) p. 60, al implementar esta forma de trabajo se enriquecen los conocimientos tanto de los alumnos como del maestro porque se da la oportunidad de aprovechar las habilidades y conocimientos que cada alumno posee.

Recuperando las aportaciones acerca de la indagación realizadas por Bateman, W. (2000), retomando algunas de las recomendaciones para la resolución de problemas y tomando en cuenta la experiencia vivida en el aula de clases se proponen las siguientes etapas en el proceso de aprendizaje mediante la indagación a través de la resolución de problemas:

- 1.- Presentación del problema: En esta etapa la docente dio a conocer al alumno el problema a resolver. El problema debería ser entendible, con una dificultad media, que requiriera conocimientos previos con los que los alumnos contaban pero sobre todo que generará un

desequilibrio en el alumno, es decir que su respuesta implicará un razonamiento profundo y que pusiera a pensar al alumno; además debía ser interesante para el alumno para que el propio alumno quisiera encontrar una solución y agotara todos sus recursos en la búsqueda de una respuesta.

2.- El alumno interpreta los datos: Es más viable que esta etapa se trabajara de manera individual, pero en un principio podía ser trabajada en pequeños equipos de trabajo, la finalidad era que el alumno supiera actuar de manera individual y que sin ayuda comprendiera y fuera capaz de encontrar una solución al problema. En esta parte del proceso el alumno realizaba un análisis detallado del problema, recuperaba los datos que se le proporcionaban y detectaba que es lo que se solicitaba.

3.- Formulación de preguntas generadoras: De manera conjunta se analizaron los factores que estaban dificultando la correcta comprensión del problema, además se invitaba a que los alumnos hicieran una reflexión más extensa que rebasara lo esencial, es decir que los alumnos buscaran respuestas que salían de lo ordinario. Para poder tener presente este análisis se formularon algunas preguntas que guiaban la búsqueda de la solución y que implicaban hacer un análisis extra, preguntarse cosas que tal vez no habían pensado o que no se atrevían a cuestionar los alumnos.

4.- Dejar que el alumno explore sus propios conocimientos y consulte en caso de tener dudas: Una vez que el alumno tenían sintetizados los datos clave comenzaban a buscar en su mente que conocimientos les ayudarían a encontrar la solución, es decir realizaban una evaluación de lo que le podría servir, en caso de desconocer totalmente era necesario consultar diversas fuentes, se les sugirió a los alumnos consultar en libros, internet, viendo videos relacionados al tema y preguntando a sus padres, hermanos, familiares o conocidos.

En la institución donde se llevó a cabo la metodología era factible porque la mayoría de los alumnos contaban con los recursos necesarios como internet en casa o tenían alcance a bibliotecas, además los familiares y tutores por las características sociales poseían una

preparación que les permitía auxiliar a los estudiantes. También esta exploración sirvió para dar respuesta a las preguntas generadoras.

5.- Desarrollar un plan para dar solución al problema: A partir de la indagación realizada los alumnos comenzaban a estructurar una metodología que permitiera hallar una respuesta que diera solución al problema. Esta etapa implicaba un análisis detallado para que el alumno pudiera definir qué operaciones le ayudarían, y una actitud autónoma para que por sí mismos fueran logrando una secuencia, es decir que en la solución del problema supieran que hacer para resolver el problema. Era necesario que antes de actuar se tuviera un plan bien definido.

6.- Dar solución al problema: Era momento de que el alumno aplicara el plan ideado y era entonces que podía realizar una evaluación para saber si sus razonamientos y deducciones o inducciones habían sido correctas; de ser necesario el alumno podía realizar las adaptaciones que creía convenientes. Aunque ya se tenía un plan ideado se observó que habían dificultades, obstáculos y errores porque un porcentaje de los alumnos mostraba que se quedaba estancado, es decir requerían preguntar a los compañeros o docente para poder avanzar porque expresaban que no se sentían confiados de avanzar porque que tal estaban equivocados.

Hubo una condición para apoyar a los alumnos durante el procedimiento de resolución de problemas, la cual fue, el alumno debía presentar su procedimiento o respuesta tentativa y quien lo apoyaba solo le indicaba si iba bien pero de no ser así se le daban pistas al alumno, se tenía que cuidar mucho no darle la respuesta al alumno ni decirle de que manera resolver para que así el alumno fuera quien descubriera los conocimientos y se sintieran orgullosos al saber que lo había logrado. Al dejar que los estudiantes indagaran y realizarán generalidades o particularidades partiendo de algún problema se favorecía el aprendizaje debido a que era un conocimiento que difícilmente olvidaría.

7.- Comprobación: Este fue uno de los pasos finales una vez que el alumno había llevado a cabo los pasos necesarios y tenía una respuesta tentativa debía probar que su respuesta era correcta, esta comprobación servía para asegurarse que operó de manera correcta y saber si

se había cometido algún error para que a partir de esto se pudiera visualizar desde donde se cometió el error y porqué.

El alumno podía cambiar algo del procedimiento si se percataba de que algo no concordaba, se dio paso también a una posible investigación si es que había algo que generaba conflicto en el alumno. La docente debía fomentar en el alumno una actitud de constancia y perseverancia para evitar que los alumnos se dieran por vencidos y decidieran abandonar la actividad.

8.- Analizar respuestas y procedimientos de manera grupal: La parte final del trabajo mediante la indagación consiste en que se presentara el trabajo realizado por cada alumno, de manera voluntaria los alumnos compartieron sus procedimientos y respuestas. Primero se daba oportunidad de exponer a los alumnos, esta técnica fue sustentada con el argumento de Duckworth E., (2000), quien explica lo siguiente:

En lugar de explicárselo yo a los alumnos, les pido que ellos expliquen lo que piensan y porque lo piensan así. Al tratar de que sus ideas sean claras para los demás, los alumnos logran una mayor claridad para sí mismos. Mucho del proceso de aprendizaje está en las explicaciones (p. 223).

