GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

EDOMÉX DECISIONES FIRMES, RESULTADOS FUERTES.

"2020. Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la Mujer Mexiquense".

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DEL ESTADO DE MÉXICO

FORMEMOS HOMBRES QUE FORJEN PUEBLOS

E N S A Y O

"INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA"

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

BENITO OLIVARES LÓPEZ

ASESOR:

FRANCISCO JAVIER GARCÍA REYES

TOLUCA, MÉXICO, 22 DE JULIO DEL 2020.

AGRADECIMIENTOS

Cuando uno escribe, agradecer se convierte inevitablemente en un acto de injusticia por cuanto es imposible abarcar a todas las personas que, de una u otra manera , ayudan en cualquiera de los procesos involucrados en el trabajo. Sin embargo quiero utilizar este espacio para agradecer:

A mis padres Silvia López y Benito Olivares, quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a las adversidades porque Dios está conmigo siempre.

A mi hermano Gerson por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona.

A mis profesores de la Escuela Normal Superior del Estado de México especialmente al Mtro. Francisco Javier García Reyes, al Dr. Apolo Castañeda Alonso y a la Mtra. Maribel Vargas Barrios quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos me hicieron crecer día a día como profesional, gracias a cada uno de ustedes por su paciencia, dedicación, apoyo incondicional y amistad.

Finalmente quiero agradecer sinceramente a los profesores Rafael Sánchez Juárez, Roberto Morales Centeno y Julieta Araujo Carreño por abrirme las puertas de su institución y permitirme culminar la última etapa como estudiante. Aprendí mucho de ustedes, siempre los llevo en el corazón.

ÍNDICE

GLOSARIO

Clase de equivalencia: Son representaciones numéricas de un mismo número racional, en el ámbito escolar se le denomina también como fracciones equivalentes.

Comparar: Examinar atentamente un objeto, una cosa o persona para establecer relaciones de semejanzas o diferencias con otra.

Concepto: Es una unidad cognitiva de significado, una idea abstracta o mental definida como una “unidad de conocimiento”. Los conceptos son construcciones o imágenes mentales, por medio de los cuales se comprenden las experiencias que emergen de la interacción con el entorno, a través de su integración en clases o categorías relacionadas con conocimientos previos.

Equipartición: Dividir un objeto o superficie en un número de partes iguales de acuerdo con parámetros claros previamente establecidos.

Fracción: Representación de una división a través de la siguiente notación: r $= \frac{a}{b}$ donde a es el dividendo, llamado numerador en la fracción, b es el divisor llamado denominador en la fracción que debe de ser distinto a cero y r es el cociente.

Interpretación: Actividad humana que consiste en dar significado a un suceso, un texto, palabra o símbolo. Abarca en general cuatro aspectos: denotación, ejemplificación, representación y expresión.

Magnitud continua: Una magnitud es continua si se presenta en cantidades que puede tomar infinitos valores dentro de cualquier intervalo finito, su cantidad se determina por el método llamado medición. El método de medición de la cantidad de una magnitud continua consiste en compararla con otra de su misma especie que se toma como unidad de medida, para determinar cuántas veces ésta cantidad contiene a la unidad. Por ejemplo el ancho de un campo de fútbol.

Magnitud discreta: Es aquella que puede asumir un número contable de valores. Su cantidad se determina por el método llamado enumeración. El método de enumeración de la cantidad de una magnitud discreta consiste en contar cuántas cantidades unidad contiene. Por ejemplo el número de jugadores de un equipo de fútbol.

Modelo: Es una construcción general dirigida a la representación del funcionamiento de un objeto a partir de una comprensión teórica distinta a las existentes.

Noción: Término empleado en filosofía que designa una idea o concepto básico que se tiene de algo. En muchos casos se considera que una noción es la representación mental de un objeto. En cualquier caso, 'noción' tiene un uso muy amplio y puede ser empleado como un equivalente de representación o idea.

Números racionales: Es el conjunto de todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero. Un número racional es cualquier elemento del conjunto de los números racionales.

Relación: Correspondencia o relación que hay entre dos o más cosas, objetos, entes, personas o animales.

Significado: Es la relación causal entre un pensamiento y un símbolo, el sentido que se le da a esta relación está determinada por la experiencia pasada en situaciones similares y por la experiencia presente.

INTRODUCCIÓN

Parte de la formación académica recibida en la Escuela Normal está relacionada con las prácticas de observación, ejecución y de trabajo en condiciones reales que permitieron identificar problemáticas relacionadas con la didáctica de las fracciones. Una de las actividades necesarias para lograr el perfil de egreso del estudiante normalista es la realización de prácticas de ejecución por periodos prolongados de tiempo que son realizadas en los semestres 7 y 8 de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas. El desarrollo de este trabajo se realizó durante las jornadas de práctica en una Secundaria General del municipio de Xonacatlán en el Estado de México, en donde se buscó conocer las interpretaciones del concepto de fracción en estudiantes de segundo grado de secundaria.

El ensayo se divide en seis capítulos, cada uno de ellos de distinta naturaleza. En el primero se explicitan el tema de estudio, las preguntas, propósitos y objetivos que guiaron el trabajo durante todo el proceso, se hace también una descripción del contexto y de la población estudiantil y de la escuela.

En el segundo se describen algunos aspectos cognitivos que son característicos de los estudiantes de segundo grado de secundaria y cómo estos procesos repercuten de una u otra manera en el aprendizaje.

En el tercer capítulo se da a conocer el punto de partida desde el cual se buscó información para diseñar e implementar estrategias que permitieran observar la evolución de los aprendizajes en los estudiantes participantes en la estrategia de intervención a través de la aplicación de un cuestionario diagnóstico.

Los capítulos 4 y 5 de este ensayo dan cuenta de cómo se aborda el tema de las fracciones desde los inicios escolares, es decir se hace un recorrido por el currículo propuesto que muestra al lector las orientaciones didácticas y libros de texto que guían a los docentes desde la Educación Primaria hasta la Secundaria para tratar de comprender en qué situación se encuentran los estudiantes al momento de cursar el segundo grado de Secundaria, además se identifica el énfasis del tema en el trayecto formativo en la Educación Básica. También se hace un recorrido por los estudios relacionados a las fracciones en el campo de la Matemática Educativa en donde se revisan los textos de distintos autores que nos ayudan a dar claridad a los diversos procedimientos, relaciones y significados que están presentes tanto en nuestros alumnos como en las distintas bibliografías que se proponen en el currículo de la Educación Básica.

Finalmente, en el capítulo 6 se describen las técnicas, métodos e instrumentos utilizados con los alumnos para finalmente presentar conclusiones que dan respuesta a las preguntas que originalmente se plantearon en el documento. Una aspiración personal es que, sean de ayuda para quienes están o estarán frente a un grupo y se enfrenten a situaciones en las cuales se ponga en juego el uso de la fracción.

CAPÍTULO 1: EL TEMA DE ESTUDIO

1.1. DELIMITACIÓN DEL TEMA

El tema de estudio de este trabajo son las fracciones que, en los planes de estudio de Secundaria corresponde al Tema *Número,* perteneciente al Eje *Número, álgebra y variación* de acuerdo con los Aprendizajes clave para la educación integral (SEP, 2017b), el tema tiene sus antecedentes en el tercer grado de la educación primaria cuando se abordan planteamientos relacionados a las unidades de medida como medios y cuartos de litro o de kilogramo.

Este ensayo se encuentra en la línea temática 1: ***Los adolescentes y sus procesos de aprendizaje***, en la que se pretende describir las habilidades que desarrollan los estudiantes en un ambiente controlado en el que se trabaja con tareas relacionadas a las fracciones, además de “lograr tener conocimiento de los adolescentes, así como explicaciones relativas a cómo un mayor conocimiento de un grupo pequeño de adolescentes permite clarificar formas de planear actividades de enseñanza considerando sus características”, específicamente en el inciso b ***los procesos que siguen los estudiantes para construir una noción o nociones de la especialidad***. (SEP, 2002)

1.2. PREGUNTAS QUE SE PRETENDE RESPONDER

- ¿Cuáles son las concepciones asociadas a las fracciones, que están presentes en los estudiantes de segundo grado de secundaria?
- ¿Qué obstáculos existen en la enseñanza de los contenidos relacionados con las fracciones?
- ¿Abordar a las fracciones desde sus diferentes significados amplia el campo semántico que los estudiantes tienen sobre ellas?

1.3. OBJETIVOS

- Conocer los significados asociados al concepto de fracción que los estudiantes de segundo grado de secundaria han construido a través de su trayectoria académica.
- Describir las interpretaciones de los procesos que los estudiantes siguen para justificar sus respuestas ante situaciones que impliquen el uso de fracciones.

1.4. PROPÓSITO

- Utilizar las concepciones aisladas que tienen los estudiantes para construir las relaciones entre distintos significados de las fracciones a través de una secuencia de enseñanza.

1.5.CONTEXTO

1.5.1. Contexto Social

El municipio de Xonacatlán es considerado una zona urbana, (INEGI, 2010) tiene una población de aproximadamente 51, 546 habitantes según datos de la Encuesta Intercensal de 2015. Las actividades económicas predominantes de la región son el comercio, la ganadería, agricultura y la manufacturación de peluches. Sin embargo, la comunidad tiene características de ambos tipos de zona rural y urbana, por lo que he considerado apropiado llamarla *semiurbana.*

1.5.2. Contexto escolar

La Escuela Secundaria se ubica en el Barrio "La Manga", la jornada escolar comienza a las 7:30 h. y termina a las 13:40 h. debido a que, cuando la escuela fue fundada y ubicada en ese lugar, los caminos no contaban con alumbrado público, lo que ocasionaba accidentes y exponía a los estudiantes a la inseguridad. Actualmente, la escuela y sus alrededores cuentan con los servicios públicos básicos como luz eléctrica, agua potable y drenaje.

La modalidad de la secundaria es general, solo imparte clases en el turno matutino, se encuentran inscritos una matrícula de 366 alumnos los cuales se encuentran en una edad de entre 11 a 15 años, cada grado cuenta con tres grupos y en promedio en cada uno de ellos se encuentran inscritos 45 alumnos.

Tiene una planta docente de dieciséis profesores horas – clase, dos empleados que se encuentran en el área administrativa, una trabajadora social, una docente encargada del área de prefectura y un empleado del área de intendencia, subdirectora y director.

1.5.3. Contexto áulico

La secundaria cuenta con un total de 14 aulas, entre las que se encuentran un laboratorio, sala de cómputo con 20 equipos, una biblioteca, aula telemática equipada con proyector y pantalla, un auditorio, dos canchas de basquetbol, un patio cívico, una cancha de fútbol soccer y un aula destinada a la impartición de la asignatura de inglés. Cada grado dispone de tres aulas. Los salones de clases tienen un espacio suficiente para la impartición de clases, cuentan con butacas, en su mayoría de plástico, un escritorio para el docente, pizarrón blanco, un estante para guardar materiales de higiene personal para los alumnos y con ventilación suficiente, no cuentan con cortineros por lo que, a ciertas horas del día la luz del sol hace que el reflejo en el pizarrón no permita la visibilidad en algunas áreas del salón.

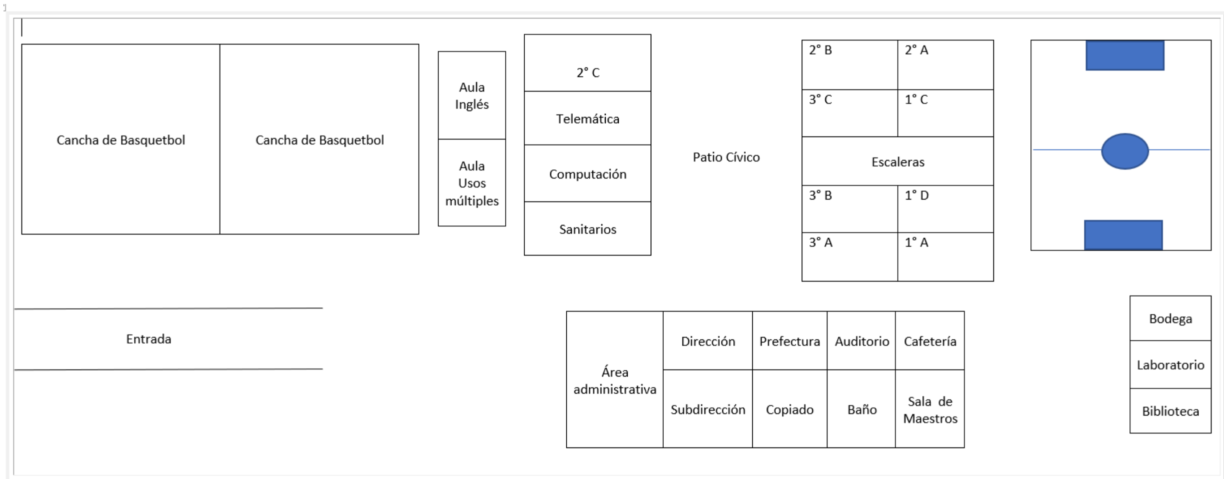


Figura 1. Croquis de la escuela.

Al ser un centro escolar con una población estudiantil que, en su mayoría, proviene de familias comerciantes o dedicadas a la industria, es importante señalar que el tema de estudio (las fracciones) es conocido por los estudiantes desde el ámbito del comercio, es decir se encuentra presente en los estudiantes gracias a las actividades matemáticas que realizan en su vida cotidiana tales como hacer proporciones, realizar operaciones aritméticas que incluyen calcular medios, tercios o cuartos.

CAPÍTULO 2. LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA: ASPECTOS COGNITIVOS

La adolescencia es la etapa de la vida que se encuentra entre la niñez y la adultez en la cual acontecen cambios significativos tanto físicos, emocionales y cognitivos. Es de importante para los docentes de secundaria conocer las características del desarrollo humano para comprender las situaciones asociadas al aprendizaje que se viven en la vida cotidiana escolar.

2.1 EL ADOLESCENTE Y LOS PROCESOS COGNITIVOS

La adolescencia se trata de una etapa de transición en la que ya no se es niño, pero en la que aún no se tiene el estatus de adulto. Es lo que (Erickson, 1968) denominó una «moratoria social», un compás de espera que la sociedad da a sus miembros jóvenes mientras se preparan para ejercer los roles adultos. Existe un debate entre lo biológico y lo ambiental para explicar el desarrollo del adolescente pues algunos consideran que los cambios biológicos que acompañan a la pubertad son los responsables de las transformaciones psicológicas propias del periodo, otros hacen énfasis en los aspectos sociales y conceptuales, como los roles y tares que demanda la sociedad. (Palacios, Coll y Marchesi, 1998).

La perspectiva del aprendizaje sostiene que el desarrollo es el resultado del aprendizaje, el cual se define como un cambio de conducta duradero basado en la experiencia o en la adaptación al ambiente. (Papalia, 2012). Una de las teorías que se usan en el aula de clases es la del condicionamiento operante, que a diferencia del condicionamiento clásico involucra el comportamiento voluntario, es decir un individuo es capaz de aprender a operar en el ambiente de manera natural, en otras palabras una persona tiende a repetir una respuesta que fue reforzada por consecuencias deseables y la cual sustituye al castigo. De esta manera el reforzamiento es el proceso por medio del cual se fortalece una conducta y aumenta la probabilidad de que se repita, para el caso particular de la enseñanza de las fracciones es necesario repasar conocimientos relacionados con las fracciones durante el transcurso de la educación básica. El reforzamiento es más eficaz cuando sigue inmediatamente a la conducta. Si una respuesta deja de reforzarse, al cabo se extingue, es decir, vuelve a su estado original.

La teoría del aprendizaje social de Albert Bandura (1989) sostiene que el aprendizaje se obtiene por observación e imitación de modelos. En el caso de la educación secundaria el aprendizaje puede darse entre pares cuando las dudas relacionadas a cierto tema no son aclaradas del todo por el docente. También se obtiene por imitación al profesor, aunque este enfoque se ve reducido a los procesos algorítmicos en el caso de las matemáticas.

La perspectiva cognoscitiva es el miembro más antiguo y el más joven de la comunidad psicológica y es la aproximación que ve el aprendizaje como un proceso mental activo de adquisición, recuerdo y utilización de los conocimientos, (Woolfolk, 1996) esta perspectiva abarca teorías de influencia organicista y mecanicista . Incluye la teoría de etapas cognoscitivas de Piaget y la teoría sociocultural del desarrollo cognoscitivo de Vygotsky . También comprende el enfoque del procesamiento de la información y las teorías neopiagetianas , que combinan elementos de la teoría del procesamiento de la información y de Piaget. A continuación repasaremos algunas de ellas:

2.1.1. Teoría de las etapas cognoscitivas de Piaget

Uno de los teóricos de mayor reconocimiento en el ámbito educativo es el biólogo y epistemólogo suizo Jean Piaget. Propuso que el desarrollo cognoscitivo comienza con una capacidad innata de adaptarse al ambiente. Este crecimiento cognoscitivo ocurre a través de tres procesos relacionados: organización, adaptación y equilibración.

La *organización* es la tendencia a crear categorías, al observar las características que tienen en común los individuos de una categoría. Según Piaget, las personas crean estructuras cognoscitivas cada vez más complejas, llamadas *esquemas* , que son modos de organizar la información sobre el mundo, que gobiernan la forma en que los niños piensan y se conducen en una situación particular. A medida que los niños adquieren más información, sus esquemas adquieren mayor complejidad. La *adaptación* es el termino con que Piaget se refería a la forma en que los niños manejan la nueva información con base en lo que ya saben. La adaptación ocurre a través de dos procesos complementarios; la asimilación y la acomodación, la asimilación , que implica tomar nueva información e incorporarla a las estructuras cognoscitivas previas y la acomodación , que consiste en ajustar las estructuras cognoscitivas para que acepten la nueva información.

La *equilibración* es una lucha constante por lograr un balance y dicta el cambio de la asimilación y acomodación.

Piaget sostenía que el desarrollo cognoscitivo ocurre en cuatro etapas universales y cualitativamente diferentes (véase anexo E) y que cada etapa surge en una época de desequilibración , en la que la mente del niño se adapta aprendiendo a pensar de otra manera o a modificar su forma de pensar. De la infancia a la adolescencia, las operaciones mentales evolucionan del aprendizaje basado en las actividades sensoriales y motrices simples hasta el pensamiento lógico abstracto.

