ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

ENSAYO

LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES

QUE PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL PRESENTA:

ANA MARIA TERCERO GONZÁLEZ

ASESOR:
MTRO. EDGAR MARTÍNEZ GARDUÑO

SAN FELIPE DEL PROGRESO, JULIO DE 2020

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las Matemáticas representa uno de los objetivos fundamentales de la Educación Básica, pretende formar alumnos capaces de pensar lógicamente y al mismo tiempo desarrollar un pensamiento divergente al contar con una variedad de estrategias para encontrar soluciones a problemas planteados en contextos diferentes, que surgen en la vida cotidiana o en las propias matemáticas. Esto implica poner en práctica habilidades, conocimientos, actitudes y valores que favorezcan un aprendizaje significativo en el alumno. Sin embargo, en diferentes momentos se presentan obstáculos y dificultades que deben superarse para obtener resultados en el aprendizaje de manera satisfactoria.

El tema de estudio "Los modelos matemáticos en la enseñanza de ecuaciones lineales" se ubica en la línea temática 2 del Documento Orientaciones Académicas para la Elaboración del Documento Recepcional denominada: Análisis de las experiencias de enseñanza, tiene la intención de implementar una propuesta didáctica que favorezca el desarrollo del enfoque Pedagógico el cual considera la resolución de problemas como una meta y un medio de aprendizaje de contenidos matemáticos al mismo tiempo fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio, a partir de la aplicación de modelos matemáticos como estrategia para resolver problemas que pueden modelarse con ecuaciones lineales.

Las Matemáticas como ciencia formal se caracterizan por ser abstractas que implica obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, tienen un papel formativo en el desarrollo intelectual del alumno y contribuye al desarrollo del pensamiento lógico matemático. La construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta de los objetos, se desarrolla a partir de las aproximaciones de la realidad en la realización de tareas y la resolución de problemas particulares, la modelación matemática muestra la relación existente entre la realidad y la Matemática.

El desarrollo de la habilidad de modelado matemático resulta significativo en el aprendizaje de las matemáticas aporta elementos en la formación del alumno para resolver e interpretar problemas, así mismo, situaciones de la vida diaria para lo cual se requiere un nivel de comprensión en los procesos matemáticos y del razonamiento matemático. El objetivo de construir un modelo matemático es lograr que los estudiantes comprendan el contexto en el que se encuentra el problema a partir de ello, capturen los elementos clave que sean insumos para expresar mediante símbolos matemáticos una versión abstracta de la realidad.

En ese sentido, el papel del docente en la enseñanza resulta importante, le corresponde seleccionar y adecuar los problemas que resolverán los estudiantes, asimismo organizar el trabajo para propiciar el proceso de aprendizaje de sus alumnos para coadyuvar en el logro de los propósitos en la educación básica, el cual menciona que los "estudiantes identifiquen, planteen, y resuelvan problemas, estudien fenómenos y analicen situaciones y modelos en una variedad de contextos" (SEP, 2017, p.161).

El propósito de esta propuesta es aplicar un modelo matemático concreto que contribuya a la comprensión del algoritmo empleado para la resolución de ecuaciones lineales, despertar su interés en donde perciba a la matemática como un modelo explicativo de la realidad, el estudiante toma un papel central en los procesos desarrollados en el espacio escolar. Se toma en consideración un aprendizaje basado en el constructivismo, a partir de la realización de actividades en donde se relacionen conceptos y métodos indispensables en la resolución de problemas, en ese sentido, se debe aprender matemáticas comprendiéndolas y construyendo de manera activa el conocimiento teniendo en cuenta los saberes previos y asimilándolo para lograr un aprendizaje.

El presente ensayo se conforma de 3 apartados cada uno con características propias que le dan sentido al documento. En la primera parte el tema de estudio, en el cual se pretende analizar y comprender los modelos matemáticos orientados a la enseñanza de ecuaciones lineales, la resolución de problemas matemáticos así como las dificultades en este proceso, a partir de lo anterior se propusieron 4 preguntas que orientan el desarrollo del documento para lo cual se apoyan de autores como Simón Mochón que describe el proceso para la elaboración de modelos matemáticos y los tipos de representaciones útiles para la resolución de problemas matemáticos. Como parte final, se describe el contexto escolar en donde se identificó el tema de estudio y las características del grupo de estudio.

En el segundo aspecto desarrollo del tema, es la parte medular del documento, se compone de 3 capítulos en donde se expone y argumenta para dar respuesta a las interrogantes planteadas en el tema de estudio. El primer capítulo se denomina “Enseñanza de ecuaciones lineales a través de modelos matemáticos”; se desarrollan los tipos de modelos matemáticos relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, la importancia del desarrollo de habilidad del modelamiento matemático.

En el capítulo II “Resolución de problemas matemáticos que impliquen el uso de ecuaciones lineales” se describen el proceso para la resolución de problemas por el Método de los 4 pasos, se presentan problemas de la vida cotidiana que se modelan con ecuaciones lineales, al mismo tiempo, se analizan las dificultades y errores que imposibilitan la construcción de un modelo matemático.

Finalmente, en el capítulo III “Impacto de los modelos matemáticos en la enseñanza de ecuaciones lineales” se da cuenta de los resultados obtenidos con la aplicación de la propuesta en la escuela secundaria, se analiza el proceso seguido por los estudiantes en la generación de modelos y su eficacia en el aprendizaje del contenido.

TEMA DE ESTUDIO

Descripción del tema de estudio

El enfoque Pedagógico que sugiere el Plan y Programa de Estudios 2017 para la Educación Básica, Aprendizajes Clave, enfatiza que la resolución de problemas es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio; para ello es indispensable que el alumno desarrolle habilidades para el aprendizaje de la misma; en atención a ello y a partir de lo observado durante el trayecto formativo en la Escuela Normal, se identifica una de ellas que es el Modelamiento Matemático, dando el insumo para la selección del tema de estudio en el presente ensayo.

Al identificar esa área de oportunidad en los alumnos de la escuela secundaria asignada durante el séptimo y octavo semestres, se atiende al tema de estudio denominado: "*Los modelos matemáticos como estrategia para la enseñanza de ecuaciones lineales"*, que se refiere a un proceso metodológico cuya intención es favorecer en los estudiantes de la escuela secundaria la aplicación de conocimientos matemáticos a situaciones relacionadas con el contexto, y desarrollar habilidades del pensamiento implícitas en el proceso de modelamiento matemático.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orienta a cumplir con los propósitos para la educación básica establecidos en el Plan de estudios 2017, Aprendizajes Clave, se pretende que los adolescentes:

1. Conciban a las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos.
2. Adquieran actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas.
3. Desarrollen habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.

El trabajo que desarrollan los estudiantes en el aula de clase, así como las interacciones que se generan entre compañeros y docente son fundamentales para propiciar un aprendizaje significativo en matemáticas, con frecuencia se tiene la concepción de las Matemáticas como una ciencia formal y abstracta sin aplicabilidad en la vida cotidiana cuando en realidad se relaciona con otras disciplinas del conocimiento como biología, física, química, ciencias sociales entre otras que facilitan el análisis de situaciones diversas.

Con la intención de aclarar el tema elegido, un modelo matemático de algún fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías (Biembengut & Hein, 2004).

Un aspecto importante de la actividad matemática consiste en plantear y resolver problemas a través de diversas estrategias mismas que se concretizan en la obtención de un modelo matemático, el cual representa los objetos matemáticos que intervienen en el problema planteado, muestra la relación que existe entre las variables e incógnitas para posteriormente aplicar un algoritmo y dar solución al problema.

Para la elaboración de un modelo matemático es necesario llevar a cabo un proceso cognitivo denominado *modelización matemática* en el cual interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. Este proceso atiende las cinco fases siguientes: (D. Godino, 2003).

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Es indispensable llevar a cabo los pasos mencionados para incidir de manera significativa en el aprendizaje del estudiante, sin embargo, en la clase de matemáticas con frecuencia nos apresuramos a llegar a los pasos 3 y 4 (las “verdaderas” matemáticas) con lo que impide al alumno apreciar la relación entre la matemática y la realidad así como la aplicabilidad y limitantes en las matemáticas (D. Godino, 2003). Dejando a un lado los pasos 1 y 2 en donde los estudiantes toman un papel central en su proceso de aprendizaje, identifican en su contexto la problemática a estudiar, a través de la descripción del mismo.

El propósito de construir un modelo es lograr una mayor comprensión por parte de los estudiantes para la resolución de un problema matemático, se busca establecer una vinculación entre la realidad y el problema que se está modelando con el objetivo de que el aprendizaje sea significativo, además se pretende que el estudiante desarrolle diversas habilidades mismas que intervienen en la construcción del modelo matemático (Camarena, 2011).

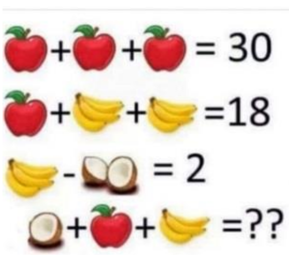
- Habilidad para identificar los puntos de control de error: Esta habilidad es de tipo metacognitivo y forma parte de una matemática conceptual.
- Habilidad para transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa: Implica decodificar los signos presentes en el problema matemático y expresarlo en lenguaje algebraico.
- Habilidades para aplicar heurísticas: Las heurísticas como estrategias para abordar un problema, con la clasificación que otorga Newell- Simón (como se citó en Nickerson, 1989) como lo es realizar inferencias acerca de los estados inicial y final, descomponer un problema en subproblemas, el método de prueba indirecta entre otros. Por su parte Polya (1989) considera que son procedimientos para variar el problema por ejemplo el descomponer y recomponer el problema, introducir elementos auxiliares, utilizar medios como la generalización, la particularización y el empleo de analogías.
- Habilidad para transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático: Se consideran las representaciones que describe Duval: aritmética, algebraica, analítica y visual incluyendo la representación contextual.

Durante el proceso de modelización se pretende que el estudiante desarrolle las habilidades antes mencionadas, mismas que permitirán la construcción del modelo matemático; en este proceso el docente actuará como un guía quien, a través de diversas estrategias, facilitará al estudiante los medios para la resolución del problema planteado, aplicando modelos matemáticos.

El tema de estudio se identificó durante las prácticas de observación en la Escuela Secundaria Oficial no. 0608 “Heriberto Enríquez” en alumnos de primer y segundo grados, al observar que las dificultades presentadas en el aprendizaje de las Matemáticas se encuentran en la comprensión y utilidad de los conceptos matemáticos, principalmente cuando se encuentran fuera del contexto escolar, es en donde el estudiante no cuenta con las herramientas necesarias para aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela secundaria.

Como evidencia se presenta el diagnóstico aplicado en alumnos de primero y segundo grados con el objetivo de realizar un análisis procedimental de los resultados obtenidos, de igual manera los modelos aritméticos y/o algebraicos empleados por los estudiantes y su incidencia en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones lineales.

En la primera pregunta se les presentó la siguiente imagen



Para los estudiantes no representó mayor dificultad considerando que pudieron visualizar de manera concreta el valor de cada incógnita y por consecuencia obtener el resultado correcto. Mientras que para las siguientes preguntas los estudiantes mostraron mayores dificultades:

2.- La base de un rectángulo es el doble que su altura ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

Los estudiantes de ambos grados recurrieron al uso de métodos aritméticos, algunos por ensayo y error para obtener las dimensiones del rectángulo tomando en cuenta que el valor del perímetro es una cantidad pequeña, situación que favoreció la realización de los cálculos correspondientes. Para aquellos alumnos que obtuvieron un resultado incorrecto se observó que se debe a la falta de comprensión del problema, ausencia de conceptos, confusión entre fórmulas (área y perímetro) y errores procedimentales.

Con respecto a la pregunta 3: Tres hermanos se reparten $1300. El mayor recibe el doble que el mediano y este el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

Métodos de solución

Alumno 1	Alumno 2
Hermano mayor: $860	Hermano mayor: $800
Hermano mediano: $433	Hermano mediano: $400
Hermano menor: ?	Hermano menor: $100

En las respuestas obtenidas se puede dar cuenta que el alumno 1 ha comprendido parcialmente el problema, identifica las variables presentes en el mismo y las relaciona con la operación correspondiente, pero no logra obtener la cantidad que le corresponde al hermano menor.

Mientras que el alumno 2 obtuvo una respuesta correcta empleando sólo métodos aritméticos, aunque no logra plantear una ecuación. Al presentar este tipo de problemas, la mayoría de los estudiantes recurre a la aritmética como estrategia para la resolución de ecuaciones lineales, mientras que para problemas con un grado mayor de complejidad y empleando coeficientes de números fraccionarios, los estudiantes se bloquean y no saben qué estrategia deben aplicar.

En este apartado el estudiante ve la necesidad de aplicar un método o algoritmo para la resolución de ecuaciones lineales, siendo el papel del docente pieza fundamental para la construcción de dichos conocimientos, guiará las actividades de aprendizaje hacia la consolidación conceptos y procedimientos y propiciará los ambientes de trabajo en el aula de clase, recurriendo a actividades diversas.

En los resultados obtenidos del diagnóstico se muestran las dificultades que el estudiante presenta al momento de resolver un problema matemático, evidencian la falta de comprensión de conceptos matemáticos mismos que imposibilitan la aplicación de alguna estrategia para la solución del mismo, considerando que los problemas planteados deben vincularse con el contexto del estudiante.

Con el uso del modelaje de situaciones concretas de la vida cotidiana se pretende dar significado a conceptos y métodos matemáticos apreciando su aplicabilidad en diversos contextos no solo el escolar, María Aravena (1974), señala las razones para incluirla en las actividades matemáticas: las aplicaciones como motivación, como elementos culturales y como forma de evitar aprendizajes incorrectos.

Cuando los estudiantes se enfrentan a las tareas de aprendizaje propuestas por el docente es importante despertar el interés por el aprendizaje de las matemáticas, una actitud favorable persuadirá al estudiante para el estudio de la misma y propiciará su participación en las actividades de aprendizaje. Los instrumentos que permitieron analizar el trabajo docente realizado en el aula de clase fueron: observación, diario, fotografías, seguimiento mediante listas de cotejo y rúbricas.

Con la aplicación de la propuesta didáctica en la escuela secundaria se pretende coadyuvar en la consolidación de las competencias que definen el perfil de egreso del docente que se componen de 5 campos: habilidades intelectuales específicas, dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria, competencias didácticas, identidad profesional y ética, y capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela. Teniendo en consideración lo anterior será necesario reflexionar sobre los procesos de enseñanza realizados en la escuela secundaria y en la mejora continua la práctica docente y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes.

Preguntas centrales

Las preguntas centrales que guían el proceso de investigación del tema de estudio se enuncian a continuación:

- ¿Cuáles son las implicaciones de recurrir al modelamiento matemático como estrategia de enseñanza?

Al implementar el modelamiento matemático en la enseñanza de ecuaciones lineales se pretende que el estudiante desarrolle diversas habilidades y estrategias para la resolución de problemas no solo en el contexto áulico sino también fuera de la institución. Modelar una situación de la vida cotidiana en base a un problema implica desarrollar estrategias ya sea a nivel concreto o gráfico, argumentar la solución obtenida y validar los resultados, para posteriormente comunicarlos en términos matemáticos.

- ¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que promuevan el desarrollo de habilidades del modelamiento matemático?

Se orienta el desarrollo de la habilidad del modelamiento matemático a partir del planteamiento y resolución de problemas. La idea principal del modelamiento es la creación de un modelo, que representa de forma simplificada la realidad. Durante este proceso se toman en cuenta solamente aspectos relevantes que ayudan a responder una pregunta hecha con respecto al problema real dando solución al problema planteado.

- ¿Cuáles son las dificultades u obstáculos de aprendizaje que se generan por la falta de estrategias y/o métodos formales para la resolución de problemas matemáticos?

Dificultades para el aprendizaje y resolución de problemas matemáticos:

- La falta de comprensión de problemas y ausencias de procesos de meta cognición.
- La estructura del problema planteado.
- La presencia de símbolos matemáticos (literales, incógnitas) sustituyendo números concretos.

- ¿Cómo interfiere la falta de situaciones concretas en la construcción de un modelo matemático para la resolución de problemas matemáticos?