Al exponer fueron surgiendo nuevas necesidades, el alumno requería defender su respuesta argumentando de donde surgió cada número y forma en que fue resolviendo debido a que había algunos alumnos que estaban en desacuerdo y presentaban métodos de solución distintos, los cuales podían ser muy acertados o tener algo erróneo. Los alumnos iban dándose cuenta que podían recuperar para de esta forma consolidaran su conocimiento. En la discusión generada al buscar dar con la solución más apropiada y por supuesto más fácil la docente no debía intervenir, era necesario dejar a los alumnos expresarse.

Las sesiones trabajadas mediante la indagación fueron planeadas siguiendo un formato que se adaptaba muy bien a dicha estrategia; incluso estaba muy relacionada a la metodología

recomendada para trabajar dicha propuesta, de manera general se estructura con los siguientes apartados, los cuales se describen brevemente a continuación :

- Revisión de los conocimientos previos: Para poder desarrollar los aprendizajes esperados se requería saber que conocimientos tenían los alumnos, esta información podía ser evidenciada si se planteaban preguntas clave pero era preferible que fuera mediante la resolución de un problema que englobara todos los conocimientos que los alumnos deberían tener, este problema y/o preguntas sirvieron a la docente para saber desde donde partir y saber que conocimientos dominaba el alumno.

Al trabajar con los números negativos y positivos era necesario que los alumnos tuvieran presente el concepto de recta numérica, representación de los números en la recta numérica, concepto de números enteros y su clasificación, para que los alumnos comprendieran de mejor manera los números con signo se concientizó a los alumnos de la importancia de los números con signo, porqué surgieron. Para recabar información acerca de lo que sabían los alumnos se plantearon las siguientes preguntas y un problema que englobaba la ubicación de números en la recta numérica, el valor absoluto, el orden de los números y la simetría de números enteros:

- ✓ ¿Qué número entero es más cercano al cero? ¿Puede haber alguna otra respuesta?
- ✓ ¿Existen números menores que 0? ¿Cómo puedo demostrar que mi respuesta es correcta?
- ✓ ¿Son útiles los números negativos en mi vida cotidiana?
- ✓ ¿Quién invento los números negativos o porque surgieron?

Loa alumnos presentaron algunas dificultades para dar respuesta a las preguntas entonces se les dio la oportunidad de investigar en casa haciendo uso de los recursos sugeridos, la respuesta fue favorable porque todos los alumnos cumplieron con el trabajo extra clase, incluso se mostraban emocionados e impacientes por compartir lo que habían encontrado.

Descubrieron que los números con signo estaban presentes en la vida cotidiana y que incluso sin saberlo hacían uso de estos números.

- Presentación y resolución del problema del día: Este momento de la planeación fue la parte más importante en la implementación de la propuesta porque mediante la resolución de problemas desafiantes para los alumnos se lograba que en busca de una respuesta el alumno hiciera un razonamiento deductivo o inductivo, recuperaban los esquemas que tenían y desechaban algunas ideas que ya no encajaban en este nuevo conocimiento. Este fue el momento en el que se llevó a cabo el método de los cuatro pasos para la resolución de problemas.

Los problemas fueron cambiando conforme se avanzaba en el contenido, se inició con problemas que implicaban una recuperación de conocimientos y que representaban para el alumno un enigma pero cuya resolución implicaba un razonamiento medio y se fueron graduando siendo cada vez más complicados. La forma de trabajo fue en equipos y se logró llegar a la solución individual de los problemas.

- Discusión de los métodos de resolución: En la resolución de problemas se pudo observar que los alumnos llegaron a resultados diferentes, lo cual se debía a que los alumnos comprendían y actuaban de diferente forma, los alumnos no aprenden de igual manera y tenían distintos conocimientos. También se daba el caso de que se llegaba a los mismos resultados pero el modo en que se resolvían era distinto.

Por esta razón era necesario que cada alumno presentara y defendiera la forma en que resolvió los problemas y los resultados que obtuvo, al realizar esta actividad el alumno se enfrentó a perder el miedo de expresarse ante sus compañeros, confiar en sí mismo y argumentar bien sus resultados y procedimientos.

- Formalización de los conocimientos: Cuando se compartían los métodos de solución propuestos por los alumnos y se analizaban las respuestas era necesario que se hicieran conclusiones que surgieron a partir del proceso de resolución de problemas mediante la

indagación. Dichas conclusiones fueron realizadas por los alumnos haciendo una selección muy crítica de lo que podía utilizarse para hacer las generalidades y que a partir de lo general se hicieran conceptos muy específicos.

En esta etapa del aprendizaje podía participar la docente, actuando como guía para que los alumnos fueran organizando conceptos concretos, los alumnos trabajaron conjuntamente con la docente y verificaron sí podían hacer afirmaciones, era importante que el alumno tomará notas pero siendo ellos quienes fueran organizando esos apuntes que le servirían para poder consultar en caso de ser necesario.

Al desarrollar la enseñanza y aprendizaje haciendo uso de la indagación se observaron cambios positivos en la forma de trabajar y actitud de los alumnos, sin embargo habían algunos aspectos que podían obstaculizar que se llevara a cabo esta estrategia, además que en algunos alumnos se observaron situaciones que hacían difícil que se llevara a cabo la propuesta. Es por ello que se tiene que considerar las ventajas y desventajas de la indagación, aunque en lugar de ser tomadas como desventajas son más como áreas de mejora, es decir aspectos que hay que tener en cuenta para ir perfeccionando la estrategia propuesta.