2.1.2. Teoría sociocultural de Vygotsky

El psicólogo ruso Lev Semenovich Vygotsky, se concentró en los procesos sociales y culturales que guían el desarrollo cognoscitivo de los niños. La teoría sociocultural de Vygotsky (1978) destaca la participación activa de los niños con su entorno, Vygotsky concebía al crecimiento cognoscitivo como un proceso colaborativo. Los niños aprenden a través de la interacción social, en las actividades compartidas los niños internalizan los modos de pensar y actuar de su sociedad y se apropian de sus usos. Si hay una característica que define a los alumnos de secundaria es que la escuela es un centro de socialización y esta no se limita únicamente a las relaciones interpersonales sino que también incluye a los procesos de aprendizaje en el aula. Según Vygotsky, los adultos o compañeros más avanzados deben ayudar a dirigir y organizar el aprendizaje de un niño para que este pueda dominarlo e internalizarlo. Esta guía es más eficaz para hacer que los niños crucen la zona de desarrollo próximo (ZDP) , la brecha que hay entre lo que pueden hacer y lo que todavía no están listos para conseguir por ellos mismos, pero que, con la guía adecuada, lograrían.

Algunos seguidores del estudio de Vygotsky (Bruner y Ross, 1976) se refieren al andamiaje como el apoyo temporal que padres, maestros y compañeros dan a un individuo para que cumpla con su tarea hasta que el puede hacerla por sí mismo, por ello se recomienda utilizar estrategias de aprendizaje que favorezcan el trabajo colaborativo o el trabajo autogestivo.

2.1.3. Perspectiva contextual

Según la perspectiva contextual , el desarrollo solo puede entenderse en su contexto social. Considera que el individuo no es una entidad separada que interactúa con el ambiente sino que es parte indispensable de este. La teoría bioecológica (Bronfenbrenner y Morris, 1998) señala cinco niveles de influencia ambiental que van del más pequeño al más amplio: *microsistema, mesosistema, exosistema, macrosistema y cronosistema*. Para entender el desarrollo tenemos que considerar a las personas en el contexto de estos ambientes múltiples.

Un *microsistema* abarca el entorno cotidiano del hogar, escuela y trabajo. Comprende las relaciones directas con la pareja, hijos, padres, hermanos, maestros patrones o colegas.

El mesosistema puede incluir conexiones entre el hogar y la escuela o entre la familia y el grupo de pares. Por ejemplo el mal día en el trabajo del padre puede afectar en la vida del hijo de manera indirecta, a pesar de no haber estado nunca en el lugar de trabajo del padre, el niño se ve afectado por él.

El *exosistema* consiste en los vínculos entre un microsistema y sistemas o instituciones externas que afectan de manera indirecta a una persona como por ejemplo los contenidos de la televisión y su repercusión en la conducta.

El *macrosistema* está formado por los esquemas culturales generales, como las ideas e ideologías dominantes y los sistemas económicos – políticos. Se podría pensar en los efectos que tiene una persona que vivir en una sociedad socialista o capitalista.

El *cronosistema* agrega la dimensión temporal: el cambio o la constancia de una persona y del ambiente. Aquí se incluyen los cambios en la estructura familiar , lugar de residencia o empleo, así como los grandes cambios culturales, como guerras y ciclos económicos, como los periodos de recesión o de relativa prosperidad. Según Bronfenbrenner, una persona no es solo un resultado del desarrollo, sino que también lo forma. Las personas afectan su desarrollo a través de sus características biológicas y psicológicas, talentos y habilidades, incapacidades y temperamento.

2.2. CONOCIMIENTO Y APRENDIZAJE

(Pozo, 1999) señala que aprender un conocimiento implica tejer redes más complejas y mejor organizadas. Los expertos en un dominio organizan su memoria de forma diferente a los novatos. Por lo cual la realización de actividades de aprendizaje con una organización y metas explicitas favorece no solo el aprendizaje sino la reorganización de las estructuras de la memoria. La enseñanza debe promover el cambio de los conocimientos previos mediante actividades planificadas que activen los procesos adecuados. El aprendizaje de las fracciones puede considerarse como un aprendizaje que se encuentra en la memoria de trabajo pues el aprendizaje se encuentra almacenado y se usa hasta que los estudiantes se vean en la necesidad de hacerlo limitándose a resolver de manera mecánica o algorítmica ejercicios propuestos en el currículo de educación básica, no se le dan un sentido cotidiano al conocimiento de las fracciones para que estas puedan formar parte de lo que Pozo define como memoria permanente.

(Woolfolk, 1996) hace una categorización de los tipos de conocimiento los cuales se muestran en la siguiente tabla:

Tipo de conocimiento	Descripción	Conocimiento general	Conocimiento de dominio específico
Declarativo	Es aquel que puede declararse mediante palabras y sistemas de símbolos de cualquier base.	Los horarios en los que una oficina está abierta.	La definición de un concepto.
Procesal	Implica saber cómo hacer algo como es el caso de las operaciones con fracciones.	Cómo utilizar un procesador de textos, conducir un automóvil.	Resolver una ecuación
Condicional	Implica saber cuándo y por qué es decir es la aplicación de los conocimientos declarativos y conceptuales	Cuándo leer entre líneas y cuándo leer con detenimiento	Cuándo emplear una fórmula para calcular un volumen.

Tabla 1. Tipos de conocimiento.

Nótese que, al trabajar con los contenidos relacionados a las fracciones en la educación secundaria es necesario emplear los tres tipos de conocimiento, porque se necesita ¿conocer qué es una fracción? ¿qué puedo hacer con ellas? y ¿cómo y en dónde puedo utilizar los conocimientos relacionados a las fracciones?

Por último (Pozo, 1996) señala tres componentes del aprendizaje: resultados, procesos y condiciones. Los *resultados* del aprendizaje también llamados contenidos, que consistirían en lo que se aprende, o si prefiere, a partir de los rasgos anteriores lo que cambia como consecuencia del aprendizaje (por ejemplo las fracciones). Los *procesos* hacen referencia a cómo se producen esos cambios mediante mecanismos cognitivos, a la actividad mental de la persona que está aprendiendo (la atención y percepción a los aspectos relacionados con las fracciones). Las *condiciones* del aprendizaje se entienden como la puesta en práctica de los procesos de aprendizaje (la resolución de problemas que impliquen el uso de las fracciones).

CAPÍTULO 3: EL CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

3.1 APLICACIÓN Y ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO DE DIAGNÓSTICO

Diversos investigadores han reconocido que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación Perera y Valdemoros (2007) citado por Flores (2010), pues es en el transcurso de esta donde se formalizan, sin embargo estas resultan tener pocos significados durante su educación primaria, ya que es concebido como el “partir algo a la mitad” o como números que se tienen que operar (sumar y restar) sin aun tomar conciencia del significado de estas.

Como primera actividad, se llevó a cabo un cuestionario de diagnóstico a un grupo de 6 estudiantes de segundo grado de secundaria durante una hora clase (50 minutos) la elección de los participantes se hizo de manera aleatoria. El cuestionario contiene 5 planteamientos que involucran a la fracción desde algunos de sus significados: en una figura geométrica regular, como un reparto equitativo, como una proporción, en la recta numérica y como una parte de un todo. La elección de los planteamientos se realizó con base en los temas que a través del trayecto formativo en la Escuela Normal detecté son los que mayor dificultad representan a los estudiantes de secundaria. En capítulos posteriores se abordará a las fracciones desde la bibliografía de la Secretaría de Educación Pública en la Educación Básica

3.1.1. Planteamiento 1. El hexágono

¿Qué fracción del hexágono representa el triángulo?

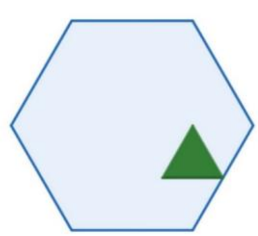


Figura 2. El hexágono.

El primer planteamiento involucra dividir en partes iguales (triángulos equiláteros) un hexágono regular dada una partición. La unidad de referencia en este caso es un hexágono y un triángulo equilátero, el cual se desconoce a que parte representa del total del polígono regular. La razón por la cual este planteamiento formo parte del cuestionario de diagnóstico es porque ejercicios como este ya se plantean desde el cuarto grado de primaria.

Solución a la situación: Al tener una unidad de referencia y una partición de esta, es posible obtener el resultado trazando triángulos con las mismas medidas, por toda la superficie del hexágono regular.

Habiendo realizado la división del polígono regular, se aprecian dos cosas: la primera es que el polígono regular se divide en 24 partes iguales y la segunda, que la parte marcada corresponde a $\frac{1}{24}$ de la superficie del hexágono. Lo cual responde la pregunta planteada.

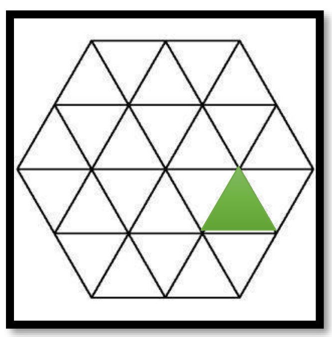


Figura 3 . División de un hexágono en partes iguales.

3.1.2. Planteamiento 2. El reparto de las pizzas

El planteamiento numero dos fue tomado del *Libro para el maestro* de la Secretaría de Educación Pública. El problema se ubica en el tema correspondiente a las fracciones, tema en el que se especifica lo siguiente: El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra (SEP, 2002). Por ello fue considerado como parte del cuestionario de diagnóstico.

El objeto de este planteamiento es conocer los significados que se encuentran presentes en él, así como las operaciones que los estudiantes realizaron para dar sentido a sus resultados. Además se plantean dos preguntas.

> *Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad?*

Figura 4. El problema de las pizzas.

Solución a la primer pregunta: Corresponde al reparto de dos pizzas entre 3 amigos, la respuesta se obtiene al dividir 2 (la unidad) entre 3; es decir $\frac{2}{3}$, cada uno recibirá entonces $\frac{2}{3}$ de pizza. Se entiende que cada pizza en un principio debe de ser divida en tres partes.

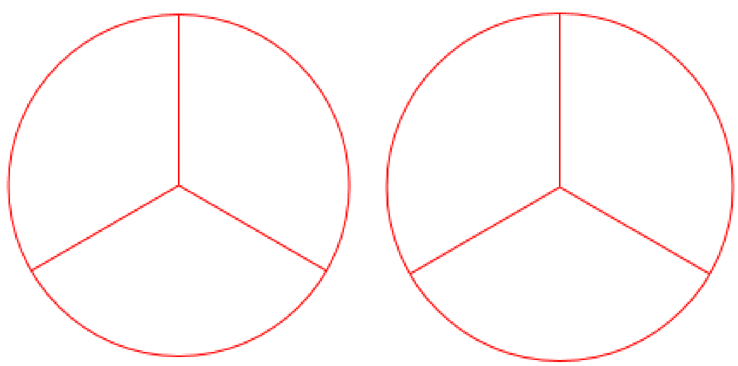


Figura 5. División de las pizzas en tres partes

Solución a la segunda pregunta: Al llegar un cuarto amigo, el denominador de la fracción cambia y ahora se tiene que repartir entre 4 personas, por lo tanto ambas pizzas deberían de ser divididas en cuatro partes iguales, es decir cada parte corresponde a la mitad de cada pizza. Sin embargo, al haber llegado tiempo después de haber hecho la primera partición resultaría complicado volver a realizar una nueva partición con las pizzas originales. Para resolver la situación, cada uno deberá de convidarle al amigo recién llegado una parte "x" de $\frac{2}{3}$, lo cual deberá de resultar igual a $\frac{1}{2}$ de la unidad original.

Algebraicamente se tiene:

$$\frac{2}{3} - x = \frac{1}{2}$$

Convirtiendo a su común denominador: $\frac{4}{6} - x = \frac{1}{2}$

Despejando*:* $x = \frac{1}{6}$

Comprobando: $\left(\frac{1}{6}\right) 3 = \frac{3}{6} que\ es\ igual\ a\ \frac{1}{2}$

Por lo tanto, cada uno de los 3 amigos que llegaron primero cedieron $\frac{1}{6}$ de la pizza lo que es igual a $\frac{1}{2}$ de las dos pizzas.

3.1.3. Planteamiento 3. Determinar el número que se indica en la recta.

Este planteamiento fue retomado de un estudio acerca de las fracciones (Flores, 2010). En él, se propone reflexionar acerca de la posición del cero, el orden y la escala en la recta numérica, además de que ejercicios de este tipo se plantean desde cuarto grado de primaria en adelante.

En la siguiente recta numérica el segmento (0, 5) esta dividido en tres partes iguales. Anota el número que corresponde al punto señalado con la flecha.

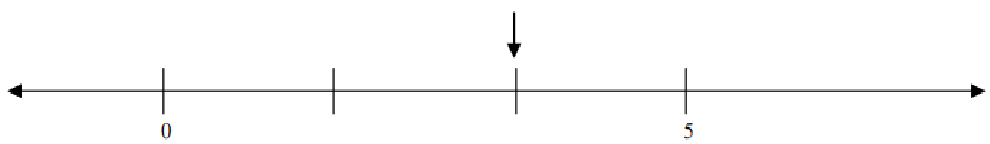


Figura 6. Ubicar el número en la recta.

Solución: La solución a la pregunta se da al dividir en tercios el segmento de recta, la solución por lo tanto debería ser $\frac{2}{3}$ de 5, o bien su equivalente a 3.33…Según (Flores, 2010), el ejercicio incluye las siguientes nociones ligadas a la fracción: *parte todo, partición, medida, cociente, operador, decimal (periódico). Así como las operaciones producto de fracciones* (e implícitamente la adición de fracciones); la equivalencia de fracciones y la equivalencia de operaciones.

3.1.4. Planteamiento 4. La mezcla de pinturas

Esta situación se retomó del libro de texto (García, 2008) citado por (Flores, 2010), implica el tomar una fracción de otra fracción. Cabe destacar la importancia que adquiere la noción parte todo dentro del problema, ya que si no se tiene cuidado con la pregunta que se realiza en esta situación podría errarse en la interpretación del problema (Flores, 2010)

> Una mezcla de pintura está compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca representan juntas 3/5 de la mezcla. La roja es 1/4 de esos 3/5. ¿Qué fracción de **toda la mezcla** representa la pintura roja?

Figura 7. El problema de la mezcla de pinturas.

La solución al problema, corresponde a calcular $\left(\frac{3}{5}\right)\frac{1}{4}$ cuyo resultado es igual a $\frac{3}{20}$ el cual puede representarse de la siguiente manera:

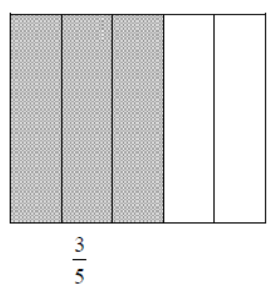
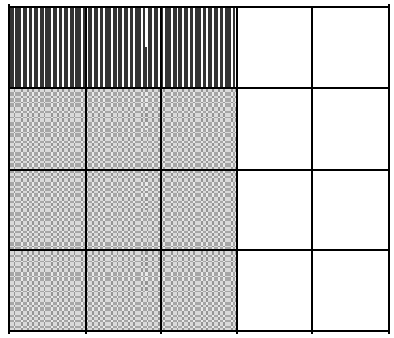


Figura 8. Representación de la fracción $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$.



$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{20}$$

Figura 9. Representación de la fracción $\frac{1}{4}$ ***de*** $\frac{3}{5}$.

3.1.5. Planteamiento 5. Las jarras de jugo

Este problema fue extraído de un libro de texto de Cantoral, Cabañas, Castañeda, Farfán, Lezama, Martínez, Molina, Montiel y Sánchez (2008) de primer grado, problema que se encuentra ubicado como ejercicio de profundización en el tema referido a problemas multiplicativos.

> En dos jarras iguales, tenemos una mezcla de agua con jugo de naranja. En una de las jarras, la proporción es de 3:7, es decir, de tres vasos de agua y 7 de jugo de naranja, mientras que en la otra hay una proporción de 3:5. Si juntamos el contenido de las dos jarras, ¿Cuál será la proporción?

Figura 10. El problema de las jarras de jugo.

Solución: Los contenidos de las jarras son iguales, lo que posibilita la suma $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}$. Al convertir a un común denominador: $\frac{12}{40}+\frac{15}{40}$, al sumarse, es decir al juntar el contenido de ambas jarras se obtiene $\frac{27}{40}$ de agua. Con respecto al jugo se tiene: $\frac{7}{10}$ en la primer jarra y $\frac{5}{8}$ en la segunda, al convertir a fracciones equivalentes con común denominador: $\frac{28}{40}+\frac{25}{40}$ que al ser sumados dan como resultado $\frac{53}{40}$. Este procedimiento soluciona directamente el problema pues reescribiendo los resultados se puede decir que por cada 27 partes de agua hay 53 de jugo. El planteamiento involucra varios de los significados de la noción de fracción como el de razón, parte – todo y fracción equivalente lo que implica una mayor comprensión de el para su correcta resolución.

3.2. LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

A continuación, se muestran las respuestas de seis estudiantes de segundo grado de secundaria a las 5 preguntas del cuestionario de diagnóstico.

3.2.1. Planteamiento 1. Dividir el hexágono en partes iguales

A continuación, se muestran las respuestas de Eduardo y Jaasiel, quienes responden correctamente al dividir en 24 triángulos la figura para llegar a la respuesta correcta.

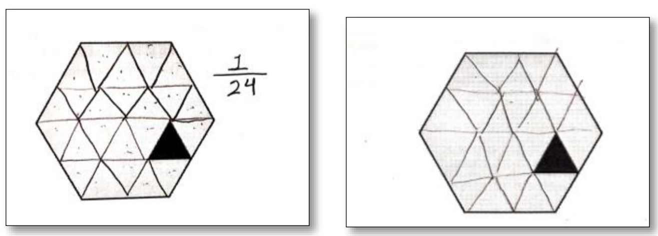


Figura 11. Las respuestas de Eduardo y Jaasiel.

De igual manera, Gustavo, Mildred y Valeria, tienden a dividir la figura en triángulos aparentemente iguales entre sí hasta cubrir la superficie del hexágono y darse cuenta que, en efecto el triángulo marcado en la pregunta corresponde a $\frac{1}{24}$ del total.