Se tomará en cuenta la estructura de un problema matemático y su aplicación en situaciones contextualizadas para favorecer la construcción de un modelo matemático a través de situaciones concretas que le den significado.

Referentes empíricos y teóricos

La resolución de problemas

La resolución de problemas es una tarea de gran relevancia en el aprendizaje de esta disciplina, permite al alumno desarrollar diversas habilidades que contribuyen al desarrollo de un pensamiento matemático aplicable a diversos contextos de la vida cotidiana. Polya (como se citó en Santos, 1997) menciona que tener un problema significa buscar conscientemente una acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. Los problemas que se planteen al estudiante tendrán la función de generar un conflicto cognitivo en él para la búsqueda de una solución a la problemática.

Fredericksen (1984) sugiere tres categorías para la clasificación de problemas:

1. Problemas bien estructurados son aquellos que se pueden resolver con la aplicación de un algoritmo conocido, con criterios para poder verificar la solución obtenida.
2. Problemas estructurados, para este tipo de problemas el alumno requiere ser competente para diseñar un plan y deducir el método eficaz para validar sus resultados.
3. Problemas mal estructurados, hacen referencia a situaciones de la vida cotidiana aplicables a áreas específicas del conocimiento, en este caso no existe un procedimiento que garantice la solución de dicho problema, implica desarrollar diversas estrategias.

Los primeros son los problemas que comúnmente se plantean a los estudiantes al desarrollar un contenido matemático, por lo tanto, cuentan con las herramientas necesarias y el algoritmo necesario para obtener la solución, mientras que en los problemas estructurados el estudiante buscará que estrategia implementar.

La resolución de problemas mediante el método de Polya

En cada uno de los pasos se pretende dar a respuesta a las siguientes preguntas:

- Entendimiento del problema: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?,¿Es insuficiente? ¿Redundante?, ¿Contradictoria?
- Diseño de un plan: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- Ejecución del plan: Compruebe cada uno de los pasos. ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?
- Examinar la solución obtenida: ¿Puede usted verificar, el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?

Schoenfeld sugiere que para entender como los estudiantes resuelven problemas es necesario proponer planteamientos en diversos contextos y considerar categorías en la instrucción matemática, considera que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:(i) Dominio del conocimiento o recursos, (ii) estrategias cognitivas métodos heurísticos, (iii) estrategias metacognitivas, y (iv) sistema de creencias (Santos, 1997).

Los conocimientos previos que posee el estudiante serán fundamentales para poder avanzar en el desarrollo del algoritmo correspondiente, por ejemplo, para la resolución de un problema escrito en lenguaje algebraico será necesario tener la habilidad para poder decodificar los signos presentes en el problema y poder enunciar la solución, es aquí en donde el estudiante interpretará los datos obtenidos.

Estos aspectos permitirán al alumno resolver un problema o en su caso serán un obstáculo para su aprendizaje. Los obstáculos según Brousseau (1983) son “un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro” (p. 190). Un obstáculo se manifiesta a través de la acumulación de errores inmersos en el proceso de aprendizaje, cuya procedencia no sólo es de tipo cognitivo sino también se originan a partir de causas epistemológicas, es decir las limitaciones para la construcción del conocimiento científico; didácticas que provienen de los métodos de enseñanza y ontogenéticas que se originan por las concepciones del estudiante, se manifiestan en la carencia de conocimientos previos y la aplicación adecuada de estrategias de aprendizaje.

En cuanto a los obstáculos para el aprendizaje de las matemáticas se encuentran aquellos relacionados con el nivel de complejidad de la actividad de aprendizaje, así mismo, el ambiente de trabajo generado en el aula de clases. Con frecuencia ocurre que los estudiantes de secundaria, pueden aplicar un método para solucionar un problema, pero cuando la estructura del mismo cambia no logran identificar cual será el nuevo método de solución. Para ello, es indispensable que el alumno sea competente y desarrolle habilidades de modelamiento matemático que le permita seguir un algoritmo e interpretar los resultados obtenidos.

Modelos matemáticos

El trabajo con modelos matemáticos en la escuela secundaria como estrategia metodológica en la enseñanza, pretende desarrollar en los estudiantes habilidades para la resolución de problemas matemáticos, la comprensión de conceptos matemáticos mediante la vinculación de las matemáticas con el contexto del estudiante, para ello es indispensable modelizar situaciones reales.

> Por lo tanto, ofrecer situaciones concretas permite organizar e interpretar información y datos; describir relaciones matemáticas; enfrentar problemas con soluciones múltiples; entender la aplicabilidad de los conceptos y procesos; analizar e interpretar problemas a través de la matemática; entender nuevas ideas; incorporar conocimientos; asimilar información, y adaptarse a los cambios tecnológicos y científicos (Aravena, 2008, p.53).

Para el estudiante la enseñanza de las matemáticas se ve descontextualizada de su vida cotidiana, por lo tanto, su aprendizaje solo se sintetiza en la memorización de conceptos y algoritmos sin llegar a la comprensión de los mismos, cuando en realidad está presente en diversos aspectos de la vida cotidiana. Para ello, se retoma la idea propuesta en los años 70 por Freudenthal, quien impulsó la Educación Matemática Realística, teoría que se caracteriza por dos ideas fundamentales:

- Las matemáticas, que han de tener un valor humano, deben estar conectadas con la realidad, ser cercanas a los alumnos y con valor relevante en la sociedad.
- La educación matemática no debe presentar las matemáticas como un sistema cerrado sino como una actividad, como un proceso de matematización.

La primera idea recoge claramente una de las bases de la modelización, conectar las matemáticas que estudian nuestros estudiantes con su propia realidad y trabajar en contextos cercanos al alumno relacionados con su entorno diario. La segunda plasma la convicción de que los estudiantes deben ir descubriendo las matemáticas por ellos mismos (guiados por el profesor) encontrando su utilidad en la vida diaria (Sierra & Joan, 2011).

En el proceso involucrado para la obtención del modelo matemático Biembengut (1999) refiere que el modelador (estudiante) debe tener una dosis significativa de intuición- creatividad para interpretar el contexto, discernir que contenido matemático se adapta mejor y sentido lúdico para jugar con las variables involucradas. En el siguiente esquema se puede observar la relación que existe entre la realidad y las matemáticas, el modelo es el medio para vincularlos.

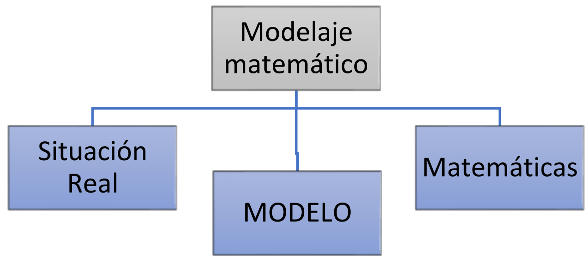


Grafico 1: Relación entre las matemáticas y la realidad.

Estrategia didáctica

En los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase, el docente como guía para la construcción y el logro de aprendizajes significativos de los estudiantes, debe interpretar los hechos que ocurren día a día en el salón de clases, analizar y reflexionar sobre una mejora en su práctica docente. Díaz (2002) menciona que las estrategias de enseñanza son "procedimientos que el agente de enseñanza utiliza en forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos (…) son medios o recursos para prestar ayuda pedagógica" (p.4).

El docente debe considerar 5 aspectos para la aplicación de una estrategia en la enseñanza de un contenido como:

1. Consideración de las características generales de los aprendices (nivel de desarrollo cognitivo, conocimientos previos, factores motivacionales, etcétera).
2. Tipo de dominio del conocimiento en general y del contenido curricular en particular, que se va a abordar.
3. La intencionalidad o meta que se desea lograr y las actividades cognitivas y pedagógicas que debe realizar el alumno para conseguirla.
4. Vigilancia constante del proceso de enseñanza (de las estrategias de enseñanza empleadas previamente, si es el caso), así como del progreso y aprendizaje de los alumnos.
5. Determinación del contexto intersubjetivo (por ejemplo, el conocimiento ya compartido) creado con los alumnos hasta ese momento, si es el caso (Barriga, 2002, p.4).

Una vez que el docente tiene claro lo anterior diseñará la estrategia que más se ajuste a los intereses y necesidades de sus alumnos.

Ecuaciones lineales

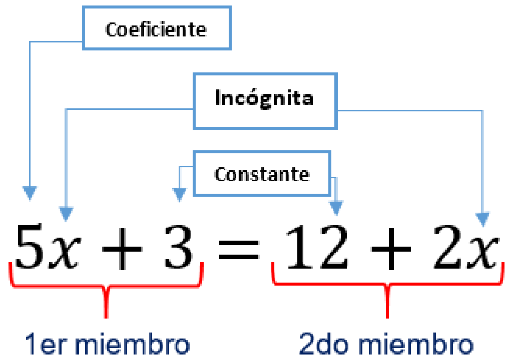
El concepto de igualdad

D. Godino (2003) menciona que un signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo. Según la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad numérica se obtienen diferentes tipos de igualdades:

- Si en la igualdad aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables, se dice que se trata de una *identidad*: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- Si la igualdad es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se dice que se trata de una ecuación: $a + 3 = 7$
- La igualdad se usa también para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, hablándose en este caso de una fórmula: e = 1/2gt2.

El concepto de ecuación

Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud. También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real. Las ecuaciones están formadas de la siguiente manera:



La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla. El álgebra es una de las ramas de las Matemáticas en la cual las operaciones se generalizan empleando números, letras y signos que representan simbólicamente un objeto matemático. Por lo anterior, su estudio en educación secundaria presenta errores y dificultades en el aprendizaje de conceptos y el desarrollo eficaz de algoritmos. El error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta especifica de conocimiento o de un despiste.

- *Dificultad para dar significado a una letra*

Uno de los errores que el estudiante comete al resolver una ecuación es que no logra identificar o asignar una variable distinta a **x** ante ello utiliza la misma letra para representar los datos del problema, aunque se traten de cantidades diferentes. Según Ángel Gutiérrez (1995) los estudiantes operaban las letras con varios significados, que reflejaban un progreso en su comprensión, hasta llegar finalmente a una comprensión matemáticamente concreta:

1. Letras evaluadas: Se consideran como marcas de posición de números concretos.
2. Letras ignoradas: Cuando se plantean problemas más complejos los estudiantes pueden llegar a omitir e ignorar las letras presentes en el problema.
3. Letras como objetos: se considera a las letras como una abreviatura del nombre del objeto o como el objetivo mismo. En este caso su uso es frecuente en problemas relacionados con el cálculo del perímetro y área de figuras geométricas, el estudiante relaciona las literales como una manera de abreviar las formulas correspondientes.

Esto permite introducirlos al álgebra y formar el concepto matemático de ecuación.

4. Letras como incógnitas específicas: una letra representa un número partiendo de un conocido, en donde el estudiante puede operar con ella.
5. Letras como número generalizador: Ahora las letras pueden representar varios valores numéricos desconocidos y no sólo uno.
6. Letras como variables: Las letras representa conjuntos indefinidos de números, de manera que hay una relación con los diferentes conjuntos que aparecen en la experiencia algebraica.

- *Dificultad para pasar del lenguaje común o verbal al lenguaje algebraico.*

En la resolución de un problema concreto es necesario traducir una expresión verbal o lenguaje común al lenguaje algebraico, en esta transición los estudiantes presentan diversos errores, uno de ellos es que no relacionan palabras de lenguaje cotidiano con operaciones que implican (adición, sustracción, cociente y producto). Cuando se requiere utilizar signos de agrupación como los paréntesis para representar una operación y expresar una cantidad, algunos alumnos omiten el uso del paréntesis por lo que al operar se confunden como sumar o restar. Otro error común es la falta de comprensión del enunciado del problema lo que imposibilita aplicar una estrategia de resolución.

- *Dificultad para realizar operaciones con números reales y aplicar las propiedades que se utilizan en la solución de ecuaciones.*

Para resolver una ecuación es necesario que el estudiante domine y aplique las reglas o propiedades de los números, por ejemplo, en la propiedad distributiva y asociativa de la multiplicación, un error que se ha observado es que únicamente se efectúa el primer producto como lo indica la propiedad distributiva omitiendo el producto del otro factor obteniendo un resultado incorrecto.

Con lo anterior, se ejemplifica que no se ha consolidado dicho conocimiento por consiguiente la comprensión del algoritmo ha sido parcial. En la transición de la aritmética al álgebra la interpretación del signo igual cambia, lo cual genera un conflicto cognitivo en los estudiantes, en la aritmética “El signo = enlaza una serie de operaciones aritméticas con su resultado… un segundo significado que tiene el signo = para los estudiantes es el de conectar dos expresiones en las que se deben realizar acciones similares" (Gutiérrez, 1995, p.15). Con respecto a la aplicación de las reglas y leyes de los signos el error se presenta en el uso correcto de los mismos o en su caso se dominan, pero carecen de significado y sentido.

- *Dificultad para interpretar los resultados obtenidos*

Cuando se aplica correctamente el algoritmo se obtiene el valor numérico para cada incógnita, la dificultad se presenta para interpretar esos datos e identificar la relación que existe entre ambos.

Contexto escolar

Las prácticas se desarrollaron en la Escuela Secundaria Oficial no. 0608 "Heriberto Enríquez", ubicada en la comunidad de San Pablo Tlalchichilpa municipio de San Felipe del Progreso. La escuela se localiza en el centro de dicha comunidad, el contexto es rural la mayoría de los estudiantes que asisten a la escuela proviene de comunidades cercanas como San Francisco, Santa Cruz, Tlalchichilpa, Barrio la Era, el Obraje.

La matrícula de la escuela es de 213 alumnos, cuenta con instalaciones suficientes para el desarrollo de actividades didácticas (sala de cómputo, telemática, biblioteca, edificios para cada salón y perímetro delimitado). En cuanto al aprovechamiento escolar y de acuerdo a la aplicación de diagnósticos, se detectó que las asignaturas que requieren mayor atención son español y matemáticas. El promedio alcanzado en el ciclo escolar anterior fue de 8.0 dando a conocer que se alcanzaron los objetivos de aprendizaje, sin embargo, se requiere un acompañamiento más cercano para mejorar los logros de aprendizaje.

En tanto al nivel socioeconómico los alumnos pertenecen al medio-bajo, la mayoría de sus padres emigran a otras ciudades en busca de trabajo, por lo que se identifica que el acompañamiento a sus hijos no es suficiente para estar al tanto de su aprovechamiento. Aunque el nivel de participación de los tutores es alto, la mayoría de sus abuelitos o parientes cercanos son quienes tienen la responsabilidad directa para atenderlos.

Contexto grupal

La propuesta de intervención se aplicó en ambos grupos de primer grado los cuales se componen de 35 estudiantes, el primer grado grupo "A" está compuesto de 16 mujeres y 19 hombres, mientras que el grupo “B” se compone de 17 mujeres y 18 son hombres. Las razones que orientaron la elección de estos grupos fueron la disponibilidad y carga horaria para la realización de las actividades propuestas, considerando la presencia del contenido a desarrollar en el plan de estudios 2017, un aspecto que resulto favorable fue que los estudiantes mostraban una actitud positiva hacia el estudio de las Matemáticas.

La forma de trabajo al inicio de la sesión fue de manera individual, que consistía en la resolución de un cálculo matemático como actividad para iniciar bien el día, posteriormente se trabajaba en parejas o en su caso en equipo de 4 a 5 estudiantes, situación que facilitaba la revisión de las actividades asimismo se contaba con un alumno monitor para cada grupo de trabajo, lo anterior dependiendo del tipo de actividad a desarrollar.

CAPITULO I

ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES A TRAVÉS DE MODELOS MATEMÁTICOS.

Un modelo matemático es “una construcción matemática abstracta y simplificada relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito particular” (Dirac, s.f, p.2). En el estudio de las Matemáticas en la escuela secundaria la elaboración de modelos es una actividad frecuente realizada por los estudiantes que debido a la complejidad de los conceptos y variables que intervienen para la elaboración del mismo, resulta una tarea difícil de afrontar. Es por ello que se pretende incidir de manera satisfactoria en el aprendizaje de los alumnos, partiendo de la resolución de problemas a través del uso de modelos matemáticos, enfocándose al tema de Ecuaciones lineales.