4.1 Ventajas de aprender mediante la indagación

Influye de manera positiva en los alumnos: Se observó que la estrategia utilizada impactó emocionalmente en los alumnos debido a que desarrollaron una actitud de compromiso hacia la asignatura y cuando se lograba una buena aportación se sentían orgullosos y contentos de haber participado en la clase; además el grupo reconocía su trabajo y hacían comentarios positivos, lo cual favorecía en la confianza que el alumno tenía de participar ante el grupo o de trabajar sin ayuda de los demás. También fue posible ver que se involucraban más a las clases al realizar las actividades y participaban constantemente, además se observó que había una mayor motivación por aprender Matemáticas.

Inclusión de los alumnos pasivos: Una parte de los alumnos dejó de lado las ideas negativas que tenían al pensar que las Matemáticas eran muy difíciles. Es común que algunos alumnos

se den por vencidos en los problemas y se tengan catalogados a “los que saben más”, es decir los que siempre participan, entregan todos los trabajos, terminan a tiempo las actividades y tienen puro diez en la asignatura de Matemáticas; mientras los demás alumnos juegan un papel pasivo al esperar solo las respuestas.

Si bien el grupo contaba con formas de trabajo muy distintas los alumnos pasivos poco a poco iban interviniendo y se mostraban interesados. Hubo mayor compromiso de los alumnos porque realizaban los trabajos extra clase que se dejaban y al inicio de las sesiones consecuentes querían que se analizaran las respuestas, además que realizaban las investigaciones necesarias para sustentar lo que les generaba duda.

Los alumnos se ponen a prueba: Cuando los alumnos se enfrentaron a los problemas y a las preguntas generadoras tuvieron la necesidad de poner a prueba sus conocimientos, realizaron investigaciones, pero también fue necesario que pensarán más allá de lo evidente, que realizaran conclusiones y fueran formando sus propios conocimientos

Se convencieron de que sus aportaciones eran importantes y además descubrieron que sabían más de lo que creían he incluso se sorprendían del razonamiento que lograban, llegó un momento en que de manera espontánea los alumnos sorprendían al presentar ideas y respuestas muy bien fundamentadas que estaban apoyadas en un pensamiento muy bien analizado.

Logran desarrollar una actitud de juicio reservado hasta que los hechos hayan sido presentados y revisados: En la mayoría de los alumnos fue notoria una actitud más crítica cuando se le trataba de presentar algún conocimiento, en otras palabras difícilmente podían persuadir al alumno de algo que no le parecía muy lógico o si había algo que no lo convenciera del todo, es entonces que el alumno decidía si era favorable tomar lo que se le daba como una afirmación, el estudiante analizaba y requería que se comprobara para que pudiera aceptar lo que se le decía.

Por ejemplo, cuando los alumnos formalizaban conocimientos y alguno de los alumnos presentaba alguna de sus conclusiones o resultados era necesario presentarle las ideas que fundamentaban dicha respuesta, eran probados en diversos casos, analizados a detalle y de ser convincentes para los alumnos lo aprobaban y tomaban para fortalecer sus conocimientos, incluso aportaban ideas que reforzaban dicha afirmación o en su caso rechazaban lo que no les parecía correcto y realizaban las mejoras necesarias.

Aprenden el proceso: Los estudiantes tuvieron la oportunidad de incluirse en la formación de su conocimiento, se les dio esta oportunidad para que ellos tuvieran el gusto de sentirse orgullosos de descubrir nuevas cosas que adoptaron como conocimientos. Duckworth E., (2000) afirma que “Las personas deben construir su propio conocimiento y deben asimilar las experiencias nuevas, de forma tal que cobren sentido para ellas. Había comprobado que, con bastante frecuencia, simplemente decirles a los alumnos que queremos que sepan les deja impasibles”.

Se logra un mejor aprendizaje cuando son los propios alumnos quienes explican y hacen uso de sus conocimientos y expresiones para tratar de persuadir a los demás porque van desarrollando un mejor lenguaje matemático y van formando explicaciones más claras y concisas. La exposición funcionó como refuerzo al conocimiento.

Aprenden a tolerar más a los demás y a estar bien predisuestos para discutir y cambiar sus propias opiniones: Se observó que los alumnos desarrollaron una actitud más tolerante con sus compañeros, esto se afirma porque si algún alumno se equivocaba los comentarios o burlas se hacían cada vez menos presentes es de esta manera que había más confianza al compartir lo que los alumnos iban descubriendo, además fue notorio que los alumnos tenían una mente abierta a lo que expresaban sus compañeros; estaban dispuestos a modificar sus conocimientos si era necesario y abandonar los conocimientos que no aplicaban para lo que se pretendía que resolvieran.

Los estudiantes presentaron solidaridad con sus compañeros a los que les costaba trabajo desarrollar los conocimientos propuestos, ya no se descalificaban de inmediato las

aportaciones, al contrario se rescataba algo de la opinión para ser usado como un recurso que beneficiaba el aprendizaje o en su caso se buscaba la manera de concientizar a sus compañeros para que sus conocimientos fueran fortalecidos.

Desarrollan las habilidades necesarias para resolver problemas: Los alumnos fueron consolidando habilidades que les permitían resolver problemas entre las que se encuentran: autonomía para resolver los problemas sin necesidad de la intervención directa del docente o de sus compañeros, razonamiento deductivo, razonamiento inductivo, razonamiento crítico al identificar qué información tomar y hacer una selección de los conocimientos que le permitían llegar a la solución. Tuvieron la oportunidad de experimentar la alegría de resolver problemas y pudieron comprobar lo que se espera que aprendan.