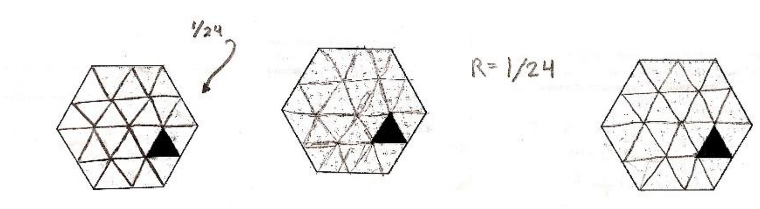


Figura 12. Las respuestas de Gustavo, Mildred y Valeria.

Por su parte Eliasib realiza también, una división del hexágono en triángulos, sin embargo se aprecia que estos no aparentan ser del mismo tamaño, lo que genera una división errónea y por tanto una respuesta equivocada pues indica que el triángulo marcado en la pregunta corresponde a $\frac{1}{32}$ de la superficie total del polígono.

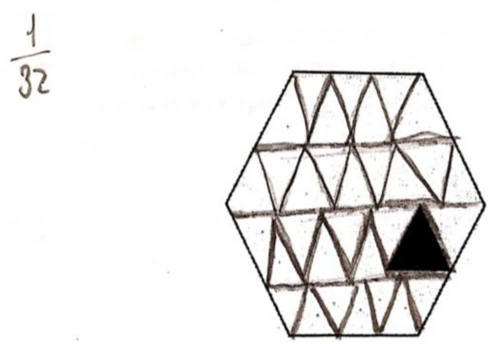


Figura 13. La división de Eliasib.

3.2.2.Planteamiento 2. El problema de las pizzas

En una primera categoría, Gustavo y Jaasiel intentan responder a la primera pregunta realizando una división y una suma respectivamente, lo que genera una respuesta incorrecta, posteriormente repiten el procedimiento esta vez dividiendo y sumando 4 por la cantidad de amigos entre los que había de repartir ambas pizzas.

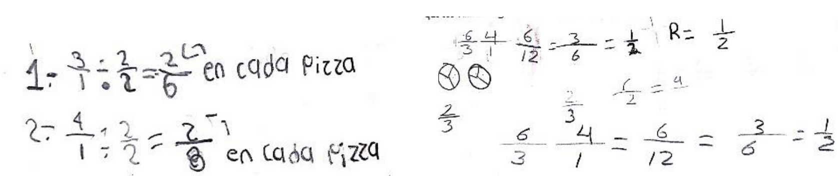


Figura 14. La solución propuesta por Gustavo y Jaasiel.

En la segunda categoría se tienen las respuestas de Eliasib, Eduardo y Mildred, quienes en un intento por resolver la primera pregunta, deciden dividir las pizzas en tres partes, sin embargo una vez realizada la equipartición, se olvidan que la unidad de referencia son dos pizzas y no una, lo cual genera una confusión al tratar de darle solución a la segunda pregunta pues, señalan que en un inicio le corresponde 1/3 de pizza a cada uno, hablando de cada pizza, sin embargo olvidan sumar ambos tercios para obtener un primer total y así dar responder la pregunta correctamente. Posteriormente, dividen las pizzas en cuatro partes para repartirlas entre cuatro, olvidando la primera partición, los estudiantes no logran hacer una conexión entre ambas preguntas, lo que genera que, su respuesta sea 1/4 de cada pizza, que al sumar y simplificar en ambas pizzas da como resultado 1/2. Estas respuestas se acercan a la solución del problema ya que cada uno de los tres amigos entre los que se repartió inicialmente la pizza deberían de ceder una parte de su rebanada para conformar 1/2 y así lograr una distribución equitativa entre ellos.

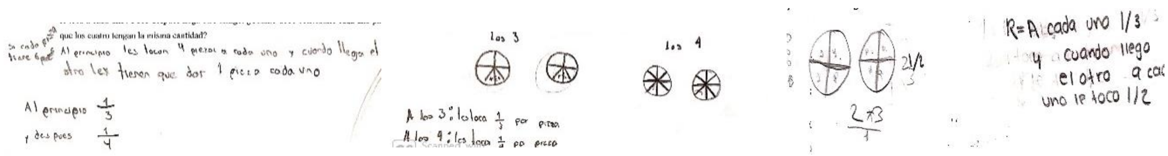


Figura 15. Soluciones propuestas por Eduardo, Eliasib y Mildred.

En un último peldaño de la solución al planteamiento, se encuentra la propuesta por Valeria, quien no logra una comprensión adecuada de ambas preguntas, pues sus respuestas lo evidencian.

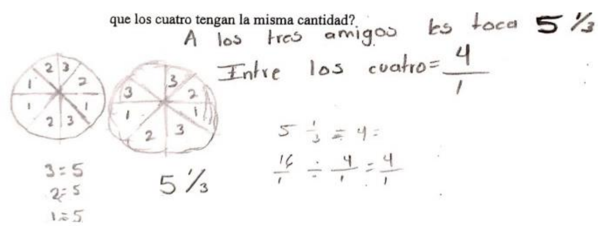


Figura 16. La respuesta de Valeria.

3.2.3. Planteamiento 3. Ubicación en la recta numérica

Cinco de los seis estudiantes decidieron resolver al planteamiento a través de una división, 5 entre 3, y expresar los números en su forma decimal, además no solo indican el número que la flecha señala, sino que también deciden colocar el valor de la primera línea después del cero para así comprobar que sus procedimientos son correctos.

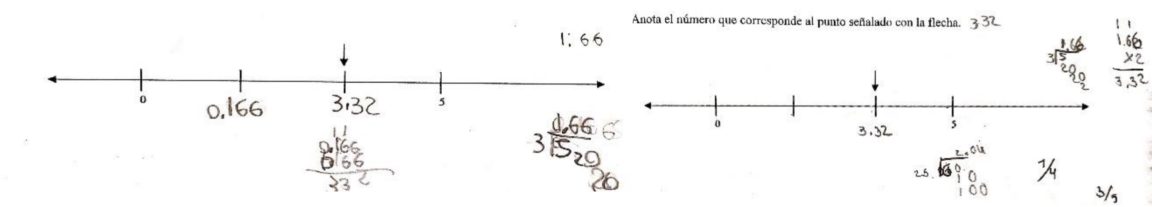


Figura 17. Las soluciones de Gustavo y Eduardo.

Mildred la estudiante restante, subdivide a la recta numérica dividiendo en medios los segmentos de que se forman con las particiones originales que se indican inicialmente, se observa numera del uno al cuatro cada medio, es decir parte en cuatro un tercio de cinco, sin embargo no lo indica así y en su lugar coloca números enteros, además de que trata de dar sentido a las demás particiones iniciales que se muestran en el planteamiento numerando del 1 al 3.

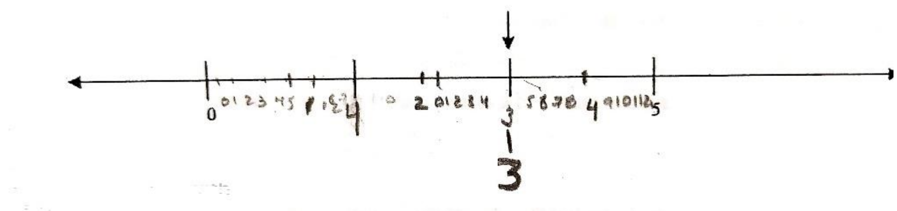


Figura 18. La subdivisión de Mildred.

3.2.4. Planteamiento 4. La mezcla de pinturas

La división, fue una de las estrategias utilizadas por la mitad de los estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario, puesto que, al tratarse de una parte de esa parte, se hace una relación parte – todo y por tanto resulta natural el proceso de división, sin embargo, se olvida la unidad de referencia total y se obtiene un resultado incorrecto, tales fueron los casos de Mildred, Jaasiel y Gustavo.

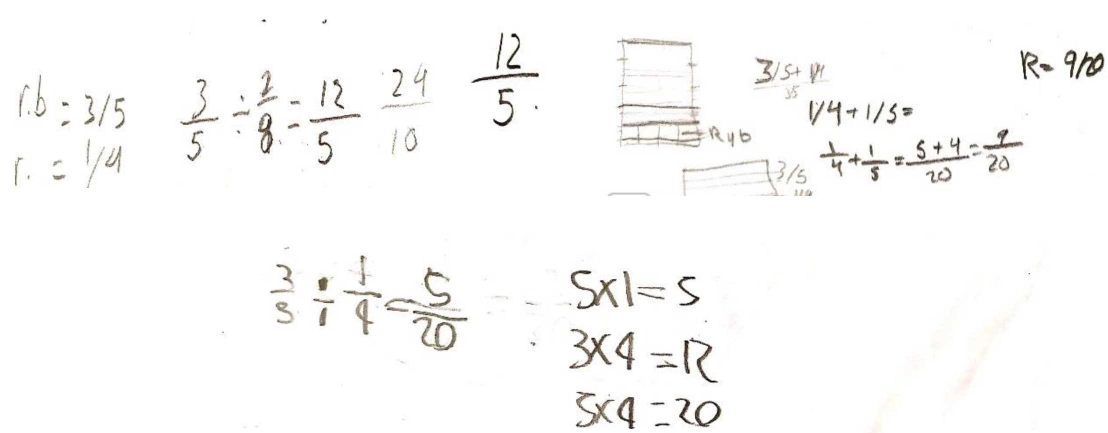


Figura 19. Las propuestas de solución de Mildred, Jaasiel y Gustavo.

En una segunda categoría tenemos las respuestas de Eduardo y Valeria, quienes utilizaron procedimientos distintos, pero, que de haberlos realizado correctamente, obtendrían el resultado correcto. Eduardo decide multiplicar las fracciones correspondientes a las pinturas azul y roja, sin embargo, realiza equivocadamente el algoritmo de la operación: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ y en su lugar realiza $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}$ obteniendo como resultado $\frac{12}{20}$.

Figura 20. La multiplicación de Eduardo.

, Valeria hace uso de los recursos gráficos y divide un rectángulo primero en quintos y después en cuartos, sin embargo, estos últimos solo los indica en los primeros tres quintos olvidando la unidad de referencia, la mezcla total, lo que hace que su resultado sea erróneo.

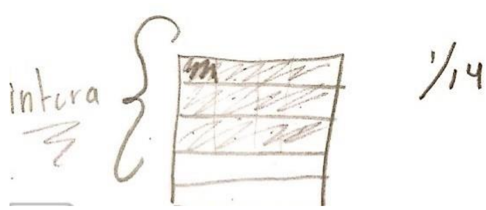
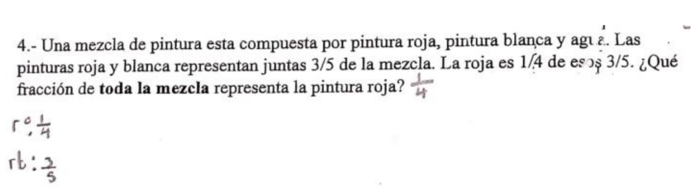


Figura 21. La solución de Valeria.

Por último, Eliasib únicamente indica las fracciones con las que hay que operar, pero no realiza procedimiento alguno para intentar dar respuesta al planteamiento.


4.- Una mezcla de pintura esta compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca representan juntas 3/5 de la mezcla. La roja es 1/4 de esos 3/5. ¿Qué fracción de **toda la mezcla** representa la pintura roja? 1/4

r: 1/4

rb: 3/5

Figura 22. El intento de Eliasib.

3.2.5. Planteamiento 5. Las jarras de jugo

A continuación, se muestran los planteamientos que los estudiantes realizaron. Todos, sin excepción creen que las partes son iguales en las mezclas originales por lo tanto se realiza una suma de razones pues agrupan vasos de agua y vasos de jugo por separado, llegando al resultado de que por cada 6 vasos de agua hay 12 vasos de jugo. Los resultados son expresados en diversas fracciones, que al final, resultan equivalentes. Se puede apreciar que los alumnos no hicieron uso del mínimo común múltiplo como alternativa para resolver el planteamiento.

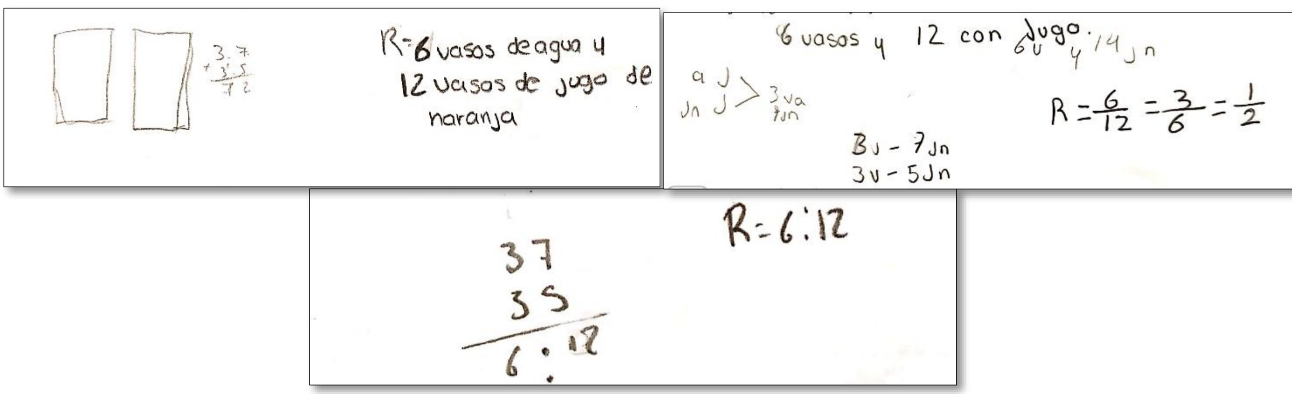


Figura 23. Procedimientos de solución de Mildred, Jaasiel y Eliasib.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LA BIBLIOGRAFÍA DE LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

4.1. LAS FRACCIONES EN LOS PLANES DE ESTUDIOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Se sabe que el desarrollo del sentido numérico se produce desde escolaridades tempranas, a través del conocimiento informal, (Castro, 2015) mediante de la manipulación de objetos físicos.

4.1.1. Tercer grado

El primer acercamiento a la noción de fracción que se tiene en los planes de estudio del nivel básico es en el tercer grado de educación primaria, en donde es frecuente utilizar el comercio como referencia para los estudiantes, utilizando a la fracción como *unidad medida* de capacidad; como un cuarto, medio, tres cuartos. (SEP, 2011a). Se utiliza, además, la *estimación* del número de veces que cabe una parte en un todo, realizando ejercicios como: ¿cuántos vasos de 250 ml. caben en un litro? A través de una comprobación física trasvasando.

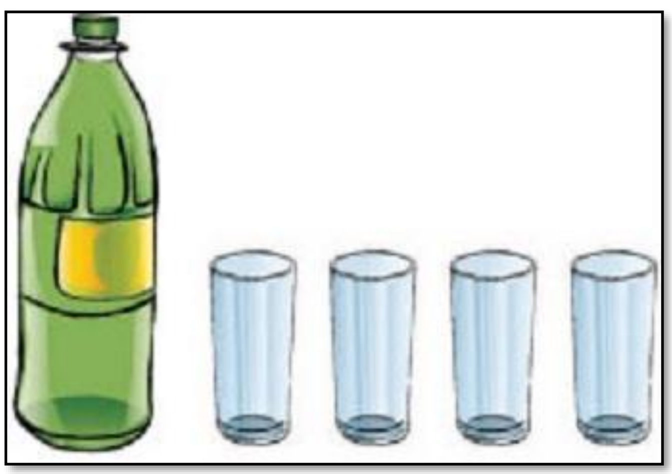


Figura 24. Primeros acercamientos a la noción del concepto de fracción.

Un segundo acercamiento que las orientaciones didácticas del tercer grado de primaria sugieren es a través de la *equipartición* de un todo concreto, como lo puede ser una hoja de papel que represente pasteles, haciendo mención a los estudiantes de situaciones como “un pastel entre cuatro niños” o “un pastel entre dos niños”, entra también en juego una nueva habilidad: la de *comparación*, puesto que, el alumno tendrá que justificar en cual caso las rebanadas serán más grandes. La verificación de nueva cuenta se realiza físicamente, aún sin llegar a la institucionalización.

“En tercer grado los alumnos empezaron a determinar fracciones del tipo: (medios, cuartos, octavos) en magnitudes continuas como longitudes o superficies y también a identificar las fracciones que corresponden a partes de dichas magnitudes.” (SEP, 2011a)

4.1.2. Cuarto grado

En cuarto grado de primaria se hace un acercamiento formal a las fracciones en donde se espera que el alumno las use con denominadores hasta 12 para expresar relaciones parte – todo, también se pretende que resuelva problemas de suma y resta con fracciones de igual denominador (SEP, 2017a). Además, es en este momento en el que los estudiantes pueden resolver una gama más amplia de problemas donde las fracciones que se determinan o identifican pueden ser unitarias o no unitarias, mayores o menores que la unidad. Las unidades de referencia pueden ser diversas como superficies de figuras regulares e irregulares sobre las cuales pueda iterarse una unidad (SEP, 2011a).

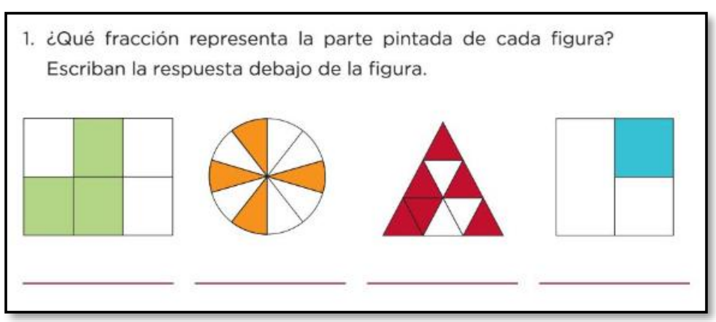


Figura 25. La fracción como parte – todo en figuras regulares. (SEP, 2013a)

Un planteamiento que requiere el uso de uno de los significados de la fracción se presenta en la página 48 del libro *Desafíos matemáticos* en el que se le pide al estudiante localizar números en la recta numérica haciendo uso de la *escala*. Es por tanto la primera vez que implícitamente se hace uso de uno de los diversos significados de una fracción, ya que el alumno tiene que "*partir*" un segmento de recta, de tal forma que números sin una relación directa entre sí (como ser múltiplos entre ellos) puedan ser ubicados correctamente en ella.