Un modelo puede ser formulado en términos familiares tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos, o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etcétera (Biembengut & Hein, 2004). Las diversas representaciones que el estudiante hace del objeto matemático serán producto de la actividad cognitiva del estudiante.

El modelaje matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje será un medio para despertar el interés en los estudiantes por el estudio de las Matemáticas, una manera diferente de aprender conceptos y algoritmos de esta disciplina, como lo afirma Biembengut (2004) “la escuela es un ambiente indicado para la creación y evolución de modelos pues esta forma, se le ofrece a los alumnos la oportunidad de estudiar situaciones-problema, a través de investigación, desarrollando su interés y agudizando su sentido crítico” (p. 107).

Al emplear el modelaje matemático como estrategia de enseñanza “es necesario saber, a priori, el tiempo disponible para el trabajo extra-clase, el número de horas de clases del curso en cuestión y el conocimiento matemático común a todos los participantes” (Biembengut & Hein, 2004, p. 124). Considerando lo anterior es posible introducir a los estudiantes en el proceso de modelaje matemático.

Se optó por una forma de trabajo por equipos de tres a cuatro estudiantes considerando lo establecido en el enfoque del Plan y Programa de estudio 2017, Aprendizajes clave el cual

> Considera relevante la interacción social del aprendiz, plantea la necesidad de explorar nuevas formas de lograr el aprendizaje que no siempre se han visto reflejadas en las aulas (…) en esta perspectiva se reconoce que el aprendizaje no tiene lugar en mentes aisladas de los individuos, sino que es resultado de una relación activa entre el individuo y una situación, por eso el conocimiento tiene, además, la característica de ser “situado”. (p.37)

Gómez (2011) ha considerado que debía de existir una guía didáctica del profesorado, especifica cuáles son los objetivos que los alumnos deberían alcanzar a través de la modelización y los diferentes puntos que se han de tener en cuenta a la hora de poner la actividad en marcha.

- Presentación del problema que se quiere estudiar: buscar preguntas que despierten el interés de los alumnos sobre el tema a tratar, para, a continuación, presentar los problemas que se plantean en las prácticas, relacionándolos con las preguntas que se les han realizado.
- Organización de la actividad: se cuenta a los alumnos cómo se va a llevar a cabo la actividad, en grupos reducidos de dos o tres personas como máximo, donde una parte del trabajo se realizará en sesiones colectivas dentro del horario escolar y otra parte, fuera de este horario.
- Recursos con los que cuentan los alumnos: en este trabajo los alumnos van a tener que buscar información y para ello, tendrán que utilizar todos los recursos que encuentren a su alcance, como internet, revistas, facturas.
- Metodología: Es un trabajo en grupo, como se ha comentado anteriormente, donde contarán con la ayuda del profesor. El trabajo se divide en tres partes: una, el seguimiento del guion de prácticas, familiarizándose con el lenguaje empleado, así como entendiendo cada tabla o cada resultado obtenido; dos, creación de un trabajo escrito, donde se mostrará el tipo de investigación y el modelo que han empleado; y, por último, una exposición oral del trabajo.
- Evaluación de las prácticas: a partir de la plantilla de evaluación, de la que hablaremos en los párrafos siguientes.

1.1 Clases de modelos matemáticos

La noción de modelo es relativa, por lo tanto, su clasificación dependerá del área de aplicación en las diversas ciencias, por su parte en educación matemática la finalidad de la utilización de modelos es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, Gagatsis y Patronis (1990) distingue tres tipos de modelos:

- Modelos concretos, que presentan una idea matemática mediante un objeto tridimensional.
- Modelos pictóricos, que representan ideas matemáticas mediante diagramas o ilustraciones.
- Modelos simbólicos, que representan estructuras matemáticas por medio de un sistema de símbolos y reglas específicas, comúnmente aceptadas, que comprenden conceptos, operaciones y relaciones.

Para la enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria el docente puede recurrir al uso de algún modelo matemático antes mencionado, considerando el aprendizaje clave indicado en el plan y programa además de las implicaciones que cada modelo presenta al momento de implementarlo en el aula de clase. Con referencia a la enseñanza de ecuaciones lineales en primer grado, el aprendizaje clave es el siguiente: resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales. En atención a ello, se diseñó una propuesta didáctica basada en el uso de modelos matemáticos.

- ❖ MODELOS PICTÓRICOS

Este tipo de modelo se apoya del uso de diagramas e ilustraciones que permiten generar una representación gráfica del objeto matemático, el estudiante recurre a la visualización como “un medio para llegar a la comprensión o resolución. Trata de expresar alguna propiedad especifica de algún concepto o alguna relación importante para la resolución de un problema a través de un diagrama, un dibujo o una gráfica” (Rico & Encarnacion, 2000, p. 98).

Para abordar el contenido de ecuaciones lineales en la escuela secundaria en la primera sesión se les proporcionó a los estudiantes un reto matemático que consistía en encontrar el valor de cada imagen, a partir del análisis y resolución de cada una de las operaciones involucradas.

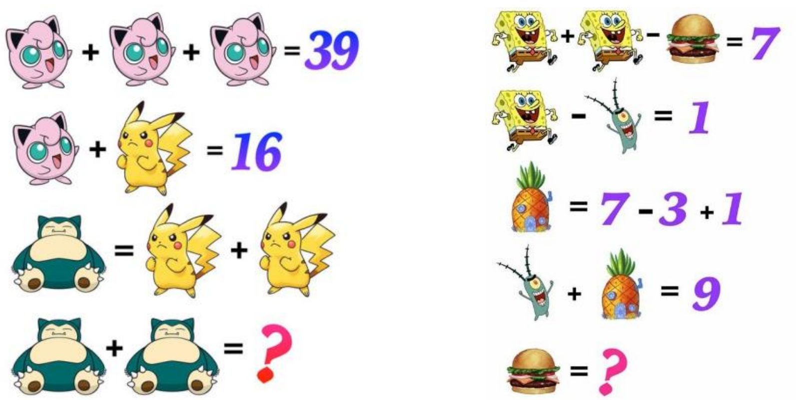


Grafico 2 : Ejemplo de retos matematicos

En la actividad para iniciar bien el día, los estudiantes de primer grado grupo “A” mostraron habilidad para resolver el ejercicio propuesto por la docente en formación, manifestaron agrado e interés por obtener la solución debido a que las ilustraciones correspondían a caricaturas de su agrado. Al recurrir a este tipo de ejercicios en la enseñanza se empieza a introducir a los estudiantes al concepto de ecuación como la igualdad que existe entre dos expresiones algebraicas, en este caso la adición o sustracción de los valores obtenidos de cada ilustración (personaje).

- ❖ MODELOS CONCRETOS

Este tipo de modelo se apoya de una representación con objetos de nuestra cotidianeidad, es decir de objetos tridimensionales, cuyo objetivo es poder modelizar objetos matemáticos a partir de algún medio físico.

> El modelo concreto tiene aquí una doble función: por un lado, justifica el comportamiento de la noción aritmética (…) Por otro lado, permite al niño reconstruir, en caso de olvido, las reglas de uso de la noción, por medio del análisis de un sistema que le resulta familiar y en el que puede argumentar con un grado de abstracción adecuado a su edad. El modelo concreto es un apoyo para la comprensión de la noción y también para su reconstrucción en caso de olvido” (Cid, 2000, p. 530).

Retomando las características del modelo concreto para la enseñanza de ecuaciones se trabajó con dos modelos; el primero de ellos hace referencia al uso de una balanza como medio para solucionar ecuaciones lineales, cuyo objetivo es crear significado en los estudiantes sobre la noción de ecuación, asimismo mejorar la comprensión en los procesos seguidos y desarrollar la habilidad para su solución aplicando estrategias para la verificación de los resultados obtenidos.

El modelo de la balanza hace una analogía entre el peso de objetos que se puedan colocar en ambos lados de los platillos, manteniendo siempre la igualdad entre cada uno de ellos sin que ésta pierda el equilibrio. Para resolver una ecuación por este medio el estudiante requiere realizar una serie de operaciones mentalmente para ir eliminando o adicionando objetos en cada platillo, para aislar la incógnita en un lado de la balanza y encontrar el valor que satisface la ecuación.

Primeramente, se explicó a los estudiantes en qué consistía El modelo de la Balanza y la forma de representarla, poniendo énfasis en siempre mantener el equilibrio de la balanza por lo que es necesario agregar o quitar la misma cantidad de piezas; se parte de lo siguiente:

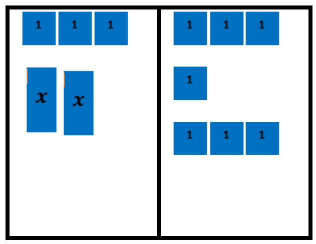
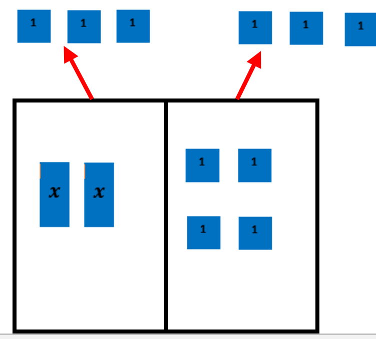
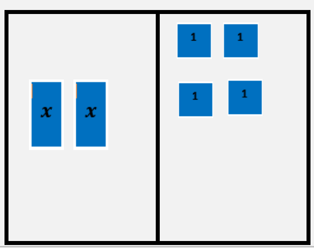
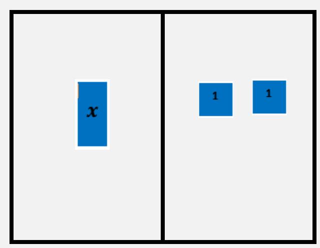
	REPRESENTACIÓN DE LAS INCÓGNITAS	**REPRESENTACIÓN DE LOS COEFICIENTES**
VALORES POSITIVOS	x	1
VALORES NEGATIVOS	$-x$	-1

Se indicó a los estudiantes que el ejercicio quedará resuelto cuando quede una sola pieza de x en uno de los platillos, el valor asignado a la incógnita será el de la cantidad de piezas en el platillo 2.

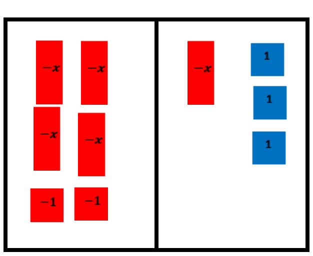
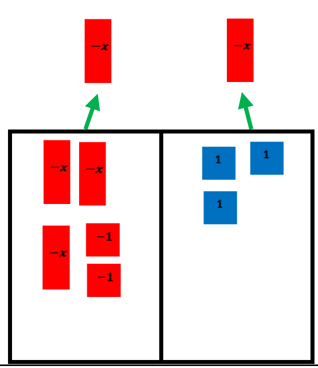
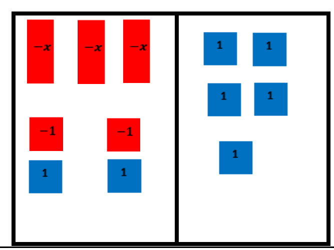
Considerando lo anterior se presentan tres ejemplos de la aplicación del modelo en el aula de clase.

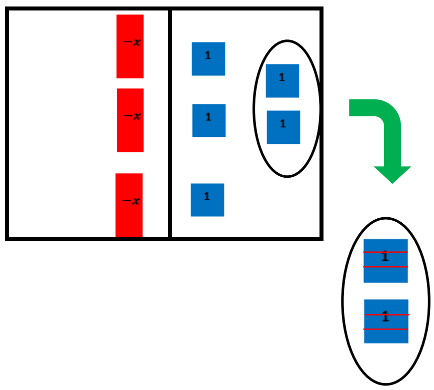
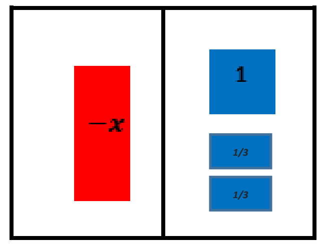
- Ecuación de la forma $ax + b = c$

Ejercicio 1 Encontrar el valor de x en la siguiente ecuación: $2x + 3 = 7$

<table>
<tr>
<td>1.- Representar la ecuación con el modelo de la balanza.
</td>
<td>2.- Se quita la misma cantidad de piezas en ambos lados del tablero como se observa en la figura.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3.- Se agrupan dos rectangulos x, con los cuadrados de del lado derechos se formaran dos bloques considerando que cada bloque tenga la misma cantidad de cuadrados.
</td>
<td>4.- Se concluye que cada bloque tiene dos cuadrados obteniendo con ello el valor de $x = 2$
</td>
</tr>
</table>

- Ecuación de la forma $ax + b = cx + d$

<table>
<tr>
<td colspan="3">Ejercicio 2
Encontrar el valor de x en la siguiente ecuación: $-4x - 2 = -x + 3$</td>
</tr>
<tr>
<td>1.- Representar la ecuación con el modelo de la balanza.
</td>
<td>2.- Se quita la misma cantidad de piezas en ambos lados del tablero.
</td>
<td>3.- Se agregan dos fichas en ambos lados del tablero para cancelar las dos fichas negativas (miembro izquierdo de la ecuación).
</td>
</tr>
</table>

4.- Se agrupan 3 rectángulos negativos, con los 5 cuadrados de del lado derecho considerando que cada bloque tenga la misma cantidad de cuadrados.  	5.- Se concluye que cada bloque tiene 1 cuadrado y $\frac{2}{3}$.  El valor de $-x = \frac{5}{3}$, finalmente se multiplica por -1 la ecuación para obtener valores positivos en x y que la ecuación sea verdadera.

La finalidad de la utilización del modelo de la balanza en la resolución de ecuaciones con expresiones positivas y negativas es que el estudiante desarrolle un pensamiento estratégico al despejar la incógnita a partir de la realización de operaciones mentales apoyándose de las fichas presentadas en clase, mismo que será fundamental para significar las propiedades de la igualdad, mejorar su comprensión y desarrollar la habilidad para la resolución de ecuaciones. Al aplicar este modelo los estudiantes podrán visualizar de manera gráfica el proceso llevado a cabo para resolver una ecuación sin emplear procedimientos algebraicos.

Una vez que se ha comprendido el significado que adquieren cada objeto matemático en el proceso de solución, la presencia de errores de tipo procedimental disminuirá teniendo en consideración que una de las problemáticas a las que se enfrentan los estudiantes son la falta de habilidad en el manejo de signos y la operatividad para cancelar los términos correspondientes en ambos miembros de la ecuación.

- MODELOS SIMBÓLICOS

Newell (1990) define símbolo como sinónimo de representativo (…) símbolo es un ente que se toma como sustituto de otro, el cual se llama referente, por su parte Fernández y Rico (1992) consideran que estos entes pueden tomar una gran variedad de formas, desde objetos concretos a marcas escritas en papel y pueden representar desde conceptos simples a otros más complejos.

En este caso el concepto de ecuación se representa a través de un sistema de signos que muestran la relación que existe entre valores desconocidos denominados incógnitas y valores conocidos relacionados por medio de las operaciones básicas. Para la enseñanza en la escuela secundaria se retomó lo implementado en el modelo concreto (Balanza de ecuaciones), para hacer la transición del procedimiento grafico al sistema de signos. Para ello, se hace la comparación de los movimientos y operaciones realizadas de manera mental, pero ahora se representándolas por medio de signos.

Para la resolución de ecuaciones se pone énfasis en la aplicación de las propiedades de la igualdad:

1. Propiedad idéntica o reflexiva: Establece que toda cantidad o expresión es igual a si misma ($a = a$)
2. Propiedad simétrica: consiste en poder cambiar el orden de los miembros sin que la igualdad se altere (Si $a = b$, entonces $b = a$)
3. Propiedad transitiva: enuncia que, si dos igualdades tienen un miembro en común, los otros dos miembros también son iguales. (Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$)
4. Propiedad uniforme: establece que, si se aumenta o disminuye la misma cantidad en ambos miembros, la igualdad se conserva.
    - ✓ Si $a = b$, entonces Si $a + k = b + k$
    - ✓ Si $a = b$, entonces $a - k = b - k$
5. Propiedad cancelativa: dice que en una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales y la igualdad no se altera.