Los alumnos serán más autónomos: Trabajar mediante la indagación generaba que los alumnos comenzaran a trabajar de manera individual requiriendo de muy poco apoyo en la conformación de sus habilidades y conocimientos, esto tuvo múltiples ventajas en el alumno porque estaría preparado para enfrentar problemas que se le presentarán en la vida cotidiana, es decir, sabría cómo actuar ante situaciones problemáticas cuando ya no estuviera cerca la docente.

Una de las intenciones era que el alumno sea una persona autónoma capaz de tomar sus propias dediciones y saber cómo enfrentarse a la vida real. Se pretendía que se fueran familiarizando con las formas de trabajo que se manejan en los niveles que siguen ya que conforme va avanzando su escolaridad se va disminuyendo el acompañamiento que se les da a los estudiantes.

4.2 Desventajas de la indagación

Ritmo de trabajo desigual: Podía ser desfavorable la diferencia en cuanto a los avances que lograba cada alumno, al ser distintas las formas de trabajo de cada alumno y considerando que piensan de manera diferente, algunos se aburrían porque habían obtenido la respuesta,

entonces se encontraban impacientes por hacer más actividades y algunos otros requerían de más tiempo. Surgía entonces un desafío para la docente ya que debía mediar los tiempos para que se les brindara el espacio necesario para que los alumnos analizaran y obtuvieran una respuesta, pero a la vez cerciorarse de que todos los alumnos o por lo menos la mayoría fueran avanzando.

Tiempo insuficiente: En ocasiones el tiempo determinado para la sesión de Matemáticas que por lo regular consta de 50 minutos era insuficiente, a veces el tiempo no alcanzaba porque la indagación implicaba un razonamiento muy preciso para poder hacer las conclusiones que servirían para conformar los aprendizajes. Para los docentes podría parecer una pérdida de tiempo y podrían optar por abandonar esta forma de trabajo porque requiere tiempo e incluso se podría ocupar una clase para resolver solo un problema.

Sin embargo no es así, Bateman, W. (2000) afirma: “Si la discusión llevo parte del tiempo de la clase, consuélase. Estaban pensando y ese es realmente el objetivo primordial de un buen docente” (p. 57). Con una sesión de trabajo normada por la indagación se logró más que con sesiones en las que el alumno tenía que aprender memorísticamente.

Falta de los recursos necesarios: En este caso la estrategia fue llevada a cabo en un contexto urbano, lo cual fue muy favorable porque la mayoría de los alumnos tenían acceso a los recursos necesarios para realizar investigaciones que les permitieran sustentar sus razonamientos o bien dar respuesta a lo que les causaba dificultades.

Sin embargo había que considerar que no todos los alumnos viven con las mismas condiciones y más si se decidiera trabajar esta estrategia en un contexto semiurbano o rural. Se recomienda que el docente propicie el acceso a los recursos, podría ser gestionando con la escuela el acceso a la sala de cómputo y a la biblioteca, apoyarse de los padres de familia o tutores u otras acciones, dependerá de cada docente y de las posibilidades de la escuela.

Dificultad para adaptarse al trabajo mediante la indagación: Costara trabajo acostumbrar a los alumnos a incluir la indagación como estrategia en su aprendizaje porque no es muy

común que se trabaje de esta manera, era necesario darle tiempo a los alumnos de adaptarse, alentarlos a incluirse en esta nueva forma de trabajo y estar pendiente del trabajo porque había alumnos que necesitaban un guía. No se pretende que de un momento a otro los alumnos indaguen, será gradual; modificando el modo en que se trabajan las clases conforme pasa el tiempo, el docente deberá ser paciente, motivar a los alumnos y propiciar un espacio de aprendizaje favorable.

Ideas muy arraigadas en los alumnos: Existe la posibilidad de que los alumnos se muestren renuentes a cambiar los conocimientos que ya tienen porque han desarrollado esas ideas desde hace tiempo o porque contradice lo que les dijeron sus maestros anteriores y lo que ellos piensan. No fue fácil cambiar las ideas que el alumno tenía, sobre todo si para él eran muy lógicas y que incluso se habían apropiado tanto de ellas. Se debía entonces buscar la manera de concientizar al alumno de las ideas que podían ser desfavorables para que desarrollaran el tipo de razonamiento que se requería, el alumno se enfrentó a un dilema al no saber que era correcto, es decir, tenía una confusión.

4.3 ¿Cómo interviene el docente al llevar a cabo la estrategia de la indagación?

Bateman (2000) considera que “Le corresponde al docente en la enseñanza por medio de la indagación, provocar en él un estado de desequilibrio” (p. 51). El docente asume la responsabilidad de idear preguntas generadoras y los problemas que permitan llevar a cabo la indagación, teniendo en cuenta que deberán ser un enigma para los alumnos, es decir, no ser tan obvias las respuestas que se solicitan pero que tampoco sean difíciles de resolver por los alumnos, que integren los conocimientos previos y los conocimientos que se busca que desarrollen los alumnos, que despierten el interés de los alumnos por resolverlos.

El papel del docente en la indagación es ser un líder y un guía, no un juez. El acompañamiento es distinto, el docente ayuda al alumno alentándolo a participar, mediando las participaciones y fortaleciendo la confianza pero no podrá determinar quién está bien o quien se ha equivocado, solo pide el apoyo de los alumnos para valorar si las aportaciones son correctas y entre todos van haciendo las adaptaciones pertinentes, solo apoya pero no explica ni les proporciona las respuestas.