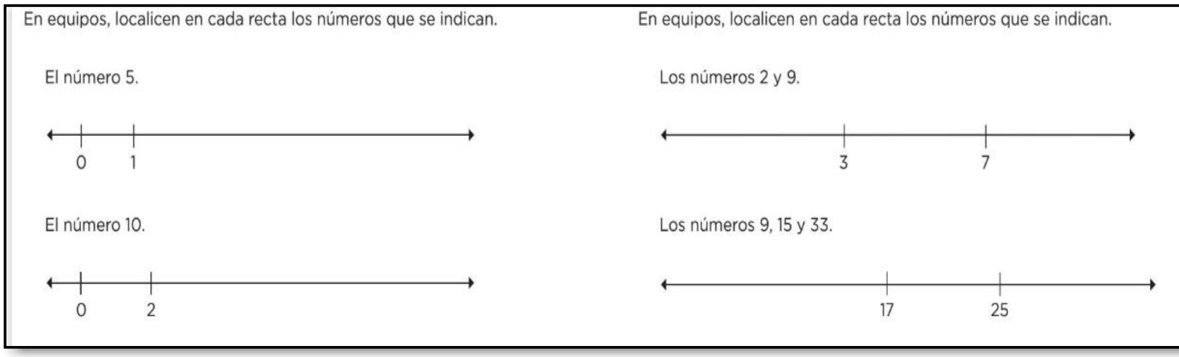


Figura 26. La escala como concepto de fracción en cuarto de primaria. (SEP, 2013a)

Es notable el avance en el grado de dificultad que presentan los planteamientos en cuarto grado de primaria con respecto al tercer grado, la unidad de referencia pasa de ser un solo objeto o figura, a ser representada por un conjunto de unidades iguales. Un ejemplo de lo mencionado es el ejercicio que se presenta en la página 52 del libro *Desafíos matemáticos*. En donde la fracción por representar sobrepasa a la unidad, llegando así a una *fracción impropia*.

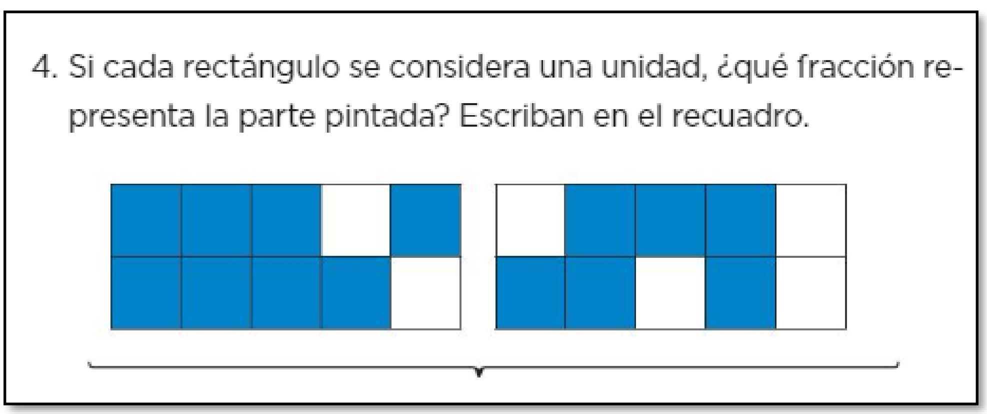


Figura 27. Representación gráfica de la fracción impropia.

En este grado escolar se da paso hacia la formalización en la escritura de las fracciones en su forma $\frac{a}{b}$, pues, transitando el lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático. Además, los estudiantes tienen un *cambio conceptual* de la noción de fracción, puesto que en grados anteriores se concebía a la fracción *como "las veces que cabía una parte en un todo"* o en "*las partes iguales en las que se puede dividir a la unidad"* siendo la unidad una representación gráfica como una sola figura geométrica o como un objeto medible con *escala de intervalo*.

Otra situación que plantean las *Orientaciones didácticas* (SEP, 2011b) en cuarto grado es la de identificar la fracción que corresponde a una parte de unidad, la cual, se encuentra subdividida en un número de partes distinto al que indica el denominador o en partes desiguales. En este punto, el estudiante se vale de la *percepción*, un mecanismo sensorio – cognitivo mediante el cual el ser humano, siente, selecciona y organiza los estímulos con el fin de adaptarlos a sus niveles de comprensión (Fausto Correa, 2012), involucra la codificación cerebral y el encontrar un sentido a la información que se está recibiendo, de forma que pueda almacenarse (Fuenmayor, 2008).Sin embargo, debe recordarse que no se trata de que los alumnos hagan representaciones muy precisas, solo lo suficiente para poder identificar de qué fracción se trata.

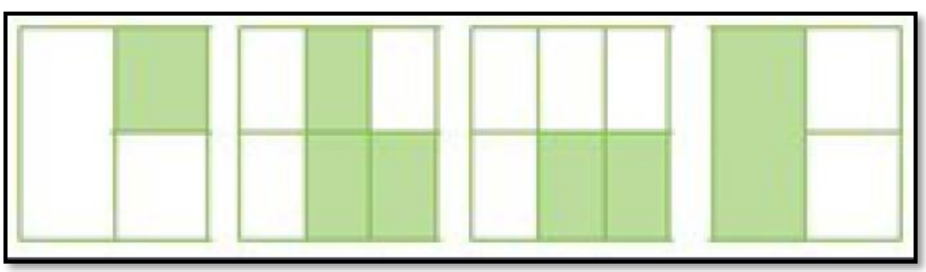


Figura 28. Representaciones gráficas de unidades divididas en partes desiguales.

Finalmente, en este grado los alumnos pueden empezar a resolver situaciones de dos tipos; en las que no se da la unidad de referencia, pero si una fracción de ella y a partir de ahí tratar de construir la unidad y en las que se tiene que repartir la unidad en fracciones de distinto denominador, además de desconocer una fracción que corresponde a esa unidad. El siguiente problema es un ejemplo de una situación, en la que, el alumno conoce la unidad de referencia (el todo), pero tiene que realizar particiones distintas (en cuartos, mitad, etc.) además de hallar la parte restante:

Linda repartió veinte órdenes de alimento en un vuelo. Si la mitad fueron de carne, la cuarta parte de pollo y el resto de pescado. ¿Cuántos platos de cada uno repartió?

La unidad de referencia (veinte platos) se menciona en el problema, sin embargo, se tiene que repartir en mitades y cuartos, puesto que la mitad de 20 es 10 y una cuarta parte es representada por 5 platos, por lo tanto, el restante también es 5, lo que representa un cuarto.

Se tiene la suma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ no obstante, en el cuarto grado aún no se llega a realizar, ni a formalizar la operación entre fracciones con distinto denominador.

Una segunda situación similar que es presentada a los estudiantes es la siguiente:

Linda repartió 32 bebidas. Si la octava parte fue de agua, la cuarta parte de jugos, otra cuarta parte de refrescos y el resto de café. ¿Cuántos vasos de jugo repartió?

Una forma de resolver el planteamiento consiste en hacer la división 32 ÷ 4, se obtiene como resultado 8. Una posibilidad que facilita el entendimiento del planteamiento es la de mostrar una tabla con la información a los estudiantes para que estos puedan visualizar los datos y la relación que existe entre la división y el resultado. También puede ser un recurso que facilite la comprobación de la operación que lleva al resultado sin ahondar en los algoritmos que requieren las operaciones con fracciones de diferente denominador.

Jugo	Refresco	Agua	Café
8	8	4	12

Figura 29. Representación tabular de problemas de reparto en cuarto grado de primaria.

El enunciado menciona que además otra cuarta parte también fue de refrescos, por lo que se puede deducir que también son 8, realizando una lectura de comprensión adecuada, una octava parte representa los vasos de agua, al realizar la división 32 ÷ 8 se obtiene 4 como resultado, es pertinente realizar un paréntesis en este punto, ya que, también se puede llegar a la deducción de que $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$ según los datos que se muestran en la tabla, por último, y al realizar la suma de las cantidades obtenidas hasta el momento se tiene: 8+8+4 = 18, por tanto los 12 vasos restantes corresponden al café. Esta es una forma de representación que ayuda al estudiante a interiorizar el concepto de fracción en su forma *parte – todo.* No obstante, hasta este punto las representaciones de una fracción en sus distintas formas no son necesarias según las *Orientaciones didácticas.*

4.1.3. Quinto grado

En el quinto año de primaria, aparece por primera vez el concepto de *representaciones* dentro de las *Orientaciones didácticas* (SEP, 2011c) de la siguiente manera: *Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo.* Sin embargo, la fracción sigue siendo representada en los estudiantes como una parte de un todo, las actividades de ubicación de fracciones en la recta numérica brindan la oportunidad a los alumnos para avanzar, tanto en el conocimiento de las fracciones como de la relación que guardan entre sí (SEP, 2011c). Se señala por primera vez la existencia de nexos entre las diferentes representaciones de las fracciones en los planes de estudio.

Las representaciones mentales que se hacen de la fracción en quinto año de primaria son diversas, pues, la representación de fracciones a partir de distintas informaciones favorece la comprensión de su significado y uso en diversos contextos. (SEP, 2011c). Algunas de las representaciones de la fracción que se abordan en este grado son:

Numérica: en su forma $\frac{a}{b}$ incluidas las representaciones de una fracción impropia como la suma de un entero cualquiera diferente a cero y una fracción propia llamada fracción mixta en el contexto escolar.

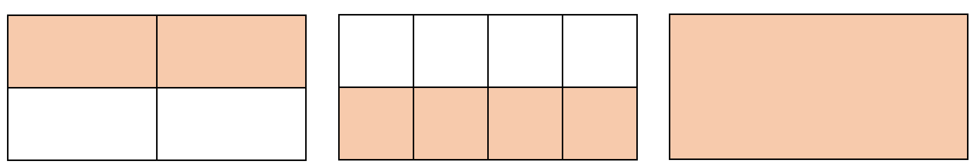
A través de superficies: En figuras geométricas como rectángulos, cuadrados y círculos.

En la recta numérica: Ubicando diversos números fraccionarios dado un segmento de recta dividido en partes desiguales.

A través de números decimales: Haciendo una división sucesiva en 10 partes para generar un sistema el cual es denominado como el sistema de las *fracciones decimales* y que es comúnmente utilizado para la medición de longitudes.

Llegado a este punto, es importante observar que una misma fracción de una unidad representa algo diferente en otra unidad y es preciso aclarar que, para lograr la interpretación adecuada es necesario tener clara la equivalencia entre las unidades de medida adecuadas, sobre todo al trabajar con unidades decimales como el metro o la tonelada y con unidades sexagesimales como las horas. Además, es en este grado escolar en donde la división de números naturales es interpretada como un algoritmo que tiene implícita una fracción decimal, así, el residuo entero se convierte en décimos, los décimos sobrantes se convierten en centésimos y así sucesivamente.

Las operaciones con fracciones como la suma y resta se comienzan a realizar en dos fases: la primera de manera gráfica, a través de la comparación entre fracciones con distinto denominador y así, lograr determinar que distintas fracciones pueden representar el mismo número; las llamadas fracciones equivalentes. Se realizan operaciones sencillas como $\frac{2}{4}+\frac{4}{8}$ que pueden ser representadas en figuras como las que se muestran a continuación.



$$\frac{2}{4} \qquad + \qquad \frac{4}{8} \qquad = \qquad 1$$

Figura 30. La suma de fracciones con diferente denominador de manera gráfica.

Al sumar las fracciones, se obtiene como resultado a la unidad, que también puede ser representada como $\frac{4}{4}$ u $\frac{8}{8}$, sin necesidad (aún) de realizar la suma utilizando el algoritmo: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

La siguiente fase para realizar operaciones de suma o resta de fracciones es la algorítmica, en las que no hace falta obtener un denominador común, por ejemplo, cuando las fracciones tienen un mismo denominador, pues, el propósito de esta es la *comparación* entre unas y otras.

4.1.4. Sexto grado

En sexto grado de primaria, se atienden dos operaciones básicas relacionadas con las fracciones: la suma de fracciones, esta vez, con distinto denominador y la multiplicación entre fracciones y decimales. La primera de las mencionadas requiere entender al *mínimo común múltiplo* como resultado de multiplicar los denominadores de dos fracciones. En términos matemáticos el mínimo común múltiplo se define como: Si *a, b* son dos números enteros cualquier otro número que los tenga como factores será un múltiplo de *a, b*. Entonces debe existir un mínimo común múltiplo, *mcm*.

Por otra parte, el porcentaje, puede ser representado a través de la correspondencia: “por cada 100, n” de ello la expresión “el tanto por ciento”, aplicando las fracciones correspondientes a los porcentajes más comunes en el curriculum de sexto grado, el 50 por ciento puede ser representado como 50 de 100 o $\frac{50}{100}$ que, al reducirlo a su mínima expresión o a una fracción irreducible se obtiene $\frac{1}{2}$, así mismo el 25 por ciento como 25 de 100 o como $\frac{25}{100}$ que es igual a $\frac{1}{4}$ del total, abordar al porcentaje desde una perspectiva de números fraccionarios, mejora la comprensión del mismo, sin embargo, en diversas ocasiones se opta por trabajar con números decimales, así para obtener el 50% de una cantidad, basta con multiplicarla por el decimal correspondiente a $\frac{1}{2}$, es decir por 0.5.

Finalmente, los alumnos trabajan con la noción de razón, haciendo comparaciones entre ellas, y expresándolas de diferentes maneras, como en porcentajes o recurren a una relación parte- todo (SEP, 2011d). Por ejemplo:

En una escuela primaria, el grupo de 6° A tiene 30 alumnos, y el grupo de 6° B tiene 24. Del grupo A, 25 aprobaron el examen de matemáticas, y del grupo B aprobaron 16. ¿Qué grupo tuvo mejor aprovechamiento?

En el caso del planteamiento anterior, no resulta tan sencillo expresar ambas razones transformándolas en porcentajes, por lo que, se tiene que recurrir a una comparación de fracciones como la siguiente:

Del grupo A: $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ Del grupo B: $\frac{16}{24} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Una vez realizada la comparación entre ambas razones, el resultado es evidente, puesto que, al convertir las fracciones a un común denominador, bastaría comparar sus numeradores para saber que fracción es más grande. Cabe señalar que como las razones son números racionales, entonces se puede ampliar y simplificar como se desee mientras se mantenga la razón.

4.2. EL PLAN DE ESTUDIOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

4.2.1. Rasgos del perfil de egreso y propósitos de la Educación Secundaria en México para Matemáticas

Los rasgos del perfil de egreso de la educación secundaria en Los Aprendizajes Clave para la Educación Integral en la asignatura de Matemáticas señalan, en el campo del pensamiento matemático, que el estudiante debe ampliar su conocimiento de las técnicas para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, además de valorar las cualidades del pensamiento matemático (SEP, 2017b), es por ello que se pretende el estudiante de segundo grado de secundaria sea capaz de resolver situaciones relacionadas con fracciones de diversas maneras.

La Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) define a la competencia matemática como la capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz y, a la vez, plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones, que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo (OCDE, 2017).

Podemos ubicar a las fracciones dentro cada uno de los nueve propósitos para la educación secundaria que a continuación se muestran:

Propósito	Descripción
Utilizar	La estimación, el cálculo escrito y mental en las operaciones con números **fraccionarios** y **decimales**.
Perfeccionar	Técnicas para calcular valores faltantes en problemas de **proporcionalidad** y cálculo de **porcentajes**.
Resolver	Problemas que impliquen el uso de **ecuaciones**.
Modelar	Situaciones de variación lineal y **proporcionalidad** inversa.
Razonar	Deductivamente, identificar y usar las **propiedades** de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.
Expresar e interpretar	Medidas con distintos tipos de unidad, utilizar herramientas como la semejanza y las **razones** trigonométricas.
Elegir	La forma de **organización** y **representación** más adecuada para comunicar información.
Conocer	Las **medidas de tendencia central** para aplicarlas el análisis de datos y la resolución de problemas.
Calcular	La **probabilidad** clásica de eventos simples y mutuamente excluyentes en experimentos aleatorios.

Tabla 2. Las fracciones en los propósitos para la Educación Secundaria.

4.2.2. Componentes y organizadores curriculares en el plan de estudios de Matemáticas

El plan de estudios 2017, se compone de diversos organizadores curriculares, que se organizan en tres ejes temáticos: Número, álgebra y variación, Forma, espacio y medida y análisis de datos.

Número, álgebra y variación: Este eje incluye los contenidos básicos de aritmética, de algebra y de situaciones de variación.

Forma, espacio y medida: Este eje incluye los Aprendizajes esperados relacionados con el espacio, las formas geométricas y la medición.

Análisis de datos: Se tiene el propósito de propiciar que los estudiantes adquieran conocimientos y desarrollen habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico.

4.2.3. La fracción en el currículo de Secundaria

Una vez descrita la organización curricular del Plan de estudios 2017 para la educación básica, es necesario precisar la ubicación de las fracciones y sus diversos conceptos dentro de cada eje. A continuación se muestran la cantidad de lecciones que incluyen alguno de los significados del concepto de fracción:

Eje	**Tema**	**Primer grado**	**Segundo grado**	**Tercer grado**
Número, álgebra y variación	Número	3	0	2
	Adición y sustracción	1	0	0
	Multiplicación y división	1	2	0
	Proporcionalidad	2	1	0
	Ecuaciones	1	0	1
	Funciones	1	1	2

	Patrones, figuras geométricas y ex.eq.	1	0	0
Forma, espacio y medida	Ubicación espacial	0	0	0
	Figuras y cuerpos geométricos	0	0	1
	Magnitudes y medidas	1	1	0
Análisis de datos	Estadística	2	1	0
	Probabilidad	1	1	1
	Total de contenidos	**14**	**7**	**7**

Tabla 3. Las fracciones en el currículo de secundaria.