Otras propiedades de la igualdad:

Si $a = b$, entonces Si $a.k = b.k$

Si $a = b$, entonces $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$; $(k \neq 0)$

Si $a = b$, entonces $a^k = b^k$

Considerando las propiedades mencionadas se aplicarán para la resolución de ecuaciones lineales, haciendo la transición de la representación gráfica empleada en un primer momento a la representación simbólica del proceso de resolución de ecuaciones lineales.

$\mathbf{2x + 3 = 7}$	$\mathbf{5x + 2 = 3x + 6}$	$\mathbf{-4x - 2 = -x + 3}$
$\mathbf{2x + 3 - 3 = 7 - 3}$ $\mathbf{2x = 4}$ $\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}$ $\mathbf{x = 2}$	$5x - 3x + 2 = 3x - 3x + 6$ $2x + 2 = 6$ $2x + 2 - 2 = 6 - 2$ $2x = 4$ $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$	$-4x + x - 2 = -x + x + 3$ $-3x - 2 = 3$ $-3x - 2 + 2 = 3 + 2$ $-3x = 5$ $\frac{-3x}{-3} = \frac{5}{-3}$ $x = -\frac{5}{3}$

1.2 Modelamiento matemático como habilidad en el eje de número, algebra y variación.

Las bases curriculares del plan y programa 2017 “Aprendizajes Clave” en la asignatura de Matemáticas dan relevancia a la resolución de problemas, actividad matemática relacionada con el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático, conceptualizada según Pedreros (2016) como “traducir una situación real al mundo de la matemática” (p.12). En donde el estudiante de la escuela secundaria analiza los datos presentes en el problema matemático, interpreta las variables y formula un modelo matemático que describa el fenómeno estudiado.

El modelamiento matemático además de ser considerado como una habilidad importante para el aprendizaje de las matemáticas es uno de los propósitos para la educación secundaria que consiste en modelar diversas situaciones de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas. El modelamiento matemático pretende que los estudiantes sean capaces de autorregular su propio aprendizaje, analicen, razonen y transmitan ideas matemáticas al resolver e interpretar problemas matemáticos. Con base a lo anterior se describen 5 etapas según Alejandro Pedreros (2016) en la resolución de problemas:

- Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
- Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
- Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos tales como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello revela los rasgos matemáticos de la situación cotidiana y transforma el problema real en un problema matemático.
- Se resuelve el problema matemático.
- Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

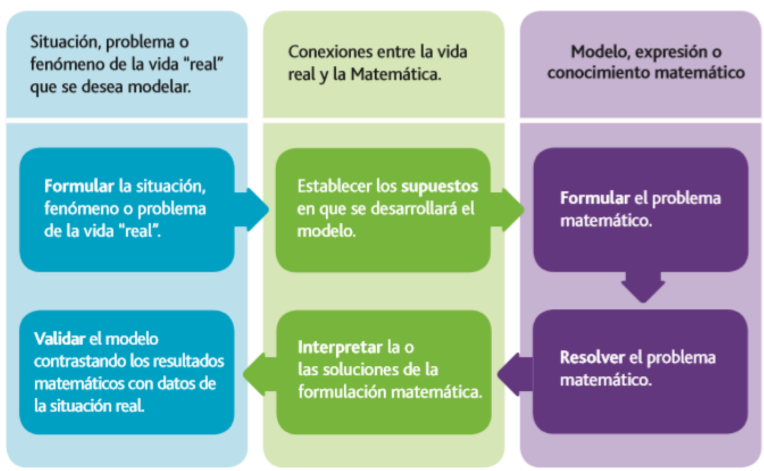


Gráfico 3: Proceso de resolución de problemas

En la actividad matemática que lleva a cabo el estudiante como primera etapa se enfrenta al problema matemático el cual es analizado de manera minuciosa, identificando las variables, incógnitas, datos entre otros, para ello es necesario comprender el problema. En la segunda etapa se identifican los conceptos matemáticos presentes necesarios para dar solución al problema, en la tercera etapa se transforma el problema de la vida real en términos matemáticos, para posteriormente aplicar alguna estrategia de solución, y finalmente verificar la solución obtenida.

Este proceso resulta complejo cuando el estudiante está iniciando en el aprendizaje del algebra implica no solo memorizar reglas y algoritmos necesarios para la solución de ejercicios y problemas matemáticos, sino comprender y significar los conceptos matemáticos implícitos en la actividad matemática. De ahí la importancia del docente quien guiará las actividades de enseñanza para favorecer el aprendizaje significativo de los estudiantes.

Al resolver un problema en matemáticas el estudiante pone en juego la aplicación de diversas estrategias que le permite llegar a la solución deseada, en este proceso interviene la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Se pone énfasis en el tránsito de las diversas representaciones de un objeto matemático como el pictórico, concreto y simbólico traduciendo los signos presentes en el problema matemático a lenguaje matemático.

Mochón (2000) refiere que los tipos de representaciones son:

- Numérica: Es la expresión matemática de la situación para poder representar su comportamiento puede ser a través de una tabla de valores relacionando algunas de las variables del sistema por otros medios.
- Gráfica: Son imágenes conceptuales controladas por su significado abstracto, resulta como consecuencia de la representación numérica (construcción de gráficas)
- Simbólica: Consta de un conjunto de ecuaciones que relacionan las variables de un fenómeno.

Cada tipo de representación es un medio para encontrar la solución a un problema planteado, por lo general en el estudio de las matemáticas en la escuela secundaria se da preferencia a un tipo de representación más que a otra, tal es el caso de las representaciones simbólicas que se apoyan del uso de ecuaciones y fórmulas matemáticas para representar un fenómeno o situación, dejando a un lado las representaciones numéricas y gráficas que resultan ser un apoyo para el estudiante en la resolución del problema planteado.

Se incluyó en las actividades de enseñanza las tres representaciones a partir del planteamiento de problemas que favorezcan el aprendizaje de los contenidos abordados en clase, Pozo (2009) refiere que "enseñar a resolver problemas es proporcionar a los alumnos esas estrategias generales para que las apliquen cada vez que se encuentran con una situación nueva o problemática" (p.20).

CAPITULO II

RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS QUE IMPLIQUEN EL USO DE ECUACIONES LINEALES.

La resolución de problemas es un aspecto característico de la asignatura de Matemáticas, se le ha dado diferentes significados por un lado se entiende como toda actividad o tarea que realice el estudiante en Matemáticas sin embargo, se enfatiza en la existencia de un problema cuando la persona que está resolviendo esta tarea se encuentra ante una dificultad que le imposibilite encontrar de manera inmediata la solución, para lo cual debe plantearse o idear estrategias que le permitan llegar a la meta establecida, es decir a resolver el problema.

Las Matemáticas en la Educación Básica, según el Plan de Estudios 2017 tienen el propósito de que los estudiantes identifiquen, planteen, y resuelvan problemas, estudien fenómenos y analicen situaciones y modelos en una variedad de contextos. Además, se pretende que el estudiante justifique y argumente sus planteamientos, así como los resultados obtenidos.

La resolución de problemas es una actividad frecuente realizada a lo largo de la vida cotidiana del ser humano se buscan los medios necesarios para encontrar la solución obteniendo con ello una satisfacción personal; en ocasiones este proceso resulta difícil y complejo esto debido a diversos factores como por ejemplo la carencia de estrategias o métodos eficaces de solución.

Para los estudiantes de la escuela secundaria la resolución de problemas matemáticos resulta una tarea difícil de afrontar porque requieren comprender el problema, así como poner en marcha una amplia serie de habilidades y conocimientos que en ocasiones no han sido desarrollados o aprendidos, ante las dificultades generadas en la resolución de problemas el estudiante muestra desinterés y rechazo por el estudio de esta ciencia.

Se considera el enfoque didáctico basado en la resolución de problemas que “es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio” (SEP, 2017, p.163). De igual manera constituye un medio para significar los contenidos matemáticos aplicando una serie de estrategias y heurísticos a problemas en diversos contextos; que inviten al estudiante a reflexionar sobre sus procesos de aprendizaje y desarrollen sus habilidades mismas que le permitan enfrentarse no solo a problemas dentro del aula de clase sino también fuera de ella.

Aprender matemáticas no solo implica memorizar conceptos, realizar ejercicios de manera rutinaria, aplicar una serie de algoritmos de manera reiterada al estudio de los números, cálculo de valores faltantes de problemas de proporcionalidad, resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas entre otros, sino implican ir más allá de los procesos seguidos para resolver problemas, es decir ser conscientes de que estrategia implementar y en qué momento hacerlo para dar sentido al aprendizaje de las Matemáticas.

Polya (1976) afirma que "un problema significa buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar" (p.55). que un ejercicio es un tipo de tareas en donde el alumno no tiene que tomar ninguna decisión acerca de los procedimientos que tiene para alcanzar la solución,

> Los ejercicios sirven para consolidar y automatizar ciertas técnicas2, destrezas y procedimientos que son necesarias para la posterior solución de problemas, pero difícilmente pueden ayudar a que estas técnicas se utilicen en diferentes contextos de los que se han aprendido o ejercitado, o difícilmente pueden servir para el aprendizaje y comprensión de conceptos" (Del Puy, 1994, p,61).

La diferencia entre estos dos tipos de tareas es relativa de acuerdo al grado de complejidad de las mismas, para algunos estudiantes la tarea propuesta por el docente representará un problema o un ejercicio si cuenta o no con las estrategias para obtener la solución. En la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria resulta eficaz plantear a los estudiantes problemas en donde aplique sus conocimientos previos, desarrollen algoritmos que posibiliten solucionar problemas con éxito.

El docente asume un papel importante en este proceso, él propondrá las tareas a realizar por sus estudiantes de acuerdo a la complejidad de las mismas, guiara al estudiante hacia la obtención de estrategias eficaces para afrontar la tarea solicitada, considerando que el estudiante es tiene un papel central en su aprendizaje.

Según el plan de estudios (2017) , Aprendizajes clave la autenticidad de los contextos es crucial para que la resolución de problemas se convierta en una práctica más allá de la clase de matemáticas. Los fenómenos de las ciencias naturales o sociales, algunas cuestiones de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas, así como determinadas situaciones lúdicas pueden ser contextos auténticos, pues con base en ellos es posible formular problemas significativos para los estudiantes.

Esta es una de las características importantes para la resolución de un problema, el cual debe estar contextualizado para que el estudiante signifique y aplique lo aprendido en clase en diferentes situaciones, la manera en que el docente presenta las tareas a los estudiantes repercute de manera significativa en la actitud que toman los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas.

En particular, cuando al estudiante se le plantea el problema como un reto relacionado con su edad y nivel escolar, influye en la actitud que toma para afrontar las actividades propuestas por el docente, si muestra una actitud positiva y está motivado por aprender su participación en clase será activa.

Proceso de resolución de un problema matemático

La solución de cualquier problema resulta un proceso complejo que exige que se lleven a cabo una serie de pasos establecidos que guíen la actividad matemática del resolutor (estudiante) hacia la obtención de la solución. Existen diversos autores que han establecido métodos para cumplir esta tarea matemática, entre ellos se encuentra Mayer (1983) quien establece que el estudiante debe seguir dos grandes procesos: traducción y solución del problema.

En el primer paso, el estudiante debe realizar una lectura detallada que le permita comprender el problema para posteriormente traducir el problema en términos matemáticos haciendo uso de diferentes lenguajes y representaciones (numéricas, gráficas o simbólicas), de esta manera se identificarán en el problema la incógnita, datos, si estos son suficientes para poder resolverlo.

Por otra parte, el matemático húngaro George Polya diseñó un método que consta de 4 pasos los cuales contribuyen a encontrar la solución del problema de manera satisfactoria.

1. Comprender el problema: En el primer paso el estudiante realiza una lectura detallada del problema, analiza e identifica los datos del enunciado, para ello puede replantear el problema con sus propias palabras. Comprender el problema no solo significa entender las palabras presentes, los símbolos y el lenguaje sino también identificar las dificultades y poder superarlas.

El docente puede plantear las siguientes preguntas para apoyar al estudiante: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es suficiente, redundante, contradictoria?

Este paso es fundamental para iniciar en el proceso de resolución, en la práctica en la escuela secundaria los estudiantes muestran mayores dificultades, para que se genere la comprensión, el problema debe contener elementos conocidos por el estudiante que permitan guiar hacia la búsqueda del plan a seguir.

2. Concebir un plan: En este paso se plantean las estrategias o heurísticas posibles a seguir para resolver el problema. Algunos de los heurísticos útiles de solución pueden ser realizar búsquedas por medio del ensayo-error, aplicar el análisis medios-fines, dividir el problema en subproblemas, descomponer el problema, buscar problemas análogos, ir de lo conocido a lo desconocido.

La estrategia debe adecuarse a la información presente en el problema. Se pueden plantear estas preguntas que ayuden a evocar alguna estrategia que pudiera aplicarse. ¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Ha empleado todos los datos?

3. Ejecución del plan: Cuando ya se tiene seleccionado el plan a seguir se aplica, se resuelve y se interpreta la respuesta en términos del problema y se trasforma el problema por medio de la aplicación de algún tipo de algoritmo. El estudiante responde a la siguiente cuestión, ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?
4. Examinar la solución obtenida: El proceso termina cuando se logra la meta deseada, es decir, se verifica que la respuesta obtenida sea la correcta. Es aquí en donde el estudiante visualiza si la aplicación de la estrategia permitió obtener la solución deseada, sino es el caso se revisa el procedimiento empleado.

Este proceso resulta útil para que el estudiante de la escuela secundaria resuelva problemas de manera eficaz, cuantos más conocimientos concretos posea mejor podrá comprender e idear un plan de acción para resolver el problema. La importancia de la resolución de problemas es que los alumnos desarrollen un saber hacer, es decir desarrolle estrategias para abordar problemas con ello se cumple los aprendizajes clave propuestos en el plan de estudio. El papel del docente es fundamental en dicho proceso, él es quien diseña los problemas que serán resueltos por los estudiantes, interviene proponiendo algunas estrategias para llegar a la meta establecida, además los invita a reflexionar sobre su propio aprendizaje.

Existe una diversidad de ideas para la clasificación de problemas tanto en función del área que se aplique, de la estructura y contexto del mismo. Pozo (1994) establece una clasificación según las características de la tarea, diferencia entre problemas bien definidos y mal definidos. Un problema bien definido o estructurado es aquel en el que se puede identificar fácilmente si se ha alcanzado una solución. En este tipo de tarea tanto el punto de partida del problema (planteamiento) como el punto de llegada (solución) y el tipo de operaciones que hay que recorrer para salvar la distancia entre ambos están especificados de forma muy clara.

Este tipo de problemas son los que comúnmente resuelven los estudiantes en la escuela secundaria; por su parte los problemas mal definidos son aquellos en donde los puntos de partida no están definidos claramente, son menos específicos y claros, las posibles soluciones obtenidas son diferentes entre sí por lo tanto pueden ser consideradas válidas.

Mientras que para las clasificaciones de Blanco (1983) y Borasi (1986) se distinguen las siguientes subcategorías

- Ejercicios de Reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición
- Problemas de traducción simple o compleja
- Problemas sobre situaciones reales y problemas de investigación matemática.
- Otros problemas que incluyen problemas de puzzles o de historias matemáticas.

Al plantear un problema al estudiante es necesario considerar el contexto en que se encuentra inmerso, éste puede ser en un contexto real, hipotético o puramente matemático, es importante considerar que un planteamiento en contexto real será una aproximación a la realidad o parte de ella.

Tipos de conocimiento necesario para resolver problemas.

Según Mayer (1983) para la resolución de problemas es necesario que el resolutor asimile el problema en términos del conocimiento que ha adquirido a lo largo de su formación, es decir establece la relación entre el problema y los conceptos e ideas que posee. Es necesario que el estudiante tenga presente tres tipos de conocimiento:

- ❖ Conocimiento semántico: Es el conocimiento de los hechos del mundo, es decir comprender el contexto en que se presentan los hechos.
- ❖ Conocimiento lingüístico: Conocimiento del lenguaje en que está redactado el problema, nos permite comprender las expresiones escritas del problema.
- ❖ Conocimiento esquemático: Este tipo de conocimiento nos serviría para clasificar el problema, decidir qué datos son útiles y que datos no lo son, para determinar las acciones que deben ponerse en marcha.