Una característica que debe cumplir el docente que trabaje mediante la indagación es tener paciencia y confianza en sus alumnos debido a que tendrá que dejar que los alumnos usen su gran inteligencia, a veces es un gran trabajo no intervenir, porque como docentes se quiere demostrar que dominan los conocimientos necesarios y llega la desesperación porque tardan en avanzar las clases pero confiemos en los alumnos ellos son muy capaces y hasta nos sorprenderán de sus habilidades, solo démosle la oportunidad de usar su inteligencia y de razonar.

Es necesario un monitoreo constante por parte del maestro, se recomienda que el docente pase continuamente con cada alumno para que de esta manera pueda percatarse de los avances que se van logrando en cada alumno, le es posible detectar lo que les está generando muchas dificultades a los alumnos y observará como es la actitud de cada alumno a esta estrategia para que analice si hay algo que cambiar en las clases y saber si es pertinente ir

modificando la manera en que se trabaja hasta lograr que el alumno resuelva de manera individual, además que habrá detectado que alumnos requieren más atención y apoyo.

Para evaluar el trabajo de los alumnos realizado en el aula de clases o en casa se ocuparon diversos recursos. Los problemas resueltos eran calificados de acuerdo a la respuesta obtenida y la justificación de procedimientos dada por los alumnos, se tomaban en cuenta exposiciones realizadas por los alumnos en las cuales compartían procedimientos y resultados o lo que habían encontrado al realizar investigaciones. También se manejaron instrumentos para valorar las investigaciones o trabajos que realizaron los alumnos para llevar a cabo la indagación.

Se utilizó una rúbrica para investigación en la cual se valoraba: cantidad de información, calidad de la información, organización de la información, redacción, utilidad de la información y guía de información. De acuerdo al cumplimiento de los criterios considerados en la rúbrica se obtenía una calificación, la cual se asentaba en el registro de calificaciones que llevaba la docente.

El último rubro que era guía de investigación se refería a valorar el uso que los alumnos le dieron a dicho instrumento, la cual tenía la finalidad de que los alumnos tuvieran organizada la información que querían obtener y donde la obtuvieron. Dicha guía era una tabla que contenía:

- Preguntas generadoras y/o problema presentado: en este apartado se registraba la pregunta o problema al cual se le quería dar respuesta a través de la indagación.
- Fuentes de consulta: Se citaban los libros, páginas u otros recursos usados para que los alumnos realizaran sus investigaciones.
- Preguntas que surgieron a partir del problema: Derivado de que los alumnos piensan diferente y cuentan con diversos conocimientos se consideró este apartado para que los alumnos colocaran preguntas que de manera personal surgieron en el alumno.

- ¿Qué hice para resolver mis preguntas?: Los alumnos incluían las actividades que hicieron para resolver esas dudas que les surgieron, la mayoría de los alumnos recurría a preguntar a familiares, a otros maestros, investigar en sus apuntes, consultar libros o páginas de internet, incluso observaban videos.

La dinámica de trabajo para evaluar las investigaciones era entregar las investigaciones realizadas en la libreta o en hojas blancas y adjuntar su guía de evaluación, así como la rúbrica para que la docente sellaba los trabajos para identificar que trabajos se habían mostrado al inicio de la clase ya que solo estos trabajos son los que se llevaría para revisión, durante la clase se trabajaba compartiendo y analizando lo que cada alumno podía aportar en base a lo que había indagado, al finalizar la clase la docente se llevaba los trabajos para que fueran revisados y valorados para que en la clase siguiente se entregaran las calificaciones obtenidas de esta actividad.

CONCLUSIONES

La indagación se refiere a aquellos intentos por conocer y dar sentido al mundo, aplicado a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas podría interpretarse como un estado de curiosidad en el cual se busca un significado de lo que se enseña en la asignatura y la búsqueda de una solución a los problemas planteados mediante diversos métodos, además se busca una explicación para saber de donde surgen los conocimientos Matemáticos, quién hizo esos descubrimientos y en qué se basan.

Es importante enfatizar que no significa que los alumnos se volverán unos investigadores e inclusive unos matemáticos pero se sentirán parte de la conformación de sus conocimientos, lo cual se presume que llamará su atención y disminuirá la actitud pasiva de los alumnos. Además al conocer el alumno el origen de las afirmaciones, teorías, métodos que se enseñan en Matemáticas y darse a la tarea de conocer un poco más de los que se solicita en los planes de estudio, tendrá mayores conocimientos y un aprendizaje más favorable.

La propuesta de trabajo presentada se basa principalmente en que los alumnos aprendan de una manera distinta a lo que la mayoría de los estudiantes y docentes está acostumbrado, en ella los conocimientos del alumno son desarrollados mediante las investigaciones y deducciones que realizan los alumnos. El propósito es que los alumnos desarrollen habilidades y capacidades que les sean útiles para la vida cotidiana o bien los niveles subsecuentes; se pretende que los alumnos sean capaces de resolver problemas por sí mismos.

El docente actúa de una manera distinta en este tipo de aprendizaje, ahora el docente solo orienta a los alumnos y propone las preguntas generadoras que darán paso a la indagación, pero serán los alumnos quienes lleven a cabo los procesos necesarios para desarrollar sus aprendizajes apoyándose de diversos recursos. Como sucede en todos los grupos habrá alumnos que se les facilitara el trabajo y terminaran pronto, es recomendable apoyarse de esos alumnos para que ayuden a sus compañeros, pero la ayuda será distinta, escucharán a sus compañeros mas no les dan la respuesta ni les explican.

Los que explicaran serán los alumnos que tiene dificultades ya que de acuerdo a diversos autores al exponer también se aprende porque se estará perfeccionando el lenguaje matemático, además cuando alguien trata de explicar algo requiere perfeccionar sus ideas para que sean lo más claras posibles, de tal manera que sean fáciles de comprender para los demás.