Es importante mencionar que en segundo grado únicamente en el tema Multiplicación y división, se identifica rápidamente la palabra **fracción**, haciendo alusión inmediatamente a la fracción decimal y a los números decimales. Otro punto a destacar sobre la distribución de estos aprendizajes es, que curiosamente para el segundo grado de secundaria existe un aprendizaje esperado relacionado con las fracciones y es hasta tercer grado en donde vuelve a hacerse uso del mínimo común múltiplo y además se introducen los números primos como herramienta para utilizar los criterios de divisibilidad (ver anexo B), por lo tanto se puede afirmar que las fracciones quedan en el olvido del currículo de segundo grado de secundaria que es utilizado actualmente respecto a los contenidos abordados en el primer grado, por ello es de suma importancia que durante este año lectivo no se dejen a un lado a través de la implementación de materiales complementarios al libro de texto en los cuales se trabaje con las fracciones y sus distintos significados.

CAPÍTULO 5: EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES EN EL CAMPO DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

En este apartado se realiza una síntesis del estudio de las fracciones que se ha realizado en la matemática educativa. El proceso de la enseñanza y el aprendizaje relacionado con las fracciones es uno de los más estudiados por la matemática educativa porque representa una de las áreas de dificultad más comunes en la educación básica.

Es importante que la meta principal de la enseñanza sea el ayudar a los estudiantes a comprender a las fracciones como números, como objetos que pueden ser manipulados, como razones y en general desde sus distintos significados. Por otra parte, los estudiantes de secundaria suelen comprender a la fracción como dos números distintos (el numerador y el denominador) que no tienen una relación entre sí.

El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como lo son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en álgebra. Estudios recientes respecto a los significados asociados a la noción de fracción rescatan diversos significados, por ejemplo: (Fandiño M. I., 2005) refiere 14 significados. (Lamon, 1999) encuentra 12, mientras que (Kieren, 1998) incluye 5.

5.1. DIENES 1971

(Dienes, 1971) plantea que las fracciones pueden considerarse como:

a) Estados: en el sentido que una fracción puede ser la descripción de un estado de cosas. Por ejemplo, la mitad puede significar la descripción de la mitad de un objeto, lo cual introduce implícitamente la idea de que la fracción puede utilizarse como un comparador.
b) Operadores: se refiere al resultado de la ejecución de una operación (multiplicar o dividir) por ejemplo podemos tomar la mitad de un objeto, lo cual implica dividir el objeto en dos partes iguales y tomar una de ellas.

5.2. KIEREN 1976

(Kieren, 1976) hace una exposición extensa del tratamiento de cada tipo de interpretación en la enseñanza del concepto de número racional los cuales no considera independientes, para ello categoriza las ideas en:

a) Estructuras matemáticas: Son las formas de manejo matemático que han enfatizado en la enseñanza de cada interpretación.
b) Estructuras cognitivas: Son las habilidades de carácter cognitivo subyacente en la enseñanza típica de cada interpretación.
c) Estructuras instruccionales: Son una serie de experiencias derivadas y necesarias en la enseñanza típica de cada interpretación.

Señala además 7 distintas interpretaciones del concepto de fracción los cuales se enlistan a continuación:

a) Fracciones que pueden sumarse, restarse o compararse

Se consideran a las fracciones propias e impropias considerando únicamente a los números racionales positivos, no se hace referencia en este caso al fraccionamiento de la unidad, sino se enfatizan aspectos operativos en vez de los conceptuales.

b) Fracciones decimales

Los números decimales son entendidos como una extensión del sistema de numeración para realizar operaciones entre ellos como con los números enteros, sin embargo, esta manera de interpretar las fracciones causa conflictos al momento de trabajar en aspectos algebraicos por ejemplo en las ecuaciones.

c) Clases de equivalencia de fracciones

La construcción del número racional se suele hacer a través del establecimiento de fracciones equivalentes. Sin embargo, su categoría matemática de número viene garantizada por la posibilidad de ordenación. Por ello, la enseñanza debe abarcar la equivalencia y el orden en la acción de comparar el tamaño de las mismas.

d) Números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$, esto es razones de enteros.

Esta interpretación está ligada a la noción de proporcionalidad como igualdad de razones y a partir de esto se plantea como se pueden hacer naturales las operaciones entre fracciones reduciéndolas al caso de sumas de fracciones con el mismo denominador. Se admite una representación gráfica en la recta para localizar fracciones equivalentes, lo cual algebraicamente se consigue con solo multiplicar por una constante un elemento de una clase de equivalencia.

e) Operadores multiplicativos

Se contextualiza en el uso de la proporcionalidad geométrica de tal suerte que una transformación seguida de otra se considere como un todo. Por esta razón se liga a esta interpretación con el producto de fracciones, lo cual la distingue de las otras. Se habla de la necesidad de la reversibilidad del pensamiento y se enfatiza lo gráfico.

f) Elementos de un campo cociente ordenado infinito

Los números racionales se presentan como símbolos formales con los cuales la ecuación $ax = b$, donde a y b son enteros y $a \neq 0$ tiene solución. Se presentan como una extensión algebraica de los números enteros. Las operaciones están sujetas a reglas formales con las que se construye un campo de cocientes al cual se le puede definir un orden y es infinito.

g) Medidas o puntos en la recta numérica

Se hace énfasis en el fraccionamiento de la unidad y las relaciones entre diversas estrategias de partición. Surgen de manera natural el orden, las operaciones y los conceptos relativos a la recta numérica.

Kieren menciona la necesidad del manejo de todas las interpretaciones y que ha sido una práctica común que las relaciones una sola interpretación y todas las nociones sobre estos se desarrollan a partir de esa sola interpretación, lo cual conduce a deficiencias en el aprendizaje.

5.3. STREEFLAND 1978

(Streefland, 1978) hace una exposición sobre la construcción mental del concepto de fracción, señala que la enseñanza de las fracciones padece de un análisis deficiente del concepto, tanto en sentido matemático como didáctico. Menciona que la subdivisión de cantidades discretas o continuas en partes equivalentes, es casi siempre la única manera a la que se recurre para trabajar las fracciones, y la equivalencia de fracciones se aborda casi exclusivamente de una manera algorítmica. También refiere a la importancia de los procesos de medir, partir y subdividir, en la construcción del concepto de fracción, adicionalmente reconoce la relación entre las razones, proporciones y las fracciones.

5.4. KIEREN 1981

De nuevo (Kieren,1981) modificó su clasificación que presentó a mediados de los años setenta y planteó cuatro *subconstructos* de los números racionales: medida, cociente, razón y operador. La consideración de la fracción o del número racional como un constructo teórico, el cual puede construirse a partir de ideas o nociones más simples llamadas *subconstructos*. A continuación, se describe a cada uno de estos subconstructos:

a) Relación parte – todo

Se expresa generalmente a partir de regiones geométricas, conjuntos discretos de objetos y recta numérica, involucra ideas relativas a la noción de longitud y área. Depende de la habilidad que se tenga para dividir o partir una cantidad continua o un conjunto discreto de objetos en partes iguales. En este caso el símbolo $\frac{m}{n}$ representa una parte de una cantidad. Por ejemplo $\frac{5}{8}$ se puede referir a dividir un todo en ocho partes y tomar cinco de ellas.

b) Número racional como razón

Subyace la noción de magnitudes relativas, en el sentido de que la razón es un índice de comparación más que un número. En este caso el símbolo $\frac{m}{n}$ representa una relación entre dos cantidades, por ejemplo $\frac{5}{8}$ puede interpretarse como cinco de cada ocho personas tienen cierta característica.

c) Números racionales como divisiones indicadas y elementos de un campo cociente

Se considera la parte formal del manejo de los números racionales, en el sentido de que está más ligada a sistemas algebraicos abstractos. En este caso $\frac{m}{n}$ se refiere a una operación de división indicada. De esta forma $\frac{5}{8}$ representa la división $5 \div 8$ la cual no se ha efectuado.

d) Número racional como operador

Aquí se consideran los casos en que el número racional opera como una función o una regla la cual transforma una cantidad en otra o una figura geométrica en otra. En este caso $\frac{m}{n}$ representa la manera en que un objeto o una cantidad se transforma. Por ejemplo $\frac{2}{3}$ aplicado a 90 reduce esta cantidad a 60.

5.5. HART 1981

(Hard, 1981) señala que los niños, al internarse en el campo de las fracciones, lo hacen intentando extender las reglas de los números naturales. Los problemas que involucran fracciones son resueltos con más facilidad que los algoritmos, lo cual apunta al hecho de que los niños utilizan estrategias distintas de las escolares para resolverlos. Se reporta además que las fracciones, en muchos casos no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejarse por separado, otro error común al trabajar con el concepto de fracción es la equivalencia; atender al tamaño del numerador y el denominador y no a la relación entre ambos.

5.6. RASIMBA – RAJHON 1982

(Ratsimba-Rajhon, 1986) estudió la forma en que dos métodos de medidas racionales (conmensuración y fraccionamiento de la unidad) corresponden a dos tipos diferentes de conocimientos. Se diferencia el proceso de conmensuración (relación o proporción de una cosa con otra) por el cual se trata de averiguar si una unidad dada sin fraccionar cabe un número exacto de veces en otro segmento dado por medio de fraccionar la unidad hasta cubrir el segmento dado con partes enteras o fraccionarias de la unidad.

Generalmente, poco se habla de la necesidad de considerar a la proporción y todo se refiere a un proceso de medición y comprensión relativo a los algoritmos a la fracciones. Resalta además las diferencias conceptuales entre procesos no solo en el plano conceptual sino en el algorítmico.

5.7. BEHR, LESH, POST & SILVER 1983

(Behr, 1983) realiza un tratamiento utilizando también la noción de *constructo*, se enfatizan las dimensiones que las personas usan para conceptualizar aspectos relativos a los números racionales, este estudio condujo a la redefinición de las categorías de Kieren (1976). Las cuales son los siguientes siete subconstructos:

a) Medida fraccionaria

Se refiere a cuánto hay de una cantidad relativa a una unidad dada de esa cantidad. $\frac{m}{n}$ representa la cantidad de la parte en relación al todo.

b) Razón

Expresa la relación entre dos cantidades. Es decir se establece una comparación entre dos cantidades.

c) Tasa

Es una nueva cantidad que resulta de la relación entre otras dos cantidades, como es el caso de la velocidad o la densidad.

d) Cociente

Es una división indicada de números enteros, $\frac{m}{n}$ se interpreta como el numero entero “n” que divide al número entero “m”.

e) Coordenada lineal

Los números racionales se interpretan como puntos en la recta numérica resaltando que son un subconjunto de los números reales.

f) Decimal

Se destacan las propiedades asociadas al sistema de numeración decimal.

g) Operador

Se asocia en este caso al número racional la noción de función, de tal forma que a partir de un número racional se puede definir una transformación. Consideran que la relación parte – todo a partir de cantidades discretas y continuas representa un constructo fundamental del número racional.

5.8. FREUDENTHAL 1983

(Freudenthal, 1983) plantea que el termino fracción es más adecuado para números racionales positivos, puesto que el origen de los número racionales se encuentra en la noción de quebrado o fracción.

Analiza algunos de los significados que se les da como comparador (la mitad del largo de…), descriptor de una cantidad (la mitad de un pastel), como formador de múltiplos (un cuarto de hora), expresión de cantidad (dos tercios de veces tan largo que…), como determinador de ciclos (medio tiempo del partido), expresión de mezclas (tres partes de sal y tres partes de pimienta) y expresión de relaciones (de cada cinco hombres uno es chino).

Discute la importancia de algunas interpretaciones de las fracciones como: quebrado o *facturador* y comparador. Cuando analiza a la fracción como quebrado plantea las diferentes formas de dividir un todo: irreversible, reversible y simbólica, también discute la relación parte – todo, ya que las fracciones pueden hacerse patentes si un todo es: descompuesto, cortado, rebanado, roto o coloreado. La igualdad de las partes es: experimentada, pensada o imaginada. El todo puede ser discreto o continuo.

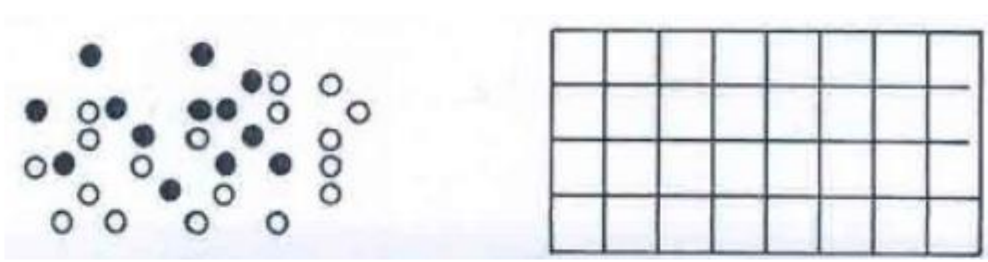


Figura 31. El todo discreto y continuo

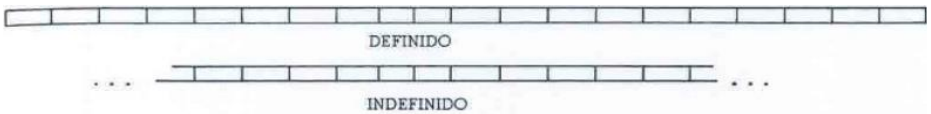


Figura 32. El todo definido e indefinido

Señala que la atención puede centrarse en: una parte, algunas partes o todas las partes. En la relación con la fracción como comparador expresa que la comparación puede experimentarse, imaginarse o pensarse de manera directa o indirecta. Y es así de hecho como en el tercer grado de primaria el alumno comienza a relacionarse con las fracciones

Figura 33. El todo estructurado y no estructurado

comparando y experimentando directamente con los objetos.

Podemos identificar las siguientes interpretaciones del análisis de Freudenthal: la fracción como operador o relación, relación parte – todo }, relación razón, medida precediendo a una unidad, o sin unidad como en el caso de la recta numérica, operador inverso de la multiplicación y como decimal.

5.9. BORASI Y MICHAELSEN 1985

(Borasi, 1985) hacen una comparación con los procesos correspondientes a las razones. Consideran que las razones siempre son fracciones propias y su suma también lo es, lo cual no es una restricción necesaria en el caso de las fracciones.

La suma de las razones se hace de la siguiente forma: $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=p+\frac{r}{q}+s$. Ejemplo: En un juego un jugador batea 2 hits en tres turnos al bate; en otro juego batea 3 hits en cuatro turnos al bate; entonces en los juegos bateó:

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{3+4}=\frac{5}{7}$ sin embargo las fracciones se operan así:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cd}{bd}$.

Para cualquier valor de los enteros positivos a, b. c y d se cumple:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

No puede haber razones equivalentes en el sentido de las fracciones equivalentes: $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$. Por ejemplo consideremos a dos jugadores de baseball: el primero de tres intentos ha bateado un hit una vez; el segundo, de 30 intentos ha bateado de hit 10 veces; posteriormente cada uno de ellos de tres intentos batearon de hit dos veces, los récords de cada uno son:

El primero: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6}$ El segundo: $\frac{10}{30} + \frac{2}{3} = \frac{10+2}{30+3} = \frac{12}{33}$

Si se interpretan como fracciones tienen una connotación completamente diferente de la interpretación que se les daría como razones. La suma de razones es conmutativa y asociativa. Lo importante es que se presenta con claridad que existe una estructura matemática subyacente a las razones que entra en conflicto con la estructura de las fracciones. Este es un aspecto que se ha descuidado en la enseñanza de las razones como si fueran fracciones, solo por el hecho de representarse de la misma manera. Este es un caso de *homonimia* que requiere mucha atención.

5.10. POST, T., BEHR, M. Y LESH, R. 1986

(Behr, 1986) explica que la noción cuantitativa de número racional incluye aspectos como: reconocimiento de que un número racional es un número; comprensión de que los números racionales pueden expresarse de diversas formas (decimales, razones, divisiones indicadas, puntos en una línea, medidas y partes de un todo); los números racionales pueden ordenarse utilizando procedimientos gráficos y simbólicos y que el criterio para establecer el orden no se basa en el conteo; el conjunto de los números racionales es denso lo cual contrasta con la idea de conteo en los números naturales.

Los números racionales tienen valor absoluto y relativo y pueden ser ordenados en cada uno de estos sentidos; la relación entre numerador y denominador da significado a una fracción y no la dan los valores absolutos respectivos considerados por separado.

Encontraron que inicialmente los conceptos sobre el orden en los números enteros influyen en la falta de compresión del orden en los números racionales; las palabras “más” y “mayor” y sus contrapartes “menos y menor”, causan dificultades en los niños al tratar con relaciones de orden; la falta de habilidad para pasar de un modo de representación a otro retarda la abstracción de relaciones matemáticas }; los niveles de pensamiento concreto o formal con respecto al concepto de fracción parece estar relacionado con el buen desempeño en tareas de orden y equivalencia; los niños desarrollan o inventan estrategias para abordar situaciones de orden o equivalencia de fracciones las cuales están muy ligadas a las propiedades de los enteros.

5.11. VEST 1986

(Vest, 1986) Señala que la relación de los procesos de partición y las operaciones con enteros son de importancia para entender el paso de los conceptos y procedimientos de los números enteros a las fracciones. Analiza la necesidad de que los niños aprendan la distinción entre los procesos de medición (dado un todo se dice como se ha de dividir este y se pregunta el número de partes) y división partitiva (dado un todo se dice como se dividirá y se pregunta sobre las características de cada parte).

Menciona que se revisaron los libros de texto y se encontró una relación entre el proceso de partición y los procesos relativos a la operación de división de números enteros, también se encontró que los niños no tenían una preferencia por alguno de ellos.

El estudio muestra que procesos relacionados con las fracciones no son conocidos por los niños de forma espontánea incluso en el caso de reducir la complejidad de estos al caso de la división.

5.12. OHLSSON 1988

(Ohlsson, 1988) se plantea que el significado del concepto de fracción y términos relacionados constituyen un campo semántico diferente. Se les denomina términos cociente, los cuales no son términos matemáticos sino referidos a las aplicaciones. De esta forma los significados de los términos cociente corresponden a las interpretaciones de las fracciones.

Ohlsson considera que la dificultad asociada a las fracciones es de naturaleza semántica , lo cual se debe a la naturaleza compuesta de las fracciones. ¿Cómo se combina "n" con "m" para generar $\frac{n}{m}$? y a las demás ideas en torno al concepto: fracciones, medidas, proporciones, cociente, razón, *tasas* y números racionales.