A manera de ejemplo tomemos el siguiente problema: Carlos vive en el 4° piso de un edifico, se sube en el ascensor y baja al sótano (-2 pisos), luego sube 8 y por ultimo baja a recepción, ¿Cuántos pisos ha recorrido? El conocimiento lingüístico está presente al comprender, las expresiones que describen la situación, mientras que en el conocimiento semántico se interpreta el contexto del problema para dar sentido al algoritmo que se va a desarrollar en donde se determina que datos son útiles y permiten llegar a la solución en este caso se aplicó la suma de los valores absolutos de la cantidad de pisos que recorrió Carlos.

2.1 Como generar un modelo matemático

Mochón (2000) en su libro Modelos Matemáticos para todos los niveles establece los pasos para la generación de un modelo matemático dado un problema real:

FORMULACIÓN

Se deben de identificar los factores más relevantes que producen su comportamiento. Este proceso de simplificación sacrifica algo de realismo y exactitud del modelo, ganando claridad y facilidad de solución. En esta primera etapa es una buena idea ser optimistas y suponer que los factores escogidos son los apropiados. En algunas ocasiones es conveniente idear previamente un modelo concreto y de este generar la descripción matemática, en otras ya existe un modelo previo que puede ser adaptado a las situaciones que se requieran.

Cuando el estudiante inicia el proceso de solución parte de la creación de hipótesis que le permiten idear métodos para solucionar el problema, aunque este punto lo realiza de manera informal, es decir no registra las posibles soluciones se deben identificar la información relevante de la que no lo es.

SOLUCIÓN

Obteniendo la primera descripción matemática del fenómeno se analizará para extraer sus resultados, no necesariamente tienen que estar en forma de ecuaciones exactas. Pueden ser descripciones de carácter cualitativo o resultados generados por aproximaciones. Una vez que se hayan identificado las diversas fuentes de información útiles para resolver el problema, se aplican para poder crear un solo modelo que se adapte a las características del problema o situación a resolver, el modelo encontrado puede estar integrado por expresiones matemáticas y representaciones que al ser aplicadas por el estudiante permitan obtener un resultado favorable.

INTERPRETACIÓN

Los resultados obtenidos no tienen valor hasta que sean interpretados dentro de la situación real que estamos estudiando para obtener así las predicciones del modelo, en el desarrollo del mismo puede llevar al estudiante hacia la obtención de diversos resultados que en ocasiones no es lo que se esperaba obtener, es por eso que debe analizar y verificar si los resultados obtenidos cumplen con las condiciones de la situación planteada en un inicio, en este aspecto se le da significado al resultado obtenido, por ejemplo, si el problema se modela con una ecuación, se resuelve aplicando un algoritmo y al final el valor que se obtenga en la incógnita se interpretara de acuerdo a lo establecido en el problema.

COMPARACIÓN

La importancia de las predicciones es que nos ayudan a validar el modelo que construimos, se comparan las predicciones con las observaciones hechas del fenómeno. Esta confrontación nos ayuda a definir el rango de aplicabilidad de este o equivalentemente sus limitaciones. Es aquí en donde se comparan las hipótesis que se plantearon en un inicio con los resultados obtenidos al aplicar el modelo elegido.

ADECUACIÓN

Cuando el modelo cumple con las situaciones en las que se está interesado, termina el proceso de construcción del modelo matemático; en caso de lo contario se empieza con el ciclo anterior hasta que se encuentre el modelo adecuado. Se enfatiza que un modelo debe mejorarse cuando su rango de aplicación nos sea insuficiente. Si en el paso anterior el resultado obtenido no satisface lo establecido en el problema se revisa las representaciones empleadas hacia la obtención de la solución, si existe algún error de cálculo y no cumple con lo establecido en el problema, se replantea el modelo iniciando con ello el proceso.

2.*2 Modelar situaciones con ecuaciones lineales*

Las ecuaciones en el plan de estudios 2017 ocupa un lugar importante, su estudio empieza en primer grado de la educación secundaria con el aprendizaje clave "*resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales*", en este proceso los estudiantes adquieren el concepto y significado de "ecuación" entendida como la igualdad que existe entre dos expresiones algebraicas en donde aparece como mínimo una incógnita.

La actividad de resolución de problemas en el aula de clase puede ser utilizada como medio para enseñar y comprender los conceptos matemáticos. Godino (2003) afirma:

> La resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos. (p. 39)

Cuando el docente plantea un problema matemático a sus estudiantes, estos deben estar acordes a su edad e intereses, además se relacionarán con su contexto, ya que al realizar esta actividad matemática el alumno dota de significado a las tareas realizadas puesto que comprende la finalidad del estudio de las matemáticas. El trabajo del docente será inverso al del alumno "En lugar de partir de un problema y llegar a un conocimiento matemático, parte de un conocimiento matemático y busca uno o varios problemas que le den sentido para proponerlo a sus alumnos (recontextualización)" (D. Godino, 2003, p. 67). El docente motiva a sus alumnos hacia la resolución de problemas a partir de casos particulares.

A partir de sus conocimientos previos se solicitó a los alumnos que resolvieran por parejas el siguiente problema, se obtuvieron diversos procedimientos empleados que resultaron favorecedores en el uso de la modelación matemática.

Presentación y resolución del problema del día:
1. Se tiene el mismo número de cajas de manzanas que de duraznos. Si en una caja de manzanas caben 13 unidades y en una de duraznos caben 17, ¿Cuántas cajas se tiene si hay un total de 180 frutas? **6 cajas** $13x + 17x = 180$

Métodos de solución

Uso de un modelo simbólico	
Aritmético	**Algebraico**
13 manzanas+ 17 duraznos= 30 frutas $\frac{180\, frutas}{30\, frutas} = 6$ Resultado= 6 cajas Cantidad de manzanas:78 Cantidad de duraznos:102	$13x + 17x = 180$ $30\ x = 180$ $\frac{30\ x}{30} = \frac{180}{30}$ $x = 6$ Resultado= 6 cajas

Los métodos empleados por los estudiantes permitieron llegar a la solución deseada, el uso de una u otra representación matemática guiaron el proceso para la creación del modelo matemático. Durante las clases de matemáticas se enfatizó en socializar los métodos y procedimientos de solución que siguió cada estudiante, de esta manera se impulsaba al estudiante a utilizar el lenguaje matemático para comunicar sus ideas, asimismo se daba cuenta que no solo existía un método para llegar a la solución, idea frecuente en los estudiantes, sino al contrario existen diversos métodos para hacerlo.

Para la resolución de próximos problemas se les sugirió a los estudiantes se apoyarán de la siguiente tabla que incluye los pasos para la creación de un modelo matemático, considerando las preguntas que establece Polya en el Método de los 4 pasos que guiaron el proceso de búsqueda de estrategias.

Problema matemático	Aspectos
Formulación	Datos del problema Incógnita Hipótesis
Solución	Aplicación del modelo • Gráfico • Simbólico • Concreto
Interpretación de los resultados.	Comprobación
Comparación	Socialización entre compañeros
Adecuación	Evaluación de aplicabilidad del modelo.

Una vez que establecido en que consiste cada paso se aplicó en la resolución de diversos problemas.

Problema 1 (*Problema de edades)*

Sara tiene ahora 3 veces la edad de su hermano Manuel, y dentro de 3 años ya sólo tendrá el doble de la edad de su hermano. ¿Qué edades tienen ahora Sara y Manuel?

Para la resolución del problema se aplicaron los pasos establecidos para la creación del modelo matemático en el primer punto ***formulación del modelo,*** es de gran relevancia la comprensión de las expresiones presentes en el problema para posteriormente idear un plan de solución. Luis Puig, (1998) propone una regla para enunciar un problema en términos de una ecuación.

1) Comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.

Las cantidades que se pretenden encontrar son: la edad de Sara y la edad de Manuel; la relación entre los datos es en dos tiempos; el primero es *ahora* y el segundo es *dentro de 3 años.* Traduciendo la expresión del problema.

— La edad de Sara *ahora* es 3 veces la edad de Manuel *ahora*

— La edad de Ana *dentro de tres años* es 2 veces la edad de David *dentro de tres años*.

2) Dar nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra.
   En el problema se designa con una ***x*** la edad de David (incógnita)
3) Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra.

Expresiones	Ahora	Dentro de 3 años
Edad de Sara	$3x$	$3x + 3$
Edad de Manuel	x	$x + 3$

4) Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.

$$3x + 3 = 2(x + 3)$$

5) Comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad.

Una vez establecido el modelo matemático se procede a su ***solución.***

$$3x + 3 = 2x + 6$$

$$3x - 2x + 3 = 2x - 2x + 6$$

$$x + 3 = 6$$

$$x + 3 - 3 = 6 - 3$$

$$x = 3$$

El proceso continúa con la ***interpretación*** de los resultados, es decir $x = 3$ representa el valor de la edad de Manuel entonces: la edad de Sara es 9 años y la de Manuel 3 años, cumpliendo las condiciones mencionadas en el problema.

Expresiones	Ahora	Dentro de 3 años
Edad de Sara	9	12
Edad de Manuel	3	6

En el siguiente paso ***comparación*** se analiza si las hipótesis que se tenían antes de resolver el problema fueron correctas o no, asimismo se comparte en grupo los procedimientos y respuestas obtenidas. Finalmente, si el modelo obtenido fue el correcto no es necesario pasar al proceso de ***adecuación.*** Para que la resolución de problemas resulte una actividad significativa en los estudiantes y no solo una aplicación de algoritmos para la solución de problemas, es importante presentar problemas relacionados con su contexto uno de ellos es el siguiente.

En la biblioteca de la Escuela Secundaria "Heriberto Enríquez" fueron donados 5400 libros, para ordenarlos se repartieron en tres estancias: en la estancia *A* hay el triple de libros que en la *B* y en la *B* la mitad que en la *C*. Calcular cuántos libros hay en cada estancia.

Como x representa los libros que hay en B, tenemos:

$$3x + x + 2x = 5400$$

La cantidad de libros en B es $x = 900$

La cantidad de libros en A es $3x = 3(900)$=**2700**

La cantidad de libros en C es $2x = 2(900)$=**1800**

El problema resulto interesante para los estudiantes, además de que no presentaron dificultades para comprender el contexto en que se encuentra. Este tipo de problemas brindan la posibilidad de que los estudiantes comprendan que diversas situaciones de la vida cotidiana se pueden modelar a través de diferentes representaciones matemáticas.

2.3 Dificultades y errores en la resolución de problemas

El aprendizaje de las matemáticas genera dificultades en los estudiantes y estas son de naturalezas distintas.

> Estas dificultades se conectan y se refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en formas de errores. El error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta especifica de conocimiento o de un despiste". (Socas, 1997, p. 125)

En el proceso de aprendizaje del algebra es relevante trabajar en la resolución de problemas verbales en especial a problemas que pueden ser formulados en términos de ecuaciones, sin embargo, de acuerdo a la complejidad de la misma y pesar del tiempo dedicado en la enseñanza de estos contenidos aún se presentan dificultades que repercuten de manera significativa en el aprendizaje de los estudiantes.

La presencia de errores y dificultades en matemáticas se evidencian en casi todos los alumnos que realizan alguna tarea matemática; algunas de las dificultades son:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos
2. Dificultades asociadas al proceso de pensamiento matemático
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes efectivas y emocionales hacia las matemáticas.

La comunicación de los objetos matemáticos a partir del lenguaje matemático es fundamental para la interpretación de signos, el significado del mismo genera conflictos dentro del contexto matemático caracterizado por la precisión y el uso de reglas exactas que de alguna manera causan confusión al interpretarlas dentro del lenguaje habitual. Otro aspecto que genera confusión en los alumnos es su sintaxis entendida como reglas formales de las operaciones para analizar el desarrollo de los signos matemáticos se ubican en los sistemas de representación cognitivos.

En el primer estadio denominado “*semiótico* es donde los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos, en el segundo denominado estadio estructural el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo, mientras que en el estadio autónomo los signos adquieren significados propios” (Socas, 1997).

Con respecto a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, la comunicación de los objetos matemáticos a partir del lenguaje matemático es fundamental para la interpretación de signos, el significado del mismo genera conflictos dentro del contexto matemático caracterizado por la precisión y el uso de reglas exactas que de alguna manera causan confusión al interpretarlas dentro del lenguaje habitual.

Otro aspecto que genera confusión en los alumnos es su sintaxis entendida como reglas formales de las operaciones para analizar el desarrollo de los signos matemáticos se ubican en los sistemas de representación cognitivos. En el primer estadio denominado “*semiótico* es donde los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos, en el segundo denominado estadio estructural el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo, mientras que en el estadio autónomo los signos adquieren significados propios” (Socas, 1997).

Para aminorar las dificultades de los alumnos y potenciar los procesos de pensamiento lógico de las matemáticas es necesario conjugar la lógica interna de las matemáticas con la lógica social en la que está inmerso el alumno con frecuencia los problemas que son planteados a los estudiantes no corresponden con lo que se presenta en la realidad, un ejemplo de lo anterior es la resolución de problemas relacionados con proporcionalidad el conflicto empieza cuando se relaciona el concepto con el trabajo que realizan un grupo de personas y se dice que es proporcional cuando de manera práctica no sucede de esta forma.

La presencia de dificultades en el aprendizaje se manifiesta en los estudiantes a partir de errores, Socas (1997) explica que los errores que cometen los estudiantes se analizan en tres ejes: los que tienen su origen en un obstáculo, los que provienen por la usencia de sentido y aquellos que se originan en actitudes efectivas y emocionales. A modo de ejemplo se tomará como referencia el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales con números enteros.

Los errores que tienen su origen en ausencia de sentido, se identifican en los tres estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo) se diferencian errores del algebra que tienen su origen en la aritmética, para que se puedan generalizar los procesos y relaciones en el álgebra es necesario que estos se hayan formalizado en la aritmética.

Un claro ejemplo de este tipo de error se evidencia en la resolución de ecuaciones al aplicar las reglas y leyes de los signos, en la escuela secundaria ante la falta de dominio imposibilita desarrollar las operaciones correctamente o en su caso confunden las leyes de los signos aplicadas a la multiplicación y división con las reglas de los signos que al no tener solido este conocimiento y al aplicarlo en algebra siguen presentándose estos errores.

Con respecto a los errores de procedimientos, tiene su origen en el uso inapropiado de "formulas" o reglas de procedimientos, esto se debe a que los alumnos aplican inadecuadamente una formula, la mayoría de los errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores fundamentalmente por la falta de linealidad de estos operadores.

Este tipo de error se presenta cuando el estudiante aplica de manera incorrecta las propiedades de la igualdad al momento de resolver una ecuación o en su caso no las aplica y en su lugar emplea la transposición de términos que de alguna manera resulta eficaz para solucionar diversas ecuaciones de primer grado, pero el error se hace presente al omitir el signo del coeficiente y solamente aplicar la operación inversa para despejar la incógnita. Este tipo de errores se pudieron evitar si el estudiante hubiese modificado la forma de aplicar las reglas que repercuten de manera significativa en la resolución efectiva de una ecuación.

Mientras que los errores del algebra debido a las características propias del lenguaje son propiamente de naturaleza algebraica. Como por ejemplo el significado del signo de igualdad en su paso de la aritmética al algebra muestra como la concepción que adquiere el estudiante en aritmética facilita la resolución de ecuaciones si se han consolidado y adquirido los diferentes significados del signo igual ante una tarea matemática o en su caso obstaculizara la correcta aplicación de estrategias de solución de ecuaciones con estructuras más complejas.

En la resolución de ecuaciones lineales con números enteros se observó que los estudiantes eran hábiles en la resolución de ecuaciones de la forma $ax + b = c$ mientras que para las ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ mostraban mayores dificultades debido al significado *operador* de la igualdad que indica la respuesta a un cálculo o simplificación, predomina una concepción procedimental de los objetos matemáticos (Andonegui, 2009). Se expresa la relación operación = resultado, el estudiante adquiere cierta habilidad en la realización de operaciones de tipo aritmético, pero al momento de transitar a la resolución de ecuaciones ese conocimiento imposibilita resolver ecuaciones en donde la incógnita se encuentra en ambos miembros de la igualdad.