Al principio será un poco difícil que los alumnos se adopten a esta forma de trabajo, es por esta razón que se irán graduando las actividades, es aconsejable que en un primer momento se desarrolle la indagación de forma grupal, posteriormente en pequeños equipos, hasta llegar al trabajo individual. Al ser uno de los propósitos de la propuesta que el alumno desarrolle competencias y habilidades personales será necesario llegar al momento en que el alumno trabaje de forma individual, para que de esta forma esté preparado para enfrentarse a problemas matemáticos de la vida cotidiana de manera autónoma, es decir saber actuar cuando no cuente con el apoyo del docente o de sus compañeros.

Al llevar a cabo la propuesta didáctica se visualizó que la mayoría de los alumnos logro la comprensión y dominio de la suma y resta con números positivos y negativos, el resto de los alumnos comprendía, pero había carencias, aun existían dudas que se fueron resolviendo. Dependiendo del compromiso que los alumnos presentaban a la asignatura, más de la mitad de los alumnos cumplía con las tareas de investigación y expresaban preguntas generadoras que daban pie a la indagación.

Se logró que los alumnos desarrollaran una actitud autónoma y se incitaba a que buscaran en diversas fuentes apoyándose de un instrumento para evaluar las investigaciones y haciendo uso de una guía para la recolección de datos. Eran muy pocos los alumnos que aun requerían de apoyo de la docente para resolver algunos errores, dificultades y obstáculos que surgían durante la resolución de problemas.

Tomando en cuenta lo observado durante la aplicación de la estrategia propuesta se determinó que lo que define qué tan viable es seguir el trabajo en las aulas a través de la indagación es

la actitud, compromiso y constancia de los alumnos, los docentes y padres de familia, pero también depende de los recursos con los que cuenta cada alumno o incluso la institución.

Puede que la indagación implique tiempo, sin embargo es un tiempo bien invertido porque el alumno estará participando en la construcción de sus conocimientos y la comprensión será mejor, ya que es el alumno quien descubre sus propios conocimientos y se dará cuenta que tiene habilidades que hasta el desconocía. Al trabajar mediante la indagación nos daremos cuenta de las verdaderas habilidades de los alumnos además harán uso de la gran inteligencia con la que cuenta cada uno de ellos y se les estará dando la oportunidad de resolver problemas de manera individual haciendo uso de sus habilidades y conocimientos.

Con la propuesta de desarrollar las clases mediante la indagación se pretende influir en la ideología que se tiene de las Matemáticas, al afirmar que los alumnos no pueden hacer suposiciones de que no les gustan las Matemáticas si no han tenido la oportunidad de descubrir y divertirse resolviendo problemas matemáticos. Tal vez trabajando de una manera distinta a lo convencional se pueda cambiar la perspectiva hacia la asignatura.

Es importante mantener durante el proceso una actitud positiva y motivación por aprender; deberán tener paciencia tanto el alumno como el docente ya que es un proceso laborioso pero que vale mucho la pena. Démonos la oportunidad de descubrir que nuestros alumnos son muy capaces y trabajemos de manera conjunta en el desarrollo del aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baldor, A. (1999). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.
- Bateman, W. (2000) Alumnos curiosos. Preguntas para aprender y preguntas para enseñar. Barcelona. Editorial Gedisa.
- Brubacher J., Case C., Reagan T. (2005). Cómo ser un docente reflexivo. La construcción de una cultura de la indagación en las escuelas. Barcelona. Editorial Gedisa.
- Bruno, Alicia; Cabrera, Noemí La recta numérica en los libros de texto en España Educación Matemática, vol. 18, núm. 3, diciembre, 2006, pp. 125-149 Grupo Santillana México Distrito Federal, México
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10.
- Duckworth E., (2000). Cuando surgen ideas maravillosas., Barcelona. Editorial Gedisa.
- Gallardo & Hernández. (2007). <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>. Obtenido de Emergencia de los números enteros: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>
- Gallardo & Hernández. (2007). <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>. Obtenido de Emergencia de los números enteros: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>
- Gallardo & Hernández. (2007). <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>. Obtenido de

Emergencia de los números enteros:

<http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>

- García E., Bados A. (2014). Resolución de problemas. Facultat de Psicologia Departament de Personalitat, Avaluació i Tractament Psicològics. Pp 34.
- Maz Machado, Alexander, & Rico Romero, Luis (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1) ,537-554. [fecha de Consulta 13 de Diciembre de 2019]. ISSN: Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2931/293121936024>
- Maza, C. (1991) Enseñanza de la suma y la resta. España. Editorial síntesis.
- Polya, G. *Como plantear y resolver problemas*. México: trillas, 1965.
- Romero, J & Lavigne, R. (2005). Dificultades en el Aprendizaje: Unificación de Criterios Diagnósticos, Dirección general de participación y solidaridad educativa.
- SEP (2017), Aprendizajes clave.
- Trigo, L. M. S. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Trillas.