También se incluyen otros conceptos como el de Nesher y Vergnaud. En el primero se habla de:

a) La relación parte – todo

b) La división entre números enteros

c) La razón como una comparación multiplicativa entre dos cantidades

d) El operador que cambia una cantidad en otra

e) El número racional como probabilidad

En el segundo, se derivan interpretaciones de las fracciones y conceptos afines a partir de la multiplicación, se propone una clasificación jerárquica con categorías amplias:

a) Fracciones, razones y números racionales

b) Funciones lineales y n-lineales asociadas a cantidades dimensionales

c) Espacios vectoriales

Se señala que los términos usados para denotar las interpretaciones de las fracciones (la palabra fracción se utiliza algunas veces para una parte fraccionaria de un todo, para una fracción de una magnitud que no puede expresarse por un número entero de unidades, para un par ordenado de símbolos $\frac{p}{q}$ y para relacionar dos magnitudes de la misma clase) y se analiza la interpretación de operador de las fracciones como una concatenación de la multiplicación y la división.

5.13. KIEREN 1988

En un análisis posterior presenta 5 caras de la construcción de un conocimiento matemático:

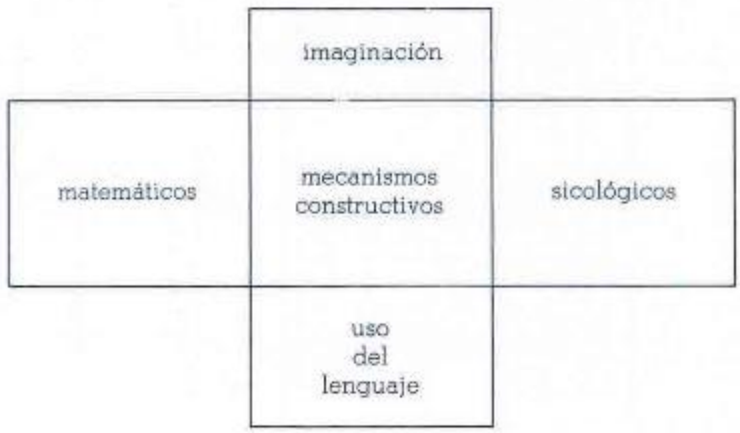


Figura 35. Las caras de la construcción del conocimiento matemático

En la cara de los conocimientos matemáticos identifica cuatro subconstructos para los números racionales: medida, cociente, razón y operador.

5.14. MANCERA 1992

(Mancera, 1992) menciona que uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que el símbolo $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y n $\neq 0$ está asociado a diversos significados a lo cual denomina como *homonimia*; pues puede representar una razón, un número racional, un operador, etcétera. También señala que por el contrario existe una *sinonimia* puesto que el concepto de fracción puede representarse como el cociente de dos enteros o una expresión decimal.

5.15. DOMONEY Y TALL 2014

Uno de los temas relativos a la estructura conceptual es la definición del concepto de fracción (Domoney, 2014), mostró que los profesores en formación inicial definieron a este concepto a través de una relación parte -todo y no consideraron a la fracción como un número en sí mismo. Sin embargo, otros estudios, muestran que cuando el concepto a definir es el de número racional, los sujetos lo conceptualizaron como el cociente de dos números enteros. (Tall, 1996).

5.16. FANDIÑO 2015

(Fandiño M. , 2015) Destaca 12 significados del concepto de fracción los cuales se enlistarán a continuación.

1. La fracción como parte – todo. En este caso depende si se trata de magnitudes continuas o discretas.

a) Si la unidad es continua: Representar $\frac{a}{b}$ puede hacerse de manera teórica siempre y cuando $a < b$. Por lo tanto la fracción impropia pierde sentido en situaciones de esta naturaleza, también el sentido práctico en el aula queda a un lado cuando se trata de representar fracciones con numeradores o denominadores demasiado grandes y que dificultan la representación por ejemplo partir un pastel en 500 partes exactamente resulta una tarea prácticamente imposible.

b) Si la unidad es discreta: Representar a la fracción se vuelve complicado incluso si se tratase de fracciones propias, porque además depende de las características de la unidad de referencia o del todo y su relación con lo que se desea encontrar. Por ejemplo hallar los $\frac{6}{8}$ de 20 personas, resulta imposible dividir a veinte personas en ocho partes iguales sin tener que vernos en la necesidad de "partir" a alguien, lo cual deja sin sentido (más que el teórico) a la situación planteada. Sin embargo si tomamos en cuenta a la fracción $\frac{3}{4}$ la cual es equivalente con $\frac{6}{8}$ podemos dar sentido al resultado al realizar una agrupación de 5 personas y posteriormente multiplicar por tres para formar tres grupos de 5 personas (15 personas en total). Situaciones como esta ponen en duda el sentido de aprender matemáticas para los estudiantes en algunos casos.

2. Como cociente. La fracción $\frac{a}{b}$ es vista como $a \div b$, la cual puede efectuarse, o no; tenemos 50 manzanas y las dividimos en 10 partes es un ejemplo de ello.

3. Como relación. La fracción $\frac{a}{b}$ es escrita de la forma a:b, lo que representa una relación entre a y b por ejemplo en las escalas: El mapa de la zona residencial tiene una relación de escala de 1:1000 es decir, por cada centímetro que se representa en el mapa hay 1000 en la realidad.

4. Como operador. Combina la división y la multiplicación ya que la fracción representa un factor multiplicativo, por ejemplo: Encontrar los $\frac{3}{4}$ de 16 manzanas, se realiza 16÷4 = 4 para posteriormente multiplicar por el numerador 4x3= 12. Esta es una de las interpretaciones de fracción más usadas en el aula.

5. Como probabilidad. A menudo se representan situaciones como la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado de seis caras caiga un número par? Los casos posibles son 3 porque hay 3 números pares de los 6, entonces la probabilidad de que ocurra este evento es de $\frac{3}{6}$.

6. En los puntajes.

> Laura trata de darle al blanco y tiene a disposición 5 tiros; centra el objetivo 2 veces; descansa un poco y, en la segunda tanda, tiene a disposición 3 tiros; centrando el blanco otras 2 veces. Andrés centra el objetivo 3 veces de 5 en la primera tanda y en la segunda tanda sólo una vez. Entonces tanto Laura como Andrés dieron en el blanco 4 veces sobre 8 lanzamientos de que disponían. Expresemos "matemáticamente" lo que sucedió. (Hernández, 2015, pp 25-38)

Laura 1°	Laura 2°	Total Laura	Andrés 1°	Andrés 2°	Total Andrés
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Tabla 4. Los puntajes y las fracciones.

Tenemos una suma de fracciones un tanto singular desde la aritmética de las fracciones pero para este particular caso se cumple que $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$.

7. Como número racional. Se presta especial atención a la equivalencia de fracciones o clase de equivalencia, es decir a las distintas formas de representar a la misma fracción. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ puede ser representado también como $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$, ... y podemos encontrar infinitas parejas ordenadas de números (a;b).

8. Como un punto en la recta. Ubicar una pareja de fracciones en la misma recta para determinar cuál es mayor o menor con respecto a la otra implica hacer uso del mínimo común múltiplo, transformar las fracciones inicialmente indicadas a dos con el mismo denominador y así poder verificar el resultado de una forma más clara y evidente.

9. Como medida. Es una manera intuitiva de interpretar a la fracción y se enseña desde el tercer grado de Educación Primaria, cuando se le solicita al alumno llenar $\frac{2}{4}$ partes de una botella de 1 litro de capacidad utilizando vasos cuya graduación es de 250 ml.

10. Como indicador. La fracción no indica una división en partes iguales, en este caso la fracción $\frac{1}{10}$ representa "uno de cada diez". Una representación que es usada en ejercicios estadísticos y analíticos de datos en encuestas.

11. Como porcentaje. Se puede representar a la fracción como una fracción decimal (Stevin, 1585, citado por Wladegg, 1996)) para darle mayor sentido. Ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$ vista desde la fracción decimal $\frac{75}{100}$ representa el 75%. Esta forma de representación es utilizada comúnmente en las situaciones relacionadas con la probabilidad.

12. En el lenguaje cotidiano. Es común que el estilo de enseñanza de muchos de nosotros sea el de representar a las fracciones desde la cotidianidad por ejemplo "falta media hora" o "me siento medio cansado" son expresiones, por mencionar algunas, que se relacionan también con la fracción.

5.17. LOS SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN. ALGUNAS CONSIDERACIONES

Lo que queda claro es que el número racional no se explica por si solo como puede pensarse que sucede con los números naturales, en el sentido de que el símbolo se asocia casi inmediatamente con el concepto. Sin embargo es inevitable la necesidad de considerar aspectos básicos como la relación parte – todo, las estructuras multiplicativas, los números decimales y los procesos de medición. El primero se refiere de a los significados asociados al cociente de enteros; el segundo, nos inclina a las ideas relativas a la proporcionalidad y demás temas afines; el tercero nos conduce a los decimales, y el ultimo, a los procesos de conmensuración, la localización de puntos en la recta numérica y los procesos de fraccionamiento de la unidad.

Desde una perspectiva lógica de la disciplina, se debería pasar del conocimiento de los números naturales a los enteros, de los enteros a las fracciones, de las fracciones a los reales y de los reales a los complejos. Pero en el paso de los enteros a las fracciones existen complicaciones que no se presentan en los otros casos. Cuando se realizan operaciones con las fracciones parece que tenemos que romper con todo lo que se ha aprendido acerca de los números enteros. Los procedimientos para realizar la adición y la sustracción se basan en procedimientos diferentes aunque se utilizan los hechos básicos de los enteros.

Por otra parte una de las mayores dificultades con las operaciones de números enteros es el reagrupamiento en el desarrollo de las operaciones, pues se tienen procesos distintos para las cuatro operaciones básicas en enteros y en las fracciones. En el caso de las fracciones el problema se presenta con el manejo de distintos denominadores y la necesidad un denominador común, lo cual implica una reorganización de las cantidades originales más que un proceso de reagrupamiento.

Freudenthal presenta, de forma implícita, el caso en que el conteo realizado con las fracciones puede involucrar el manejo de sistemas numéricos diferentes, sobre todo si consideramos que en la suma y resta de fracciones tenemos que manejar denominadores diferentes en muchos casos, de esta forma al combinar séptimos con sextos nos conduce a conteos de siete en siete con conteos de seis en seis, lo cual resulta demasiado complicado.

Las operaciones de multiplicación y división de enteros se realizan en un sentido de verticalidad el cual se pierde en las fracciones, la multiplicación de fracciones se realiza horizontalmente y la división se lleva a cabo en forma cruzada, además esta última se ha transformado en una multiplicación, pues para la división se utilizan multiplicaciones y se pierde la noción de una división que se entiende como la cantidad en la que se puede dividir exactamente un divisor respecto a un divisor, o la cantidad de veces que cabe el divisor en el dividendo, sin embargo las formas en las que se presentan estas dos operaciones en las fracciones no son usuales para el estudiante. Los resultados de las operaciones con fracciones son susceptibles de simplificarse, es decir, reducir el orden de magnitud de las cifras involucradas. Con los números enteros esto nunca se hace ni es válido.

Sobre los procesos de medición, Mancera (1992) señala que la conmensuración implica encontrar un segmento que se pueda superponer un número exacto de veces en dos segmentos dados

En cuanto a la enseñanza de las fracciones, podemos hablar de distintos modelos como se muestra a continuación:

Tipos de todo	Tipos de partes	Dimensión geométrica
Discreto Continuo Definido Indefinido Estructurado No estructurado	Discreta Continua Definida Indefinida Estructurada No estructurada	Unidimensional Bidimensional Tridimensional

Tabla 5. Distintos modelos de enseñanza de las fracciones.

Realizando este análisis es posible afirmar que los modelos para el estudio de las fracciones no son sólo pasteles y cuadriláteros como se muestran en los libros de texto sino que van más allá y pueden representarse de distintas maneras.

Otra dificultad que se presenta al trabajar con las fracciones es su representación escrita:

Relación parte – todo	Estructuras multiplicativas	Sistema decimal de numeración
División indicada con "÷" o con "–".	Operaciones sucesivas de multiplicación.	Expansiones finitas periódicas e infinitas.

Tabla 6. Representaciones escritas de la fracción.

Es común escuchar entre los estudiantes expresiones como: "¿$\frac{3}{4}$ es lo mismo que 3 entre cuatro verdad?" o "¿profesor puedo ponerlo en decimal? es que, así es mejor", esto debido a la dificultad de representar por escrito a las fracciones, puesto que en el caso de la secundaria, en el primer tema relacionado con fracciones en el plan de estudios de primer grado se espera que el alumno convierta fracciones en números decimales y viceversa, lo que genera que el estudiante se forme la idea de que la única y mejor manera de representar a una fracción es realizando una división, dejando de lado los otros posibles significados de la noción del concepto de fracción además de no profundizar en el análisis de las expresiones periódicas que se presentan al transformar las fracciones.

CAPÍTULO 6: ESTRATEGIA DE INTERVENCIÓN

6.1. MÉTODO

Durante 6 semestres previos a la elaboración de este documento, se realizaron prácticas de observación y de ejecución en donde los estudiantes normalistas tenemos la posibilidad de detectar problemáticas relacionadas con la enseñanza, los contenidos programáticos, el conocimiento de los alumnos de secundaria y de gestión escolar para su posterior análisis. Para el desarrollo de este trabajo se toman en cuenta dos propuestas que pueden ser aplicadas al ámbito educativo; la primera de ellas es a la que (Soriano, 1995) denomina como investigación – acción en donde se busca demostrar la importancia de que los alumnos participen conjuntamente con el profesor en el proceso y realización de acciones académicas y sociales para lograr una formación crítica, reflexiva y propositiva, la segunda es el modelo para la observación experimental en matemática educativa de (Filloy, 1998). A continuación, se presenta la cronología de las etapas y acciones realizadas para la elaboración y desarrollo de este trabajo:

Aspecto	Desarrollo	Fecha
Detección de la problemática	Delimitación del tema: Las fracciones	Septiembre del 2019
Proposición de hipótesis para contrastar con las observaciones empíricas	Planteamiento del problema y aplicación del cuestionario diagnóstico	Octubre – Noviembre del 2019
Análisis de la problemática	Análisis de libros de texto Revisión de la literatura	Enero del 2020
Diseño del desarrollo de la experimentación	Preparación de las experiencias de aprendizaje (elección de estrategias) Diseño de trabajo directo con los estudiantes: elaboración de la estrategia de intervención	Febrero del 2020

Desarrollo empírico: sesiones de trabajo con los estudiantes	Aplicación de la estrategia de intervención: compendio sobre fracciones.	Marzo del 2020
Toma de datos	Las respuestas de los estudiantes a los planteamientos del compendio de fracciones.	Marzo del 2020
Análisis e interpretación de datos	Después de la aplicación de la estrategia de intervención	Abril – mayo del 2020
Conclusiones	Al finalizar el análisis e interpretación de las actividades desarrolladas.	Mayo del 2020

Tabla 7. Cronología de la elaboración del documento recepcional

6.2. INSTRUMENTO

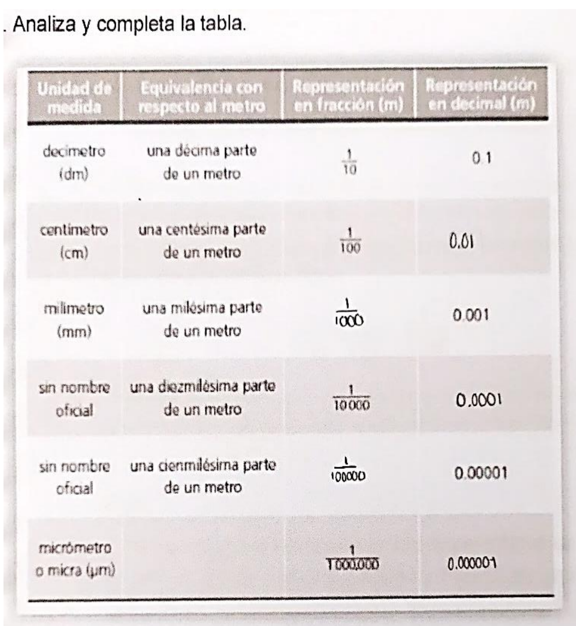
El instrumento que se aplicó en la estrategia de intervención consistió en un compendio sobre fracciones (ver anexo 1), en él se retomaron planteamientos del libro de texto para primer grado de secundaria de (Castañeda, 2018), del Libro para el Maestro (SEP, 2002), del libro Desafíos Matemáticos de sexto grado de primaria (SEP, 2013b)y de un artículo escrito por (Maza, 1999)

Así como planteamientos de situaciones elaboradas personalmente, las cuales consideré serian interesantes de analizar por los procesos que el estudiante pudiese llegar a realizar, además se incluyen explicaciones del contenido en cada uno de los apartados para que el alumno pueda desarrollar un trabajo *autogestivo*, es decir, realizar las actividades planteadas después de leer las explicación previa, siendo el docente un guía y no el protagonista en el aprendizaje del educando.

Se dividió en 5 apartados considerando algunos de los significados que se les dan a las fracciones:

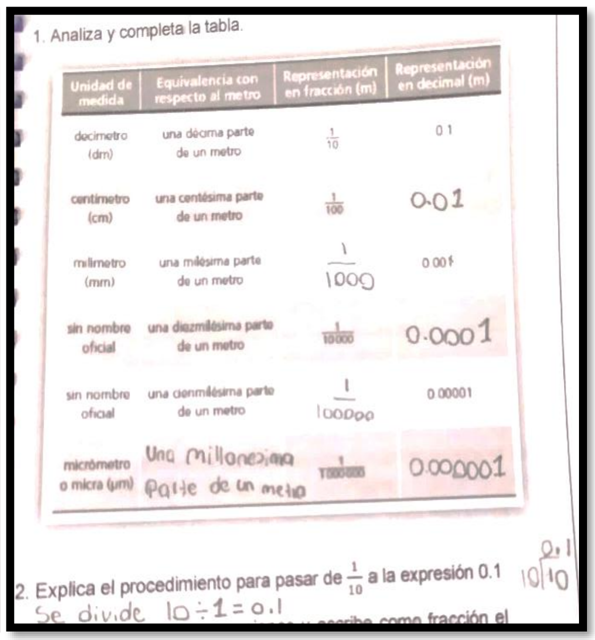
1. Las fracciones y los decimales: en donde se realizaron planteamientos de conversión de fracciones a decimales y viceversa con la finalidad de saber qué sentido se le da al valor posicional y su relación con el denominador de una fracción decimal. Es importante señalar que la notación de fracciones como número decimal es utilizada comúnmente en el sector comercial (Waldegg, 1996) el cual es el predominante en la comunidad donde se ubica la escuela.