Resulta importante considerar el signo igual como “Expresión de una equivalencia condicional (ecuación) la cual es cierta según el dominio de referencia, es decir puede ser cierta para algún (algunos) valor (valores) de la variable (variables) o ninguno” (González, 2014, p.14). En la resolución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ el estudiante obtiene dos valores para x cuando en realidad solo debe ser una que cumple la igualdad, el error se manifiesta al observar que son dos ecuaciones, pero no establece la relación que existe en ambas por lo tanto asigna un valor diferente para cada ecuación.

En la resolución de problemas el estudiante se enfrenta a una tarea compleja la cual demanda la aplicación de heurísticos y estrategias que le permitan encontrar la solución, en el proceso de traducir el problema a una ecuación se presentan dificultades que imposibilitan la obtención de un modelo correcto, Puig (2001) menciona tres de ellas:

1) Dificultades para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas, es aquí en donde se identifican los datos conocidos del problema y aquellos desconocidos estableciendo la conexión entre ambos; cuando todas las cantidades que hacen falta están mencionadas en el enunciado minimiza la dificultad, pero cuando no se mencionan de manera explícita se debe inferir a partir de las relaciones entre los datos mencionados.

2) Dificultades en la traducción: Al establecer las relaciones entre los datos se plantea el problema en lenguaje algebraico es común traducir las expresiones del problema en el orden de aparición cuando es necesario reestructurar la ecuación hasta que cumpla con la condición establecida en el problema.

3) Dificultades al escribir la ecuación. El error que puede cometerse es igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad. Para ello se debe comprobar que los dos miembros de la ecuación representen la misma cantidad.

Una vez que han explicitado las dificultades para la resolución de problemas y como se evidencian en los estudiantes en forma de errores es importante considerar que estos repercuten hacia la aplicación de estrategias para la resolución de problemas que se modelan con ecuaciones lineales.

CAPITULO III

IMPACTO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES

Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que el estudiante conoce de la asignatura, es decir los conocimientos previos que posee ante una tarea matemática, además considerar aquello que necesita aprender, por lo tanto, las actividades propuestas deben crear en el estudiante un conflicto cognitivo que despierten el interés y promueva el aprendizaje de saberes matemáticos.

Juan D. Godino (2003) menciona dos fines que debe considerar la enseñanza de las matemáticas:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que las matemáticas han contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método matemático, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de las matemáticas permite responder, las formas básicas de razonamiento y del trabajo matemático, así como su potencia y limitaciones.

Para lograr que los alumnos aprecien el papel de las matemáticas es necesario comenzar su estudio con el planteamiento de problemas y a partir de ello construir estructuras fundamentales de las matemáticas, a partir de esta visión de las matemáticas se diseñó una propuesta didáctica que consiste en el planteamiento de problemas contextualizados cuya estrategia de solución es uso de modelos matemáticos, se pretende que el estudiante desarrolle esta habilidad por consiguiente sean competente en la resolución de problemas con ecuaciones lineales, además que ponga en práctica todos los conocimientos, destrezas, habilidades que posee para el diseño de estrategias eficaces, de esta manera disminuirán los errores cometidos en el desarrollo del algoritmo correspondiente.

Es importante considerar los conocimientos previos que poseen los estudiantes para resolver los planteamientos propuestos, los saberes aritméticos como el dominio de las propiedades de las operaciones básicas posibilitaran el aprendizaje del algebra, pero este conocimiento al generalizarlo genera dificultades para asimilar y dar sentido a conceptos algebraicos. Por ejemplo, para la expresión $2b + 4$ realizan la suma de ambos términos obteniendo $6b$, no aceptan la falta de cierre de la expresión, puede generalizarse esta situación debido a los conocimientos aritméticos que posee en donde la relación de una serie de operaciones conduce a un resultado. Esta concepción influye para asimilar que en ecuaciones en donde la incógnita se encuentra en ambos miembros del signo igual las expresiones son equivalentes.

Uno de los conocimientos que el estudiante posee para afrontar esta tarea es el dominio las leyes y reglas de los signos necesarias para aplicar el algoritmo correspondiente. Ahora bien, al plantear una ecuación es necesario tener un dato desconocido denominado incógnita en el nivel anterior los estudiantes resolvieron problemas, ejercicios aditivos y multiplicativos en los que se pide poner el número apropiado dentro del cuadro con expresiones como $5 + \square = 12$, los estudiantes transfieren el significado del cuadrito a la incógnita como un valor desconocido.

En atención a ello se diseñaron actividades de enseñanza que permitan significar los conceptos matemáticos implícitos en la resolución de problemas matemáticos relacionados con ecuaciones lineales.

TEMA: Ecuaciones

EJE TEMÁTICO (PLAN 2017): Número, álgebra y variación.

APRENDIZAJE CLAVE: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.

Presentación y resolución del problema del día:

INSTRUCCIONES: Resuelve el siguiente problema.

Problema 1

Un gavilán vio un grupo de palomas y les dijo: “¡adiós, mis cien palomas!”, a lo que una de ellas respondió: “no vamos cien, pero nosotras más nosotras más la mitad de nosotras juntas y la mitad de la mitad de todas nosotras y usted, señor gavilán, sumamos cien...” ¿Cuántas palomas formaban la bandada?

En la fase de discusión de los métodos de solución se identificó que el método de solución empleado por la mayoría de los estudiantes fue aritmético, mediante el ensayo y error lograron identificar el número que cumplía con las condiciones del problema, una de las dificultades a la que se enfrentaron fue comprender la expresión “la mitad de la mitad de todas nosotras” que expresada en lenguaje algebraico corresponde a una cuarta parte de la incógnita. Para el estudiante que inicia en el estudio del algebra estos conceptos resultan nuevos, con la intención de significar el concepto de incógnita se implementó la siguiente actividad.

Que el estudiante:

Actividad 1

- Participe en la actividad denominada “Adivina un número” que consiste en lo siguiente:

1. La docente pedirá a los estudiantes que piensen en un número (por ejemplo, el 15)
2. Les dirá que añadan un 0 a la derecha (150)
3. Pedirá que resten al número obtenido cualquiera de la tabla del 9 (9, 18, 27, 36 …) por ejemplo el 18
4. Finalmente, el estudiante dirá en voz alta el numero obtenido p. ejemplo 132

Para averiguar que numero pensó, a los dos números de la derecha (13) se le suma el de la derecha (2), obteniendo el número que pensó inicialmente el 15.

Actividad 2

- La docente en formación les solicitará una hoja de color, la cual la doblarán de manera horizontal en 8 partes, obteniendo 4 columnas y dos filas, después doblarán los extremos hacia el centro de la hoja. Anotará en cada casilla una operación básica (adición, sustracción, cociente, producto) y la expresión que la represente. (Anexo 1)

Con respecto a la actividad 1 fue del interés de los estudiantes porque, al finalizar los cálculos indicados, la docente adivinaba el número que había pensado en un inicio el estudiante creando incertidumbre sobre cómo era posible adivinar el número, retomando la participación de los estudiantes y de los resultados obtenidos fue posible construir el concepto de incógnita entendida como "Símbolo literal cuyo valor se desconoce. Las variables generalmente se denotan usando las ultimas letras del alfabeto: *t, u, v, w, x, y, z,* etc., mientras que las constantes se denotan con las primeras: *a, b, c."*

Considerando que el enfoque de las matemáticas es la resolución de problemas como un medio para aprender contenidos matemáticos, el estudiante al enfrentarse a un problema en primera instancia realiza una lectura del mismo, es necesario comprender lo que solicita el planteamiento, una de las dificultades observadas en la escuela secundaria fue la transición del lenguaje común a lenguaje algebraico es decir plantear la ecuación que involucre los datos de un problema, por lo anterior se planteó la siguiente situación en un primer momento los estudiantes realizaron la lectura del problema de manera individual para identificar el contexto del problema, posteriormente se resolvió de manera grupal con la intención de atender las dudas de los estudiantes sobre las expresiones algebraicas. (Anexo 1)

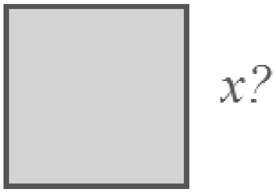
Problema 2:

Tenemos una cantidad de papas en nuestras freidoras, pero no sabemos qué cantidad exacta, lo que si sabemos son los datos que te damos a continuación. Expresa algebraicamente la información que aparece en los paquetes de papas fritas.

Que el estudiante:

- Represente algebraicamente los siguientes planteamientos.

1. Rodrigo tenía 5 canicas. Carlos le ha dado algunas más. Ahora Rodrigo tiene 12 canicas. ¿Cuántas canicas le ha dado Carlos?
2. Laura tiene 30 años menos que su padre, y esté tiene el cuádruple de los años que su hija. Halla la edad de cada uno.
3. Si el perímetro de un cuadrado es 24cm, ¿Cuánto miden sus lados?



Una vez expresados los planteamientos en lenguaje algebraico surgió la necesidad de encontrar la respuesta a dichos problemas, la mayoría de los estudiantes encontraron la respuesta sin la necesidad de aplicar el algoritmo de solución correspondiente a una ecuación lineal, se enfatizó en el uso del algoritmo a partir del modelo de la Balanza algebraica antes de pasar a la representación simbólica del proceso de resolución de una ecuación.

Para ello se les proporcionó a los estudiantes fichas de dos colores: el color azul representaría valores positivos, mientras que las fichas de color rojo representan valores negativos, se utilizaron cuadrados para representar datos numéricos y rectángulos para representar a la incógnita (x); se les explicó que la función del material se encaminaba hacia la resolución de una ecuación lineal. Al implementar este modelo se parte de lo siguiente:

- La balanza siempre debe estar en equilibrio, para ello se debe añadir o quitar la misma cantidad de fichas en ambos lados de la balanza. (Propiedad uniforme de la igualdad)
- Se hizo hincapié en la propiedad simétrica de los números explicando que a todo número pertenece un simétrico que al conjugar su operación da como resultado 0, es decir una ficha de color azul se cancela con otra de color rojo.

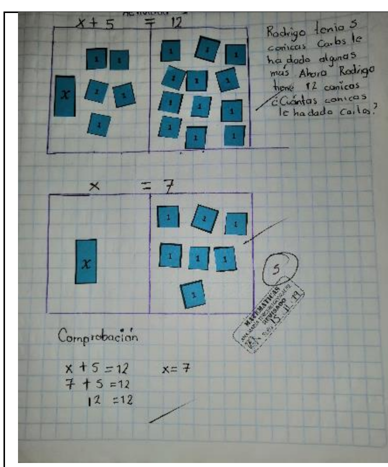
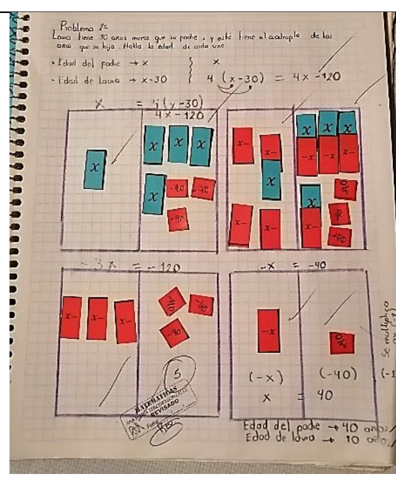
		

Tabla 1: Aplicación de modelos concretos en la resolución de problemas matemáticos

Con la implementación de esta estrategia los estudiantes pudieron resolver ecuaciones lineales mostraron una mejor asimilación del concepto ecuación, una mejora en la comprensión del proceso seguido para obtener el valor de la incógnita asimismo se aplicaron las propiedades de la igualdad minimizando la confusión de las operaciones con signo que involucran las reglas y leyes de los signos. Después de utilizar en varias ocasiones las fichas se procedió con uso del algoritmo para la resolución de una ecuación lineal, esta tarea resulto más fácil puesto que los alumnos conocían el proceso para solucionar la ecuación que modela el problema.

En el trabajo que realizaron los estudiantes se observó que utilizaron diversos métodos de solución de manera independiente al trabajado en clase que les permitió llegar a un resultado correcto, para el caso de resolución de ecuaciones de la forma $a + x = b$ la forma usual de proceder de los estudiantes es a partir de recordar resultados numéricos para averiguar el valor de la x, mientras que para ecuaciones de la forma $ax + b = c$ recurren a técnicas de conteo buscan la solución sustituyendo en la incógnita los valores de 1,2,3,4 … lo cual facilita la solución para ecuaciones sencillas, otra de las estrategias que emplean es sustituir por tanteo es decir dan un valor a x, realizan las operaciones necesarias y dependiendo del valor obtenido en el miembro izquierdo de la ecuación asignan un valor mayor o menos a la incógnita.

Es importante mencionar que en ocasiones estos procedimientos no están explícitos en el cuaderno del estudiante se tratan de operaciones de cálculo mental, una vez obtenido el valor que satisface la igualdad anotan la ecuación y el valor de la incógnita, para comprender los procesos seguidos por el estudiante es necesario que explique el proceso para resolver la ecuación más que la obtención de un resultado correcto. Una de las estrategias empleada frecuentemente es mirar hacia atrás es decir interpretar la ecuación como una o más operaciones que ya se han realizado, se interpreta cada operación que aparece en el enunciado con su inversa para finalmente llegar al resultado.

En la enseñanza significativa se le da un papel importante a la

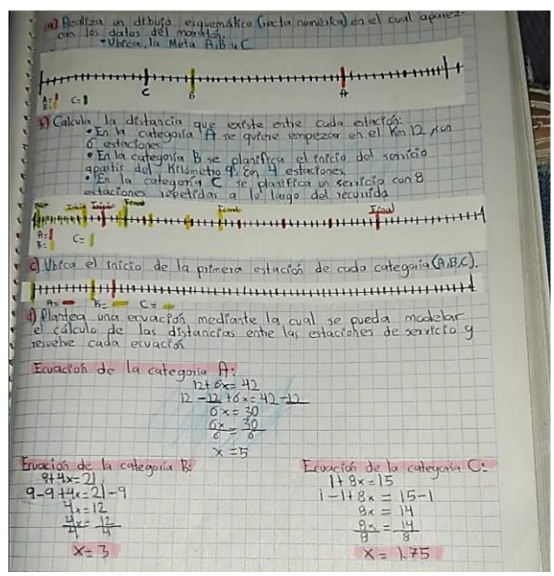
> Interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas (…) estas últimas son claves en el aprendizaje de la misma; los estudiantes deben aprender matemáticas

comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo". (D. Godino, 2003, p. 70)

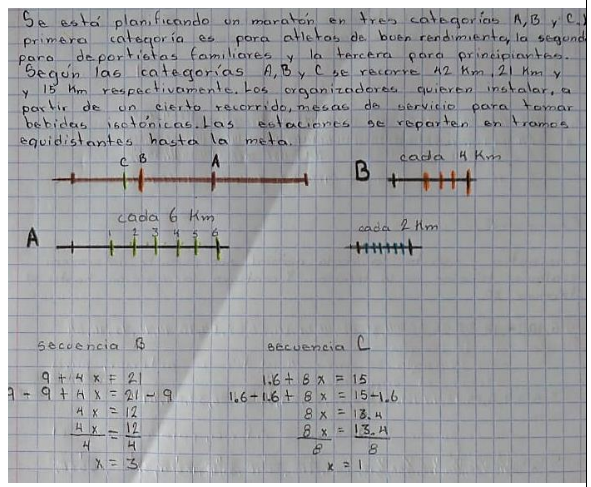
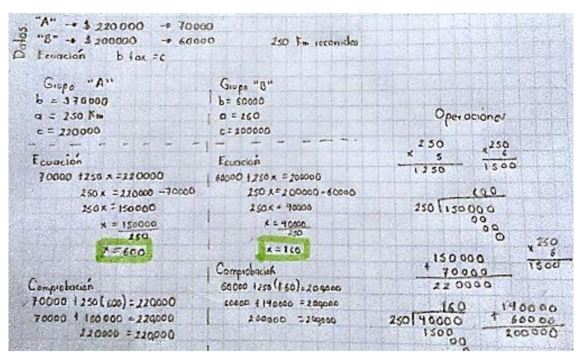
La interacción del estudiante con las situaciones- problema es fundamental para generar aprendizajes significativos es por eso que propusieron diferentes tipos de problemas que implicaran el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales, es importante mencionar que dicho proceso fue acompañado por la docente a través de la ejemplificación y resolución de problemas de manera grupal.