ANEXOS

Tabla 1 Instrumento que da cuenta de las investigaciones realizadas por los alumnos

GUÍA DE INVESTIGACIÓN

Alumn@: _____

| Preguntas generadoras y/o problema presentado | Fuentes de consulta | Preguntas que me surgieron a partir del problema | ¿Qué hice para resolver mis preguntas?(incluir fuentes de información si fue necesario) |
|---|---------------------|--|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

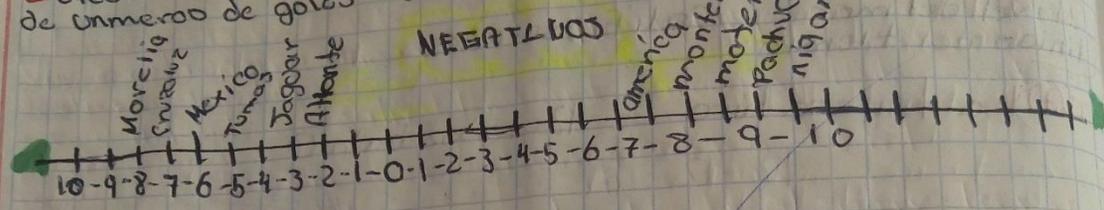
Tabla 2 Instrumento de evaluación

| Rúbrica para evaluar una investigación documental | | | | |
|--|--|---|---|--|
| Nombre del alumno o alumnos: _____ | | | | |
| CATEGORÍA | 4 Sobresaliente | 3 Notable | 2 Aprobado | 1 Insuficiente |
| Cantidad de información | El trabajo refleja una amplia diversidad de argumentos, puntos de vista y fuentes de información relacionados con la investigación. | El trabajo refleja cierta diversidad de argumentos, puntos de vista y fuentes de información relacionados con la investigación. | El trabajo refleja algunos argumentos, puntos de vista y fuentes de información relacionados con la investigación, pero también incluye otra información poco pertinente. | El trabajo refleja una cantidad insuficiente de información relacionada con la investigación. |
| Calidad de la información | Todas las fuentes de información son de alta calidad. | La mayor parte de las fuentes de información son de alta calidad. | Algunas fuentes de información son de alta calidad. | Pocas fuentes de información son de alta calidad. |
| Organización de la información | La información está muy bien organizada con párrafos bien redactados. | La información está organizada con párrafos bien redactados. | La información está organizada, pero los párrafos no están bien redactados. | La información proporcionada no está organizada. |
| Redacción | No hay errores de gramática, ortografía o puntuación. | Casi no hay errores de gramática, ortografía o puntuación. | Unos pocos errores de gramática, ortografía o puntuación. | Muchos errores de gramática, ortografía o puntuación. |
| Utilidad de la información | La información permite dar respuesta a todas las preguntas que surgieron a partir del problema. | La información permite dar respuesta a la mayoría de las preguntas que surgieron a partir del problema. | Con la investigación solo se da respuesta a algunas de las preguntas que surgieron a partir del problema. | Se carece de información para dar respuesta a las preguntas que surgieron a partir del problema. |
| Guía de investigación | Se realiza correctamente el llenado de la guía de investigación, además de que se usa como herramienta para realizar la investigación y se anexa a la investigación. | Carece de datos en el llenado de la guía de investigación. | Se entregó la guía de investigación después de tiempo. | Se entregó la investigación sin la guía de investigación anexada. |

TEMA

Atlante: 2 goles en contra, Veracruz: 4 goles a favor.

Ubica en la recta un número los jugadores en función de un número de goles a favor o en contra.



Anota el orden en que estarán los equipos en la siguiente tabla

Posición / Equipo

- 1º lugar
- 2º lugar
- 3º lugar
- 4º lugar
- 5º lugar
- 6º lugar
- 7º lugar
- 8º lugar

A) Anota el nombre que están a la misma distancia en lugar tercero

B) Si un equipo anotó 15 goles en contra cual es su resultado?
segundo cobo propios