Observaciones: La mayoría de los alumnos logra comprender la importancia del valor posicional, pues este conlleva a deducir el denominador de su fracción decimal correspondiente. Además indica cuantas veces se tiene que dividir a la unidad entre un múltiplo de diez.



. Analiza y completa la tabla.

Unidad de medida	Equivalencia con respecto al metro	Representación en fracción (m)	Representación en decimal (m)
decimetro (dm)	una décima parte de un metro	$\frac{1}{10}$	0.1
centimetro (cm)	una centésima parte de un metro	$\frac{1}{100}$	0.01
milimetro (mm)	una milésima parte de un metro	$\frac{1}{1000}$	0.001
sin nombre oficial	una diezmilésima parte de un metro	$\frac{1}{10000}$	0.0001
sin nombre oficial	una cienmilésima parte de un metro	$\frac{1}{100000}$	0.00001
micrómetro o micra (µm)		$\frac{1}{1000000}$	0.000001



1. Analiza y completa la tabla.

Unidad de medida	Equivalencia con respecto al metro	Representación en fracción (m)	Representación en decimal (m)
decimetro (dm)	una décima parte de un metro	$\frac{1}{10}$	0.1
centimetro (cm)	una centésima parte de un metro	$\frac{1}{100}$	0.01
milimetro (mm)	una milésima parte de un metro	$\frac{1}{1000}$	0.001
sin nombre oficial	una diezmilésima parte de un metro	$\frac{1}{10000}$	0.0001
sin nombre oficial	una cienmilésima parte de un metro	$\frac{1}{100000}$	0.00001
micrómetro o micra (µm)	Una millonesima Parte de un metro	$\frac{1}{1000000}$	0.000001

2. Explica el procedimiento para pasar de $\frac{1}{10}$ a la expresión 0.1

Se divide $10 \div 1 = 0.1$

Figura 36. Fracciones decimales

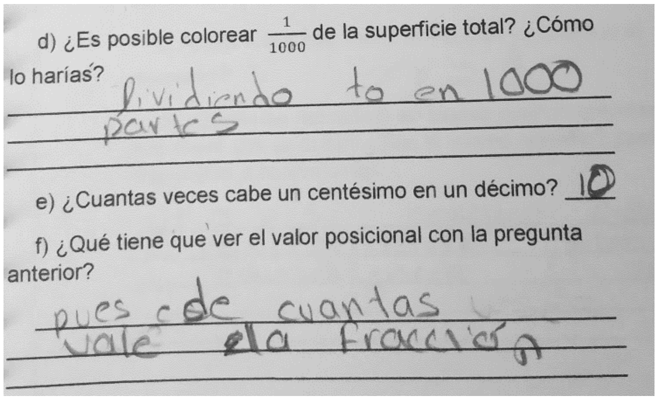


Figura 37 . Procedimientos para convertir fracciones a decimales y viceversa.

En las ilustraciones siguientes se aprecia como el alumno distingue: el valor posicional y el significado del denominador en una fracción decimal, también se puede apreciar que realiza una conversión entre un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático.

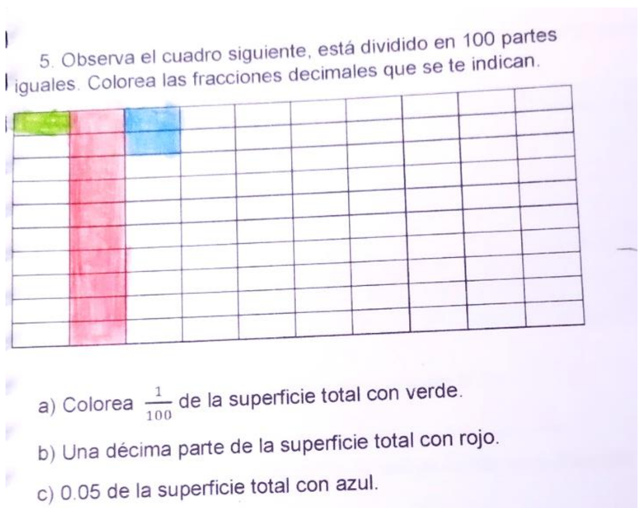


Figura 38 . Las fracciones decimales en una superficie cuadriculada.

El alumno intuye también que aun teniendo una superficie cuadriculada en 100 partes iguales puede transformarse en otra pero dividida en 1000 partes esto gracias a comprender el sentido del valor posicional en los números decimales. En el caso de los número naturales se multiplica por diez, mientras que, para los números decimales se divide entre diez porque nuestro sistema de numeración es de base 10.

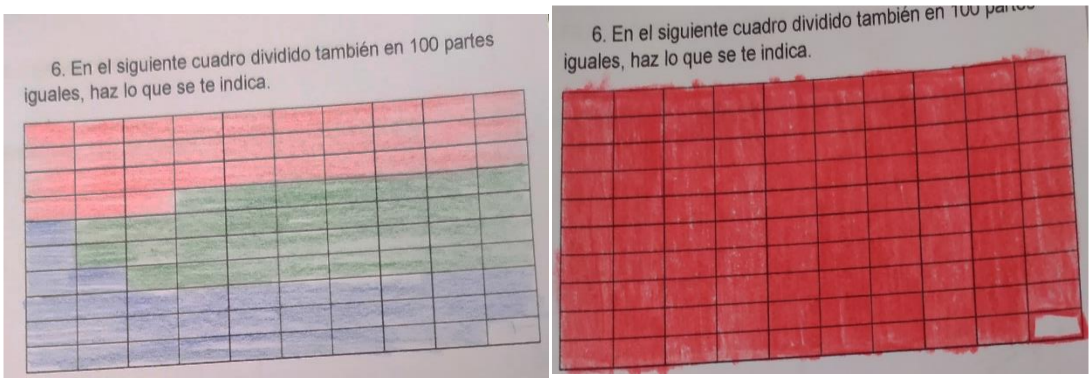


Figura 39. Colorear tres veces el número 0.33.

Sobre la pertinencia del uso de las fracciones en lugar de su transformación en número decimal; se pidió convertir el número 0.33 a fracción, la conversión realizada por todos fue la de $\frac{33}{100}$ posteriormente se solicitó se coloreara 3 veces la fracción en una superficie previamente dividida en 100 partes iguales:

Posteriormente se realizó la actividad solicitaba convertir a número decimal la fracción $\frac{1}{3}$ el resultado obtenido fue el número decimal periódico e infinito $0.33\ldots$ y se les preguntó a que creían se debía el recuadro en blanco que sobró si aparentemente se trataba del mismo número. Las respuestas fueron variadas, entre las respuestas se encuentra que para poder rellenar ese cuadro era necesario redondear la cantidad 0.99 a 1, otros decidieron aumentar el 0.33 a 0.34, sin embargo notaban que éste número multiplicado por tres era demasiado grande como para poder ser representado en la superficie dada. Solo un alumno decide justificar su respuesta señalando que, en efecto 0.33 y $\frac{1}{3}$ podrían tratarse del mismo número, uno menos exacto que el otro y decide explicar esta respuesta sumando (aunque no se aprecia pero se intuye) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$.

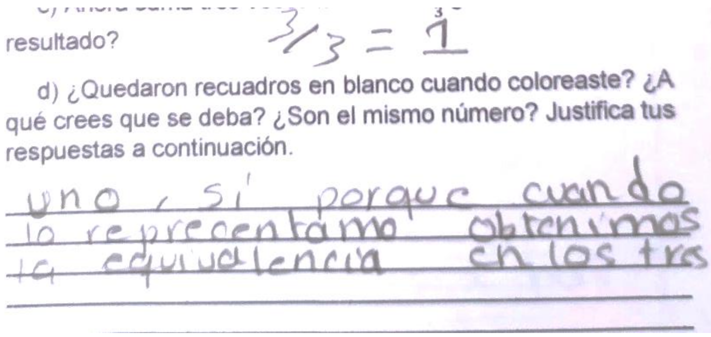


Figura 40 . Distintas representaciones, mismo resultado.

2. Fracciones en la recta numérica: las actividades se pueden dividir en dos tipos: en donde se pide ubicar fracciones en un segmento de recta sin una escala aparente y en donde se solicita ubicar recorridos con respecto a una unidad con una longitud de 5 kilómetros. Los planteamientos fueron elegidos para tratar de analizar los procesos que los estudiantes siguen para ubicar a las fracciones en una recta numérica en donde únicamente se da un segmento delimitado por números enteros.

Observaciones: En el segmento de recta en donde no se da una escala aparente, el alumno decide dividir de acuerdo a la medida física con su regla y dividiendo de acuerdo a los denominadores:

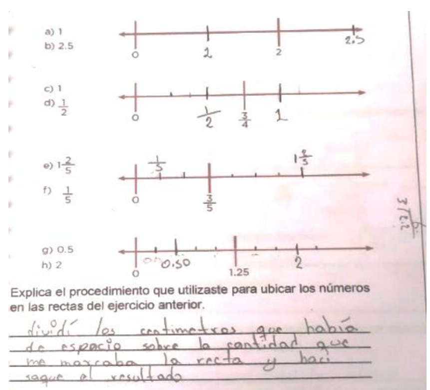
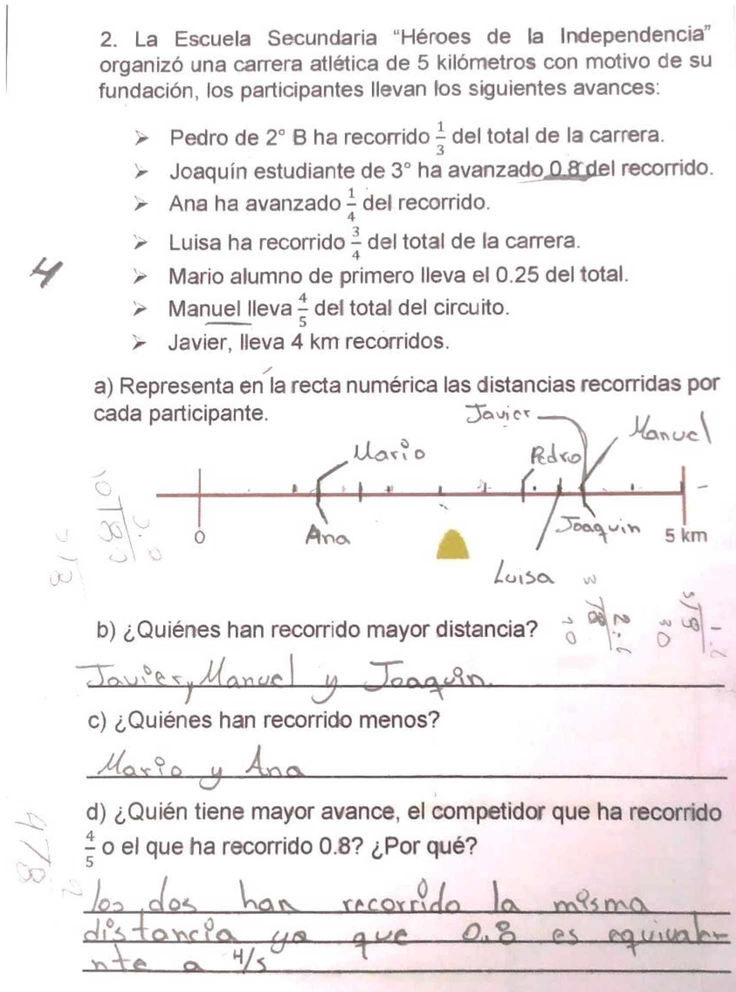


Figura 41 . División de un segmento de recta numérica

Por otra parte, en la segunda actividad y al tener una unidad de referencia (5 km) resultó más sencillo para los alumnos el dividir 5 km en n partes y multiplicar de acuerdo a lo indicado en numerador:



2. La Escuela Secundaria "Héroes de la Independencia" organizó una carrera atlética de 5 kilómetros con motivo de su fundación, los participantes llevan los siguientes avances:

- Pedro de 2° B ha recorrido $\frac{1}{3}$ del total de la carrera.
- Joaquín estudiante de 3° ha avanzado 0.8 del recorrido.
- Ana ha avanzado $\frac{1}{4}$ del recorrido.
- Luisa ha recorrido $\frac{3}{4}$ del total de la carrera.
- Mario alumno de primero lleva el 0.25 del total.
- Manuel lleva $\frac{4}{5}$ del total del circuito.
- Javier, lleva 4 km recorridos.

a) Represente en la recta numérica las distancias recorridas por cada participante.

b) ¿Quiénes han recorrido mayor distancia?

Javier, Manuel y Joaquin.

c) ¿Quiénes han recorrido menos?

Mario y Ana

d) ¿Quién tiene mayor avance, el competidor que ha recorrido $\frac{4}{5}$ o el que ha recorrido 0.8? ¿Por qué?

los dos han recorrido la misma distancia ya que 0.8 es equivalente a 4/5

Figura 42 . Ubicación en la recta numérica dada la longitud de la unidad.

Este es uno de los procedimientos más usados en la escuela y es al que (Fandiño M. , 2015) refiere como operador.

3. El mínimo común denominador: Es importante considerar este tipo de ejercicios en los estudiantes de segundo grado se secundaria porque el mínimo común denominador es una herramienta que se utiliza desde el sexto grado de primaria y que en secundaria es

"olvidado" en los contenidos durante dos años escolares volviéndolo a retomar sólo hasta el tercer grado.

La actividad consistió en realizar distintas operaciones (sumas y restas) con fracciones haciendo uso del común denominador para realizar las operaciones con fracciones equivalentes.

Observaciones: La actividad no representó un reto para los estudiantes pues todos lograron realizar la actividad, aunque en algunos casos no llegaron a simplificar las fracciones a su forma irreducible.

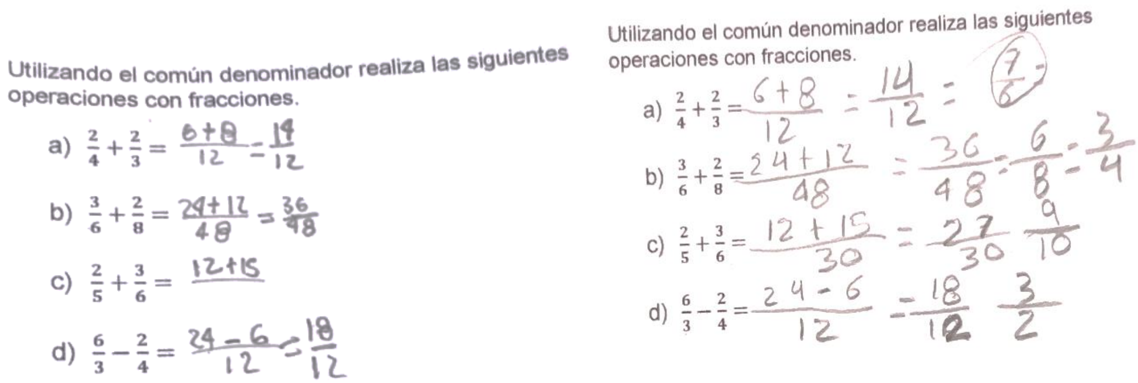


Figura 43 . Operaciones con el mínimo común múltiplo.

4. Operaciones de fracciones utilizando el modelo de áreas: El uso del modelo de áreas ayuda a visualizar y comprender las ideas relacionadas con la equivalencia y la comparación por ello se realizaron ejercicios de multiplicación y suma.

Observaciones. Los alumnos notaron que, en el modelo de áreas el resultado de las multiplicaciones era aquel en donde los colores se sobreponían dándole así otro sentido a la multiplicación de fracciones distinto al algorítmico.

5. El porcentaje, las proporciones y las razones: Este tipo de ejercicios tuvo como objetivo que el estudiante comprendiera la asociación entre las fracciones decimales y el porcentaje, que- concibieran a la expresión $\frac{a}{b}$ como una razón en la que el resultado de dividir el antecedente entre el consecuente se obtenga- una constante de proporcionalidad y no solo

se viera como un número cualquiera. También, se realizó una breve explicación sobre las proporciones, dándole otro sentido a las fracciones equivalentes. Recordemos que el uso de las fracciones equivalentes comienza desde el quinto grado de primaria en donde a superficies de igual medida se divide proporcionalmente en distintas partes por ejemplo: se divide un rectángulo en 4 partes y posteriormente se divide en 8 partes, lo cual muestra una proporción entre las medidas de cada partición.

Observaciones: En el porcentaje, el procedimiento más utilizado para la resolución de los planteamientos es el multiplicar al total por el número decimal equivalente al porcentaje que se busca, este procedimiento que resulta atractivo a los estudiantes puesto que "se ahorra una operación" aunque inconscientemente se esté realizando una conversión de fracción decimal a número decimal:

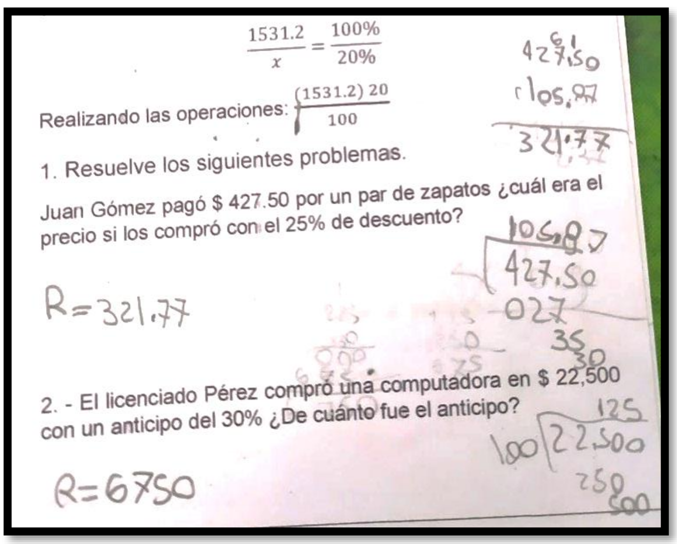


Figura 44. Procedimiento para obtener el tanto por ciento de una cantidad.

Este procedimiento es utilizado cotidianamente en los centros escolares para obtener el porcentaje, sin embargo, los estudiantes no lograron hallar el resultado correcto al planteamiento 1.

> Juan Gómez pagó $ 427.50 por un par de zapatos ¿cuál era el precio si los compró con el 25% de descuento?

Figura 45. Planteamiento de porcentaje.

El cien por ciento en este caso no se muestra a simple vista, de hecho es la cantidad a encontrar lo cual genera un desentendimiento de la situación en los estudiantes, esto se puede observar al revisar los resultados obtenidos, la mayoría obtuvo como resultado \$320.73, pero ¿qué quiere decir? ¿por qué se llegó a este resultado?

Es necesario realizar las siguientes precisiones:

El alumno puede efectuar la operación 427.50 $\times$ .25 considerando 427.50 como el 100%, sin embargo esta cantidad representa en realidad el 75% del costo sin descuento de los zapatos.

Al multiplicar 427.50 $\times$ .25 se obtiene como resultado 106.875 lo que representa el $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$, basta con multiplicar 106.875×4 para llegar a la comprobación. Pero ¿qué porcentaje del total representa 106.875? Los alumnos multiplicaron $\frac{75}{100} \times \frac{25}{100}$ que reduciendo estas fracciones a su forma irreducible tenemos: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

$\frac{3}{16} = 0.1875$ en notación decimal, que al convertirla a porcentaje toma el valor de 18.75%.

Hasta este punto, la cantidad 18.75% sigue sin tomar mucho sentido pues se sigue desconociendo el 100%, sin embargo si dividimos el total (100%) entre el 18.75% tenderemos que: 100÷ 18.75 = 5.33… lo que es lo mismo que 5 $\frac{1}{3}$ o $\frac{16}{3}$, es decir el 18.75% *cabe* 5 $\frac{1}{3}$ veces en 100.

Entonces como 106.875 representa el 18.75% del total (100%) y el 18.75% cabe 5 $\frac{1}{3}$ sí multiplicamos 106.875 $\times$ 5 $\frac{1}{3}$ obtendremos 570 lo que equivale también al 100%, entonces llegamos al resultado correcto.

Otro procedimiento con el cual comprobamos lo descrito anteriormente es utilizando la expresión:

Haciendo uso de la cuarta proporcional:

$$\frac{427.50}{x} = \frac{75\%}{25\%}$$

Despejando a *x*

$$x = \frac{(427.50)25}{75}$$

Realizando las operaciones:

$$\frac{10687.5}{75} = 142.5$$

Por lo tanto *x*= 142.5 lo que representa el 25% faltante para completar el 100%. Si sumamos 142.5 + 427.5 = 570.

Resulta ser un problema complejo pues puede resolverse involucrando distintas nociones del concepto de fracción como las fracciones decimales, los números decimales y su valor posicional y las proporciones, es necesario aclarar que este tipo de planteamientos requieren una explicación a detalle por parte del docente para que sea comprendido en su totalidad y las cantidades obtenidas cobren sentido.

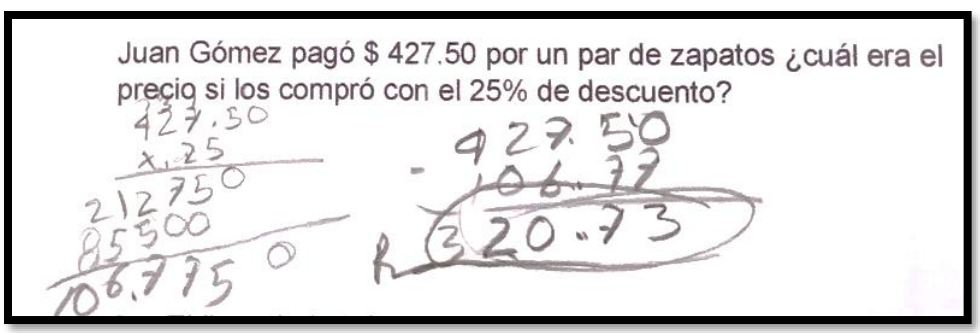


Figura 46. Obtención errónea del 100% dado el 75%.

El segundo planteamiento no representó dificultad para los estudiantes, y fue resuelto correctamente por todos ya que implicaba obtener el 30% de un total establecido.

Razones y proporciones: Hablar de razón requiere retomar el concepto de cociente, el cual tiene su origen en la división. Los estudiantes indican haber comprendido el concepto de razón y su relación en las proporciones pues razón y proporción son conceptos que al ser utilizados en los procedimientos de resolución de algunos planteamientos deben de trabajarse casi a la par.

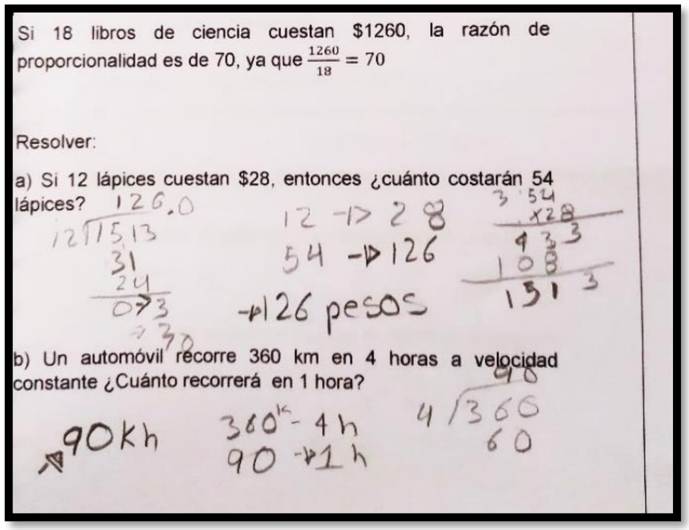


Figura 47. Procedimientos para los problemas de razón.

El último planteamiento involucra comparar salarios con base en aumentos.

Si se sabe que un empleado gana $12,000 mensuales ¿Qué le conviene si recibe un aumento salarial? ¿Primero un 20% y poco después un 7% adicional, o recibir un 28% en total?

Figura 48. El problema de los salarios.

Observaciones: en este planteamiento 3 alumnos se decidieron por la primera opción el aumento primero de 20% y después de 7%, mientras que los otros tres alumnos restantes indicaron que el 28% de aumento convenía más. Tomando en cuenta el salario de $12,000 el 20% corresponde a $2400 + un 7% del nuevo salario o sea, 7% de $14,400 que es igual a $1008, al sumar obtenemos: $15,408. Por otra parte si aplicamos un 28% de incremento a los $12,000 obtenemos como total 15,360. Por lo tanto conviene más la primera opción de un aumento del 20% y posteriormente otro de 7%.

6. Situaciones de reparto y de relación parte – todo

(Kieren, 1981) sugiere utilizar este tipo de situaciones en problemas que tengan que ver con repartos geométricos ya sea en magnitudes continuas o discretas tal es el caso de los problemas planteados en este apartado.

Se presentan una serie de planteamientos en las que se involucran partes de una fracción, lo cual representó todo un reto para los estudiantes en el cuestionario diagnóstico.

Observaciones: En el problema de las pizzas los alumnos responden acertadamente el primer planteamiento, sin embargo, solo la mitad de ellos logró responder la segunda pregunta de manera correcta.

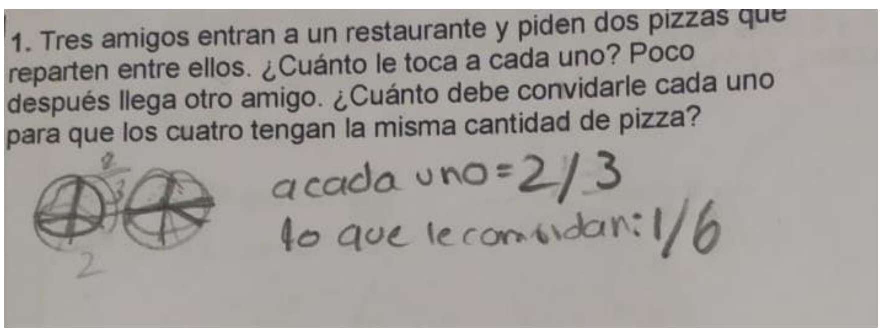


Figura 49. El reparto de la pizza. Respuestas correctas a ambas preguntas.

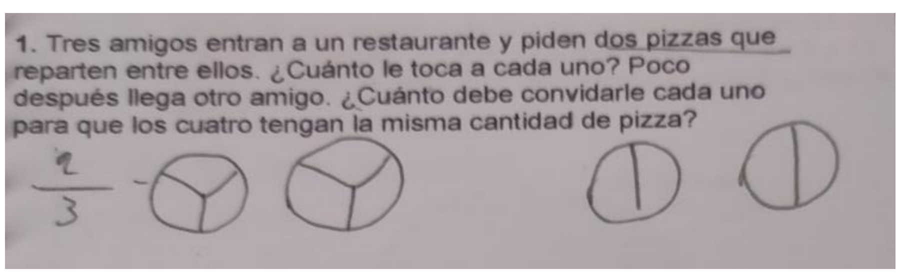


Figura 50. Respuesta parcial al problema.

En el segundo planteamiento, en las divisiones se observa que olvidan la función del numerador el cual indica el número por el cual se va a multiplicar la división o las partes iguales que se tomarán de un todo.

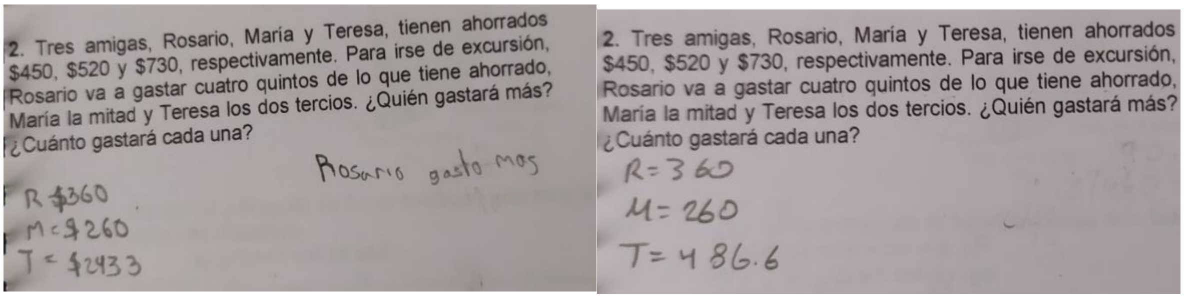


Figura 51 . Las operaciones en el problema de los ahorros.

En la imagen de la izquierda se observa que el resultado de teresa corresponde al de $\frac{1}{3}$ de 730 y no a los $\frac{2}{3}$. Por el contrario la imagen de la derecha muestra los resultados correctos.

El planteamiento 3 involucra resolver el problema *"de adelante hacia atrás"* ya que involucra conocer las partes de otra parte que se desconoce, pero con la información dada en el final del enunciado es posible resolver por completo el planteamiento. Y en efecto, así fue como los alumnos resolvieron esta situación.

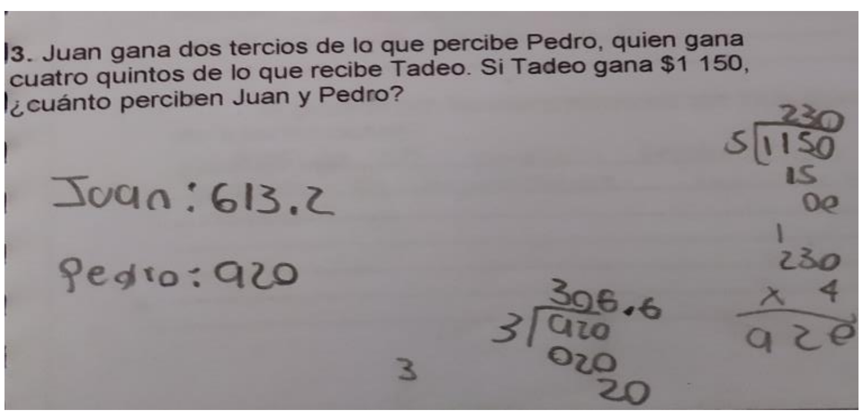
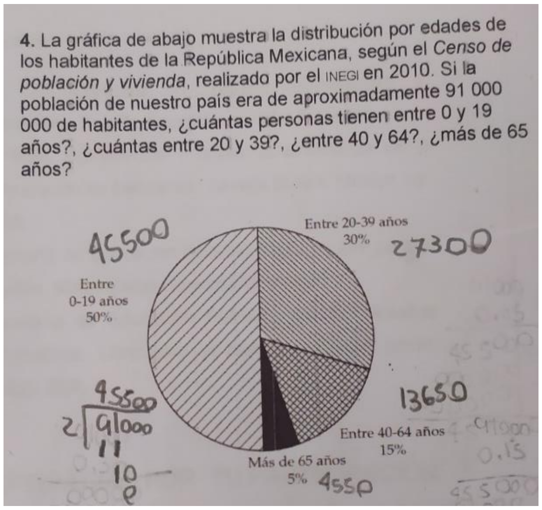


Figura 52. Respuesta al problema de los sueldos.

El ultimo planteamiento involucró obtener el porcentaje de una cantidad dada para lo cual solo bastaba con multiplicar por el decimal correspondiente al porcentaje solicitado y se obtendría el resultado. Estas son algunas de las respuestas de los alumnos:



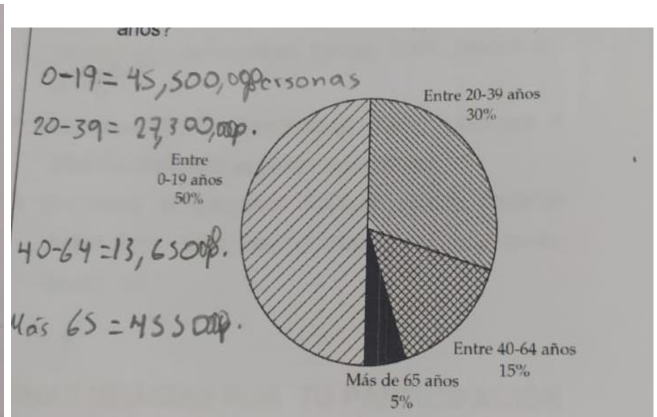


Figura 53. Respuestas de los alumnos al problema de la población.

Aclaración: El alumno de la respuesta que se muestra en la imagen izquierda me comentó de manera particular que y cito “se me pasó, no vi los otros tres ceros que estaban en el renglón de abajo y por eso seguro me salió mal” sin embargo, centrándonos en el proceso y conociendo esta aclaración es válido decir que sus respuestas pueden considerarse correctas si tomamos en cuenta 91,000 como 100% en lugar de 91,000,000. Algo similar se aprecia en la respuesta que se encuentra del lado derecho, se nota que el alumno seguramente en una revisión de sus respuestas nota que le hacían falta tres ceros más y decide colocarlos incluso encima de algunas letras.

6.3. CONCLUSIONES

El desarrollo del trabajo se guio en tres preguntas centrales; la primera de ellas relacionada con las concepciones asociadas a la fracción que los alumnos de segundo grado de Secundaria de la escuela de práctica poseen, se encontró que los alumnos conciben a la fracción como una división indicada, como un número que representa una partición de la cual hay que tomar cierta cantidad, como un cociente de dos números enteros que puede dar como resultado un número decimal u otro número entero esto se debe principalmente a que durante su trayectoria escolar son las maneras más comunes en las que se representan a las fracciones. Se llega a esta reflexión después de realizar una revisión de la bibliografía propuesta que existe en los planes y programas de estudio de Educación Básica principalmente a los libros de texto desde el tercer grado de Primaria y al mapa curricular de Secundaria.

La segunda tiene que ver con aspectos de enseñanza y como esta repercute en los aprendizajes de los estudiantes relacionados con las fracciones. Respecto a esta pregunta se puede decir que uno de los principales obstáculos con respecto a la enseñanza que impactan en la formación de los estudiantes de segundo grado de secundaria es que las fracciones no se abordan en la mayor parte del ciclo escolar porque el tema no está indicado en el contenido programático, por lo que las fracciones suelen aparecer ocasionalmente en ejercicios de los libros de texto o son propuestos directamente por el docente de acuerdo a su consideración y su criterio (ver anexo C), lo cual se pudo constatar al realizar una revisión rápida a los cuadernos de los estudiantes, así como a una entrevista al profesor titular de la escuela secundaria de práctica.

La tercera interrogante hace referencia a como el campo semántico de los estudiantes puede ampliarse o limitarse según los diversos significados que pueda adquirir durante su recorrido escolar. Al reflexionar sobre esta puede responderse que al menos 10 de los 11 significados identificados por (Fandiño M. , 2015) son revisados por los estudiantes en su trayecto previo al segundo grado de secundaria, aunque no necesariamente corresponde a la realidad escolar de la población estudiada, ya que son temas que en teoría se saben.

Por último es necesario mencionar que en el campo de las fracciones no existen lineamientos tan esclarecedores como para los números naturales, aunado a ello se utilizan también estrategias didácticas que lejos de ayudar a la comprensión de alguno de los significados de las fracciones se alejan de formalizarlas, como en el caso de las operaciones básicas con las fracciones, en donde el profesor se limita al proceso algorítmico y deja a un lado el significado de cada operación, cosa que no sucede en las operaciones en los números naturales.

Hemos visto la complejidad de la construcción conceptual de la noción de fracción, pero no hay claridad sobre el tránsito de la adquisición del concepto al manejo operativo de este, hay significados distintos que cada uno de nosotros reconoce dentro de las distintas variedades de escrituras formales para las fracciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bandura, A. (1989). Social cognitive theory. In R. Vasta (Ed.), *Annals of child development. Vol. 6*. Six theories of child development (pp. 1-60). Greenwich, CT: JAI Press.

Borasi, R. (1985). Discovering the difference between fractions and rations. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 7*(3).

Bronfenbrenner, U., & Morris, P.A. (1998). The bioecological model of human development. In W. Damon, Handbook of child psychology. New York, NY: Wiley & Sons.

Cantoral, R. Castañeda, A., Cabañas, G., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G., Molina, J., y Sánchez, M. (2008). *Matemáticas 1. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del pensamiento matemático. México: McGraw Hill.*

Castañeda, A. G. (2018). *Matemáticas 1. Secundaria. Soy Protagonista.* México: SM.

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y la formación inicial de maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Dienes, Z. (1971). *Fracciones