Una de las complicaciones que mostraron los estudiantes fue el planteamiento de la ecuación, la transición del lenguaje del problema al lenguaje algebraico, es importante considerar que los problemas planteados permitían emplear las diferentes representaciones según Mochón (2000) numérica, gráfica y simbólica que de alguna manera permitieron comprender mejor lo que solicitaba el problema.

<table>
<tr><th>PROBLEMAS</th><th>EVIDENCIA DEL PROCESO DE SOLUCIÓN</th></tr>
<tr><td>PROBLEMA 1 "EL MARATÓN"

Se está planificando una maratón en tres categorías A, B y C. La primera categoría es para atletas con buen rendimiento, la segunda para deportistas familiares y la tercera para principiantes. Según las categorías A, B y C se recorre 42 km, 21 km y 15 km respectivamente. Los organizadores quieren instalar, a partir de un cierto recorrido, mesas de servicio para tomar bebidas isotónicas. Las estaciones se reparten en tramos equidistantes hasta la meta.</td><td>Estudiante 1


</td></tr>
</table>

a) Realiza un dibujo esquemático en el cual aparezcan los datos del maratón b) Calcula la distancia que existe entre cada estación si: En la categoría A se quiere empezar en el kilómetro 12, con 6 estaciones En la categoría B se planifica el inicio del servicio a partir del kilómetro 9, con 4 estaciones. En la categoría C se planifica un servicio con 8 estaciones repartidas a lo largo del recorrido. c) Ubica el inicio de la primera estación de cada categoría (A, B y C) d) Plantea una ecuación mediante la cual se pueda modelar el cálculo de las distancias entre las estaciones de servicio y resuelve cada ecuación.	Estudiante 2 
PROBLEMA 2 “EL VIAJE” Dos grupos, A y B, del 3° año de un colegio planifican un viaje de estudio de aproximadamente 250 km. El grupo A quiere gastar todo su ahorro de \$ 220 000 y el grupo B también quiere gastar todo su ahorro, que es de \$ 200 000. Se sabe que los gastos fijos para un bus del grupo A son de \$ 70 000 más un cierto costo para cada kilómetro recorrido. Para el grupo B los gastos fijos son de \$	Estudiante 3 

60 000 más un cierto monto para cada kilómetro recorrido. a) Calcular para ambos grupos el costo para cada kilómetro del recorrido. b) Elaborar una ecuación mediante la cual se pueda modelar el cálculo del costo para cada kilómetro de recorrido en los diferentes grados. Considera lo siguiente para formular la ecuación de cada grado. $b + ax = c$ con b gasto fijo, a recorrido aproximado en km, c ahorro del grado.	

De acuerdo a los métodos empleados por los estudiantes se observó que 7 estudiantes emplearon la representación numérica para resolver los problemas apoyándose de la representación gráfica del mismo de esta manera se lograba promover la comprensión del problema. Mientras que el resto de los estudiantes lograban plantear una ecuación y resolverla de manera satisfactoria.

Un aspecto importante que se pudo mejorar con la aplicación de la propuesta fue enfatizar en la etapa Interpretación para la elaboración del modelo matemático en donde se obtiene la respuesta al problema en términos del problema, es decir una vez que se obtiene el valor de la incógnita se interpreta ese valor obtenido y se comprueba si se cumple con la igualdad.

3.1 Resultados y análisis de los resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en la aplicación de la propuesta didáctica llevada a cabo en los grupos “A y B” de primer grado para ello se caracterizan las respuestas de los estudiantes por medio de descripciones de los resultados teniendo como referente los registros en su cuaderno de apuntes y la aplicación de un cuestionario para evaluar los aprendizajes del contenido matemático.

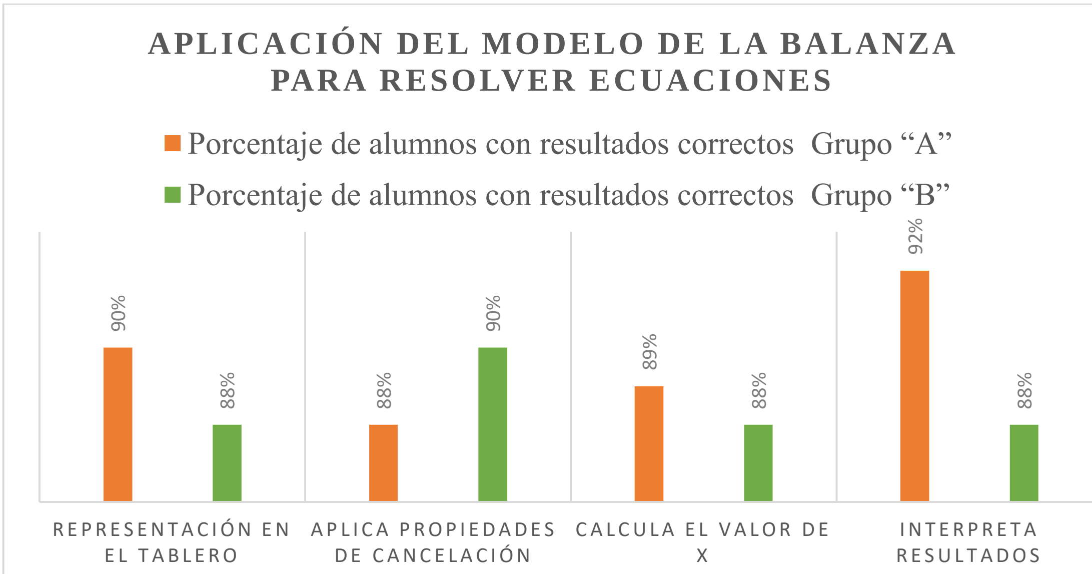


Grafico 4: Resultados de la aplicación de un modelo concreto

Como se puede notar en la gráfica de barras la mayoría de los estudiantes logran representar con el apoyo de las fichas trabajadas en clase, las condiciones planteadas en el problema (formular la ecuación). Esto se evidencia en ambos grupos cumpliendo con las reglas para la utilización del material, lo que muestra un avance en cuanto a la apropiación de las características y reglas para la resolución de una ecuación lineal. En ese sentido se puede decir que los estudiantes lograron exteriorizar sus representaciones mentales para hacer transformaciones correspondientes para hallar el valor de la incógnita.

Por otro lado, el 88% en el grupo "A" y 90% en el grupo "B" aplicaron de manera correcta las propiedades para la cancelación de términos (fichas) en ambos bloques del tablero, aquellos estudiantes no lo hicieron fue a causa de la confusión entre la incógnita y los términos involucrados. Una vez que se realizaron los movimientos en el tablero el 89% y 88% respectivamente encontró el valor de la incógnita. Finalmente, la mayoría de los estudiantes interpretaron los resultados obtenidos en términos del problema para dar valor al proceso mencionado.

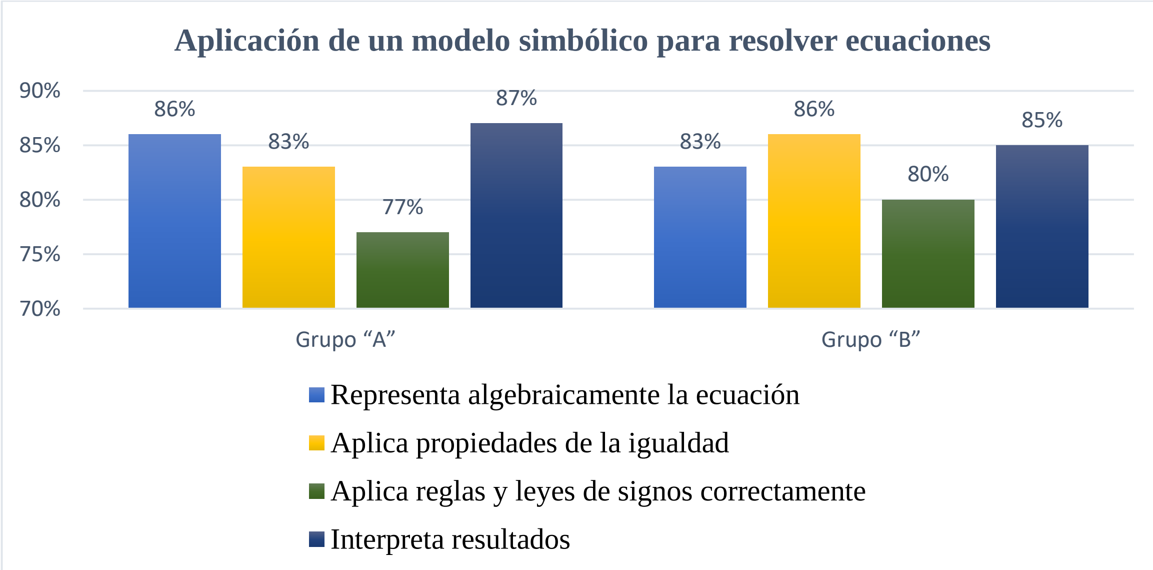


Grafico 5: Resultados de la aplicación del modelo simbólico

Con base en los resultados del grafico anterior se puede observar que el 86% de los estudiantes del grupo “A” y 83% de los estudiantes del grupo “B” pudieron representar algebraicamente la ecuación que modela el problema y los pasos seguidos en la resolución de la ecuación expresados en términos algebraicos, evidenciando que aplicaron correctamente las propiedades de la igualdad así como las reglas y leyes de los signos que influye en la obtención del valor de la incógnita para así interpretar y validar si fue correcto el algoritmo empleado lo cual represento en promedio el 86% de eficacia en ambos grupos. De esta manera se minimizaron la presencia de errores en el desarrollo del algoritmo correspondiente, mostrando la relevancia de la aplicación del modelo concreto.

Con respecto a los problemas planteados, estos se podían modelar empleando ecuaciones lineales con números enteros, de acuerdo al primer planteamiento y al análisis realizado se observa que los estudiantes aplican procedimientos ya trabajados en clase, con los cuales encuentran el valor de la incógnita, entre ellos se evidencio el uso de las representaciones graficas que ejemplifican y permiten comprender mejor el problema, todos los estudiantes realizaron el dibujo esquemático en donde aparecen los datos del problema.

Situación que permitió identificar los datos del problema, se observó que el grupo “B” tuvo mayor dificultad en este aspecto por lo cual se realizó una lectura grupal del problema para analizar en conjunto los datos relevantes del mismo. Uno de los métodos comúnmente utilizados en la escuela secundaria es el ensayo y error, que da cuenta del uso de procedimientos aritméticos lo cual a pesar de su validez en la obtención de resultados correctos repercute en el valor que tiene el lenguaje algebraico en las matemáticas reduciendo su impacto en la resolución de problemas, como consecuencia el estudiante no encuentra significado a los conceptos enseñados.

Por lo anterior resulta importante plantear la ecuación que dé cuenta de los procesos de abstracción realizados por los estudiantes, el 80% de los estudiantes del grupo “A” pudieron plantear la ecuación, mientras que en el grupo “B” fue el 77% una de las dificultades que se presentaron fue al plantear la ecuación para la secuencia C de la forma $b + ax = c$ en donde a representaba la cantidad de estaciones, por lo tanto los estudiantes obtuvieron dos ecuaciones, la primera $8x = 15$ la cual representa la ecuación correcta, la segunda fue $1.6 + 8x = 15$ que al resolverla obtienen 9 estaciones siendo incorrecto, el error fue considerar 1.6 como inicio para así empezar a colocar las 8 estaciones cuando en realidad se empieza al inicio del maratón.

Situación que repercute en la obtención de los valores en x, por lo anterior 7 estudiantes de ambos grupos presentaron resultados incorrectos. En la elaboración del modelo matemático se enfatiza en la Interpretación de los resultados obtenidos que permiten al estudiante saber si el modelo obtenido satisface las condiciones del problema.

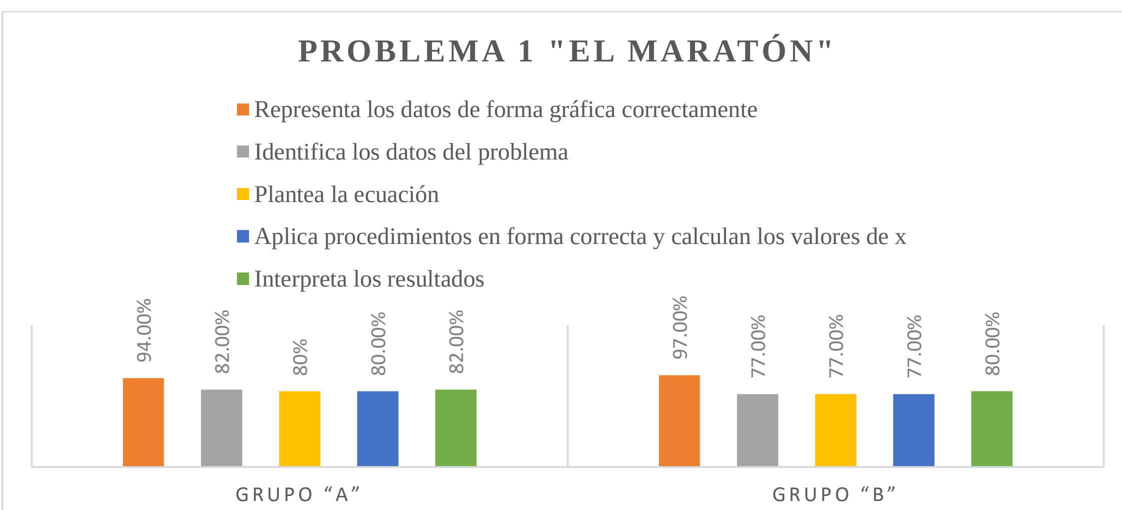


Grafico 6: Resultados del proceso de resolución de un problema matemático.

En el segundo planteamiento 2 se obtuvieron resultados favorables en los estudiantes es decir son hábiles en identificar los datos relevantes en el problema, sin embargo, al plantear la ecuación aun presentan dificultades el 80% de los estudiantes en el grupo “A”, mientras que en el grupo “B” fuer el 83% al resolver la ecuación los errores que se presentaron fueron de tipo procedimental al realizar cálculos incorrectos. Finalmente se obtuvo el resultado de la incógnita mostrando un avance significativo en la aplicación de los pasos para la creación de un modelo matemático.

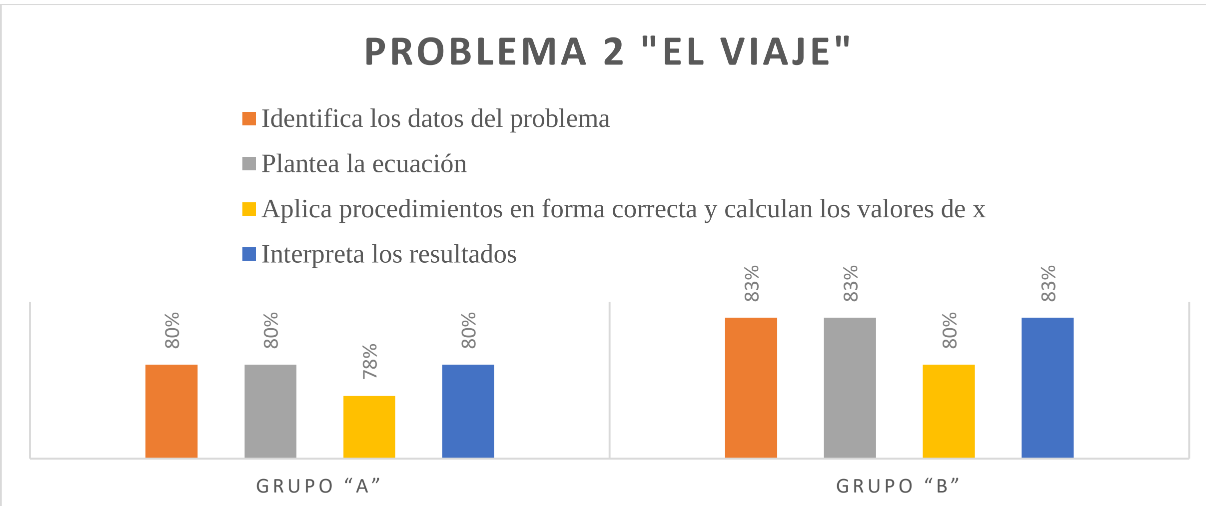


Grafico 7: Resultados del proceso de resolución de un problema matemático.