Imagen | Resolución de problema realizada por un alumno

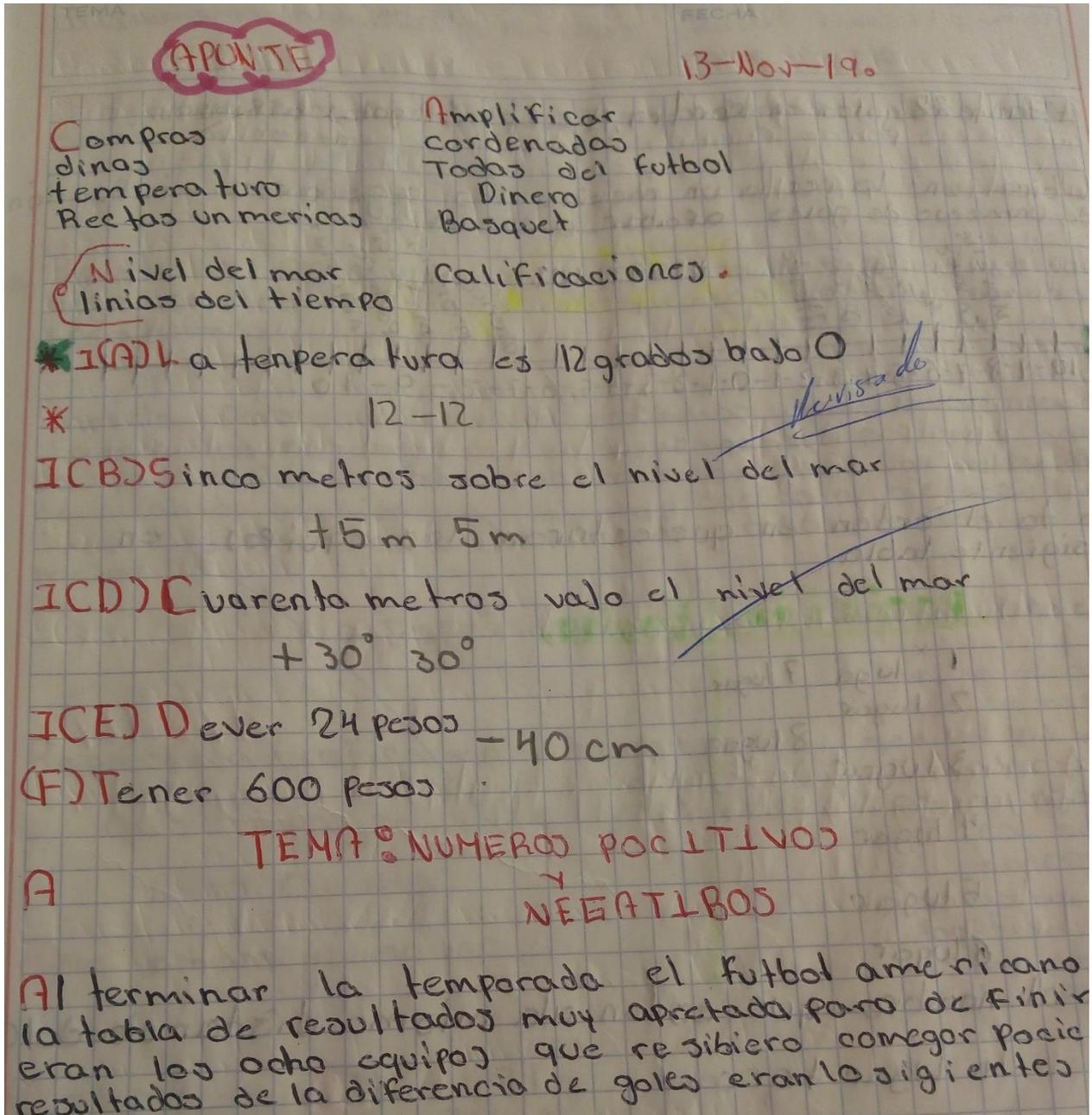


Imagen II Forma en que los alumnos representan numéricamente los enunciados

25-11-2019

'Suma de números Positivos y negativos'

Lina estaba viendo un partido de fútbol... el equipo que apoyaba abansó 6 llagas en una jugada... perdio 8 llagas en la siguiente jugada... Per dio otras 2 llagas en la siguiente jugada, Lina quiere saber cual fue el cambio total de su equipo en la posición del campo después de esas tres jugadas

a) ¿Cómo expresarías esta situación?
restando

b) ¿Cual fue el cambio total del equipo que apoyaba al mio?
fue el de lina

En un juego los equipos pierden un punto cada vez que su respuesta es incorrecta y ganan un punto si la respuesta es correcta... el equipo de maria tubo 8 errores al responder las preguntas y contesto correctamente 6 preguntas - contes puntos en total tubo el equipo de maria

tubo 2

Esta semana han sido las evaluaciones y pruebas finales de Santiago... en matematicas la escuela era la siguiente:

Exposicion 4.0 4.0

Examen 4.0 4.0

Investigacion 2.6

10.0

realizo una exposicion con su equipo y obtuvieron 3.5, en su examen tubo 1.7 en la investigacion tubo 3.2 pero perdio 8 decimos con su mal comportamiento... ¿cual fue la calificación de Santiago en matematicas?

R= 3.4

Imagen III Resolución de problemas, elaborada por alumnos

25-11-2019 Investigación

Se sitúa el cero en la mitad de la recta. Los positivos se representan a la derecha del cero y los negativos a su izquierda. Esta representación en la recta numérica nos sirve para poder comparar números enteros. ¿Es mayor el número colocado más a la derecha de la recta numérica?

Recta de fracciones

Para ubicar fracciones en la recta numérica se divide la unidad (entera) en segmentos iguales como indica el denominador y se ubica la fracción según indica el numerador como puedes observar las fracciones unitarias se ubican en el primer segmento de la recta numérica.

recta de decimales

Para ubicar números decimales en la recta numérica debes seguir los siguientes pasos 1- ubicar los números en el orden de menor a mayor, manteniendo la misma distancia entre dos números consecutivos - 2 Para ubicar los decimales se divide la distancia entre dos números consecutivos en la partes iguales.

recta de enteros

Los números enteros (\mathbb{Z}), se representan de la misma forma que los naturales pero también incluyen el ∞ entalo

Imagen IV Investigación acerca de la recta numérica, realizada por una alumna

Leyes de los siguientes signos de suma.

$$+ + + = +$$

$$- + - = +$$

$$- + + = \text{sum}$$

$$+ + - = \text{sum}$$

Si los signos son iguales se suman y se deja el mismo signo si los signos tienen signos distintos se resta x al resultado se le coloca el signo del número con mayor valor.

Leyes de los siguientes signos de resta.

$$+ + + = +$$

$$- + - = -$$

$$- + + = \text{sum}$$

$$+ + - = \text{sum}$$

Si los signos son iguales se suman y se deja el mismo signo si los signos tienen signo distinto resta x al resultado se le coloca el signo del número con mayor valor.

Imagen V Investigación acerca de la suma de números con signo, realizada por una alumna

de por que surgieron los numeros

$$D C = G P = G C$$

- Perdidos
 - Disminuciones
 - + Crecimientos
- divinos tabillas falsos
indios Acaos

En donde se encuentra los numeros negativos

uso

- compras
- dividas
- temperaturas
- rectos momentos
- Nivel de mar
- Lineas del tiempo

- Basketbol
- calificaciones
- Estatura
- Descuentos
- Espera de emba
- Juegos

- Altud de la tierra
- Amplificar o reducir
- coordenadas
- tablas en futbol
- dinero

Imagen VI Utilidad que los alumnos le dan a los números con signo

Hoja de firmas

Elaboró

Luz Angélica Trejo Rodríguez

Autorización

Mtro. Ulises Romero De la Cruz

Revisión

Lic. Miguel Ángel Anda Fuentes

Dra. Georgina Monroy Segundo

Dictaminó

Mtra. Luz Maria Serrano Orosco
Presidente del Comité de Titulación