A través de la propuesta de trabajo los estudiantes desarrollaron diversas habilidades del pensamiento que les permitieron estructurar modos de actuar para el diseño de métodos de solución empleando conceptos, procedimientos, reglas matemáticas. Al resolver un problema matemático el estudiante desarrolla la habilidad para seleccionar el plan y ejecutar los algoritmos tal como se menciona en el método de los 4 pasos según Polya.

La habilidad para adquirir y utilizar nuevos conocimientos es fundamental para la asimilación de saberes matemáticos necesarios para la resolución de problemas en diversos contextos, para ello debe identificar, delimitar y aplicar los conocimientos que adquiere en el contexto escolar. Cuando el estudiante emplea un modelo matemático desarrolla la habilidad para transitar del lenguaje común del problema al lenguaje matemático, que da cuenta de la apropiación de los diferentes significados que adquieren los objetos matemáticos y su utilización en resolución del problema.

Una de las habilidades importantes en la actividad cognitiva del estudiante es la transición de las diferentes representaciones de un elemento matemático, con referencia a ecuaciones lineales el estudiante logro significar la representación gráfica del proceso de resolución para aplicar ese conocimiento en la representación simbólica del mismo.

Forma de Evaluación

La evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje es fundamental porque permite hacer una valoración no solo de tipo cuantitativa sino también cualitativa del avance que ha tenido el estudiante en la asignatura de Matemáticas, en el Plan de estudios (2017) la evaluación tiene un enfoque formativo porque se centra en los procesos de aprendizaje y da seguimiento al progreso de los alumnos. Es importante considerar que la evaluación será un medio para la mejora de los procesos de enseñanza y se tomaran como base para orientar las estrategias de aprendizaje.

En ese sentido, para evaluar el avance de cada estudiante se realizó un cuestionario que abarca conocimientos y aprendizajes fundamentales relacionados con la resolución de ecuaciones lineales. Los resultados obtenidos mostraron una mejoría en la comprensión de los conceptos, así como en el proceso para el planteamiento y resolución de ecuaciones.

Otro instrumento de que permitió evaluar los productos elaborados en clase como la resolución del cálculo matemático al inicio de la clase y la resolución de problemas fue la rúbrica, mientas que para evaluar el desempeño se utilizó una lista de cotejo. (Anexo 2)

CONCLUSIONES

En el aprendizaje de las Matemáticas se da un papel primordial a la resolución de problemas y a la actividad de modelización al considerarlas necesarias para el aprendizaje de la misma así mismo los estudiantes desarrollen habilidades y capacidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas al tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias e intervenir en diversas situaciones de la realidad.

La propuesta de trabajo esencia del tema de estudio, se aplicó como una estrategia en la enseñanza de ecuaciones lineales con números enteros partiendo de tres modelos fundamentales (pictórico o gráfico, concreto y simbólico), para significar los conceptos implícitos en la resolución de problemas que se modelizan con ecuaciones lineales observando el desempeño de los estudiantes durante las sesiones de clase y su incorporación en el aprendizaje de las matemáticas.

El uso de un modelo matemático en la enseñanza resulta eficaz porque se pretende introducir al estudiante hacia el aprendizaje del algebra a partir de modelos gráficos y concretos, para significar los procesos llevados a cabo en la construcción de un modelo simbólico que, de manera frecuente, resulta una tarea difícil de afrontar por los estudiantes de la escuela secundaria por el grado de abstracción que esto representa.

Una de las bondades de la aplicación de los modelos mencionados es que facilita la comprensión del concepto ecuación en un primer momento, para dar paso a la resolución de problemas matemáticos relacionados con ecuaciones de manera concreta manipulando fichas (rojas y azules), que representen los elementos de la ecuación planteada, de esta manera el estudiante pone en práctica diversas estrategias que permitan obtener el valor de la incógnita e interpretar ese resultado en términos del problema.

Una vez que se ha visualizado el proceso para la resolución de una ecuación resulta conveniente pasar a la aplicación del modelo simbólico que demanda el uso de las propiedades de la igualdad para resolver satisfactoriamente una ecuación, de esta manera se minimizan la presencia de errores procedimentales.

El modelamiento matemático como habilidad en el aprendizaje de la asignatura implica expresar situaciones de la vida cotidiana o de la matemática misma empleando lenguaje matemático, para desarrollar esta habilidad en los estudiantes se consideró el planteamiento de problemas en diversos contextos que le permitan aplicar, seleccionar y evaluar el modelo pertinente para cada tipo de problema.

En este proceso se inicia con un problema enmarcado en la realidad se analiza de acuerdo a los conceptos matemáticos que relacionan, de manera gradual se va reduciendo la realidad mediante la formulación de hipótesis que dan cuenta de posibles soluciones, se construye el modelo matemático y se resuelve el problema matemático finalmente se da sentido a la solución matemática en términos de la realidad, a la vez que se analizan las limitaciones del mismo.

El planteamiento de problemas que se pueden modelar con ecuaciones lineales representó en los alumnos un avance en su aprendizaje que se ve reflejado en la adquisición y desarrollo de habilidades necesarias para formular un modelo matemático apoyándose de las representaciones matemáticas (numérica, gráfica y simbólica). Los estudiantes demostraron que la generación de modelos matemáticos resulto una herramienta fundamental para mostrar la conexión entre la vida real y la matemática, es importante mencionar que, si bien no todos los alumnos afrontaron esta tarea con éxito, pero la mayoría ha retomado aspectos fundamentales de la modelación matemática para la capacidad de resolución de problemas.

Para la práctica docente en la escuela secundaria es necesario considerar situaciones concretas que propicien en los alumnos la construcción de modelos matemáticos de esta manera adquieren significado a los planteamientos presentados, además exigen la práctica y dominio de conceptos implícitos referentes al contenido ecuaciones que de alguna manera representa dificultades para los estudiantes. En la aplicación de la propuesta se detectó que una de las dificultades para la resolución de problemas fue formular el modelo matemático que posibilita llegar a la solución, que implica traducir el problema al lenguaje algebraico en atención a ello se enfatizó en los pasos para la creación de un modelo matemático.

Un aspecto fundamental en la actividad matemática es la validación de procedimientos, la cual representa la eficacia del modelo matemático construido, una vez que se obtiene la ecuación que modela el problema resulta necesario interpretar el resultado obtenido y encontrar la manera de cómo aplicarlo con la realidad del problema. Se considera importante complementar el enfoque de las matemáticas con la implementación de modelos matemáticos debido a que facilita la aplicación de estrategias y métodos útiles para la resolución de problemas.

Lo anterior da cuenta que la intervención del docente en el proceso de aprendizaje del alumnado es fundamental al intervenir y reorientar el trabajo realizado, brindando retroalimentación sobre los procesos seguidos para aclarar dudas y establecer la conexión entre conceptos y procedimientos surgidos en el lenguaje de las matemáticas, además fue necesario incluir aspectos motivacionales para favorecer actitudes positivas hacia el estudio de las Matemáticas.

El trabajo del docente en la actualidad enfrenta retos de una sociedad que está en constantes cambios en los diversos ámbitos de la vida, uno de ellos es el desarrollo de competencias digitales para usarla como un apoyo dentro del aula de clase en el aprendizaje de conocimientos matemáticos y estimular la creatividad en los estudiantes, otro reto es considerar al alumno en todas sus dimensiones para tener una educación integral.

Ante los retos planteados el docente requiere de la movilización de saberes para hacer cada vez más efectiva la labor docente, proponiendo en el aula de clase nuevas alternativas para la enseñanza de contenidos y que estos representen para el estudiante una oportunidad para seguir aprendiendo, por lo anterior es fundamental implementar estrategias considerando los intereses y necesidades del estudiante que le permitan construir se propio conocimiento y comprender las Matemáticas, lo cual hace evidente el desarrollo de distintas competencias profesionales y cualidades personales para hacer frente a las nuevas demandas sociales actuando con ética y profesionalismo en todo momento.

FUENTES DE CONSULTA

Aravena, M. (2008). Modelos Matemáticos a través de proyectos . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*, 49-92.

Barriga, F. y. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* .

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Camarena, P. (2011). La Matemática en el Contextode las Ciencias y la Modelación. *Educación Matemática, I*, 117-132.

Cid, E. (2000). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos.

D. Godino, J. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada.

Del Puy, M. (1994). *a solucion de problemas.* Madrid: Santillana.

Dirac, P. A. (s.f). El mundo de la Matemática: Modelos Matemáticos. *Fundación Polar*, 130-136.

González, A. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica. *Revista Iberoamericana en Educación Matemática*, 1-18.

Gutierrez, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Nickerson, R., & Perkins, D. (1987). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual.* Barcelona: Paidos Iberica .

Rico, L., & Encarnación, C. (2000). *La educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona : Horsori.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolucion de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Iberoamérica.

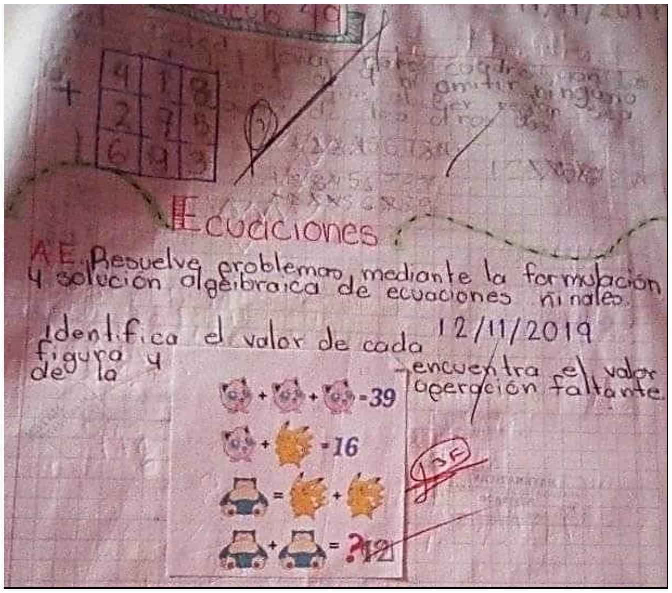
SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas.* México: SEP.

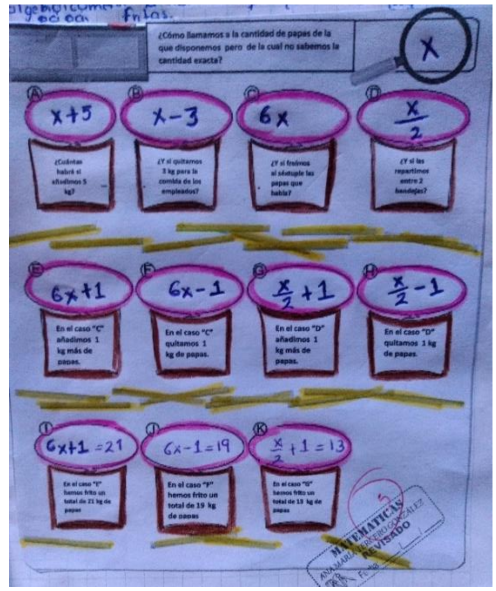
Sierra, L., & Joan, G. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. *JAEM*, 1-20.

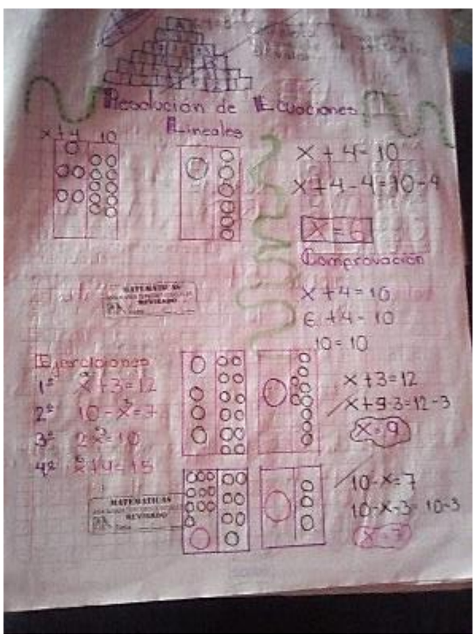
Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. Barcelona: Horsori.

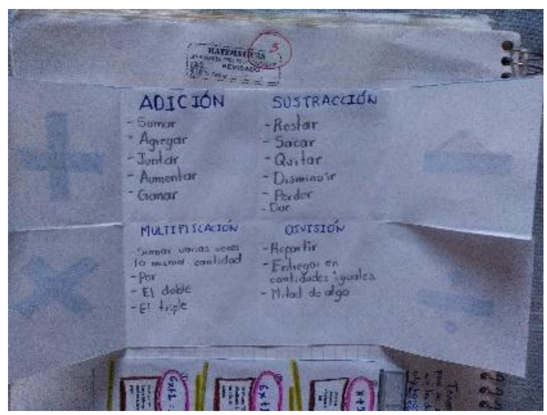
ANEXOS

Anexo 1. Evidencia Fotográfica: Muestra la aplicación de la propuesta didáctica empleando modelos matemáticos.









Anexo 2 INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN PARA LOS CÁLCULOS MATEMÁTICOS	CALIFICACIÓN
Entrego en el tiempo establecido el cálculo matemático	5 Firmas a los primeros 3 estudiantes
	3 Firmas a los siguientes 5 estudiantes
	2 Firmas a todos

Lista de cotejo para evaluar trabajo en clase

Nombre del alumno: _________________

Grado: ____ Grupo: ___ N.L:___

Aspecto a evaluar	Si	No
Entrego el trabajo en tiempo y forma.		
Mostro disposición hacia el trabajo		
Concluyo todas las actividades		
Observaciones:		

Escala estimativa para evaluar

Nombre del alumno: _________________

Grado: ____ Grupo: ___ N.L: ___

Aspectos	Regular (7)	Bueno(8)	Muy bueno(9)	Excelente(10)
Entrego el trabajo en tiempo y forma				
Mostro disposición hacia el trabajo realizado				
Resolvió todos los problemas				
Aplica estrategias construyendo modelos matemáticos sencillos.				
Interpreta y resuelve correctamente problemas que se modelan con ecuaciones lineales.				

Puntaje obtenido: ______ Calificación: ______

GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO

EDOMÉX
DECISIONES FIRMES, RESULTADOS FUERTES.

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense".

ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

LA COMISIÓN DE TITULACIÓN CON FUNDAMENTO EN LOS LINEAMIENTOS PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE TITULACIÓN EXPIDE EL:

DICTAMEN No. 52

A la C. Ana María Tercero González

QUIEN PRESENTÓ SU DOCUMENTO RECEPCIONAL CONCLUIDO Y FUE APROBADO CONFORME A LOS CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LA COMISIÓN DE TITULACIÓN. POR LO CUAL, CONOCEDORES DE SU RESPONSABILIDAD SE LE INVITA A CONTINUAR CON LOS TRÁMITES ESTABLECIDOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS, FORTALECIENDO ASÍ LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN.

SAN FELIPE DEL PROGRESO, MÉX., A 09 DE JULIO DE 2020.

Mtra. Luz María Serrano Orozco

Presidenta de la Comisión de Titulación

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y NORMAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN NORMAL Y FORTALECIMIENTO PROFESIONAL
SUBDIRECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL
ESCUELA NORMAL DE SAN FELIPE DEL PROGRESO

AV. DE LOS MAESTROS No. 1, SAN FELIPE DEL PROGRESO, COL. CENTRO, SAN FELIPE DEL PROGRESO, ESTADO DE MEXICO, C.P. 50640
TEL. (01 712) 10-4-21-93
normalsanfelipe@edugem.gob.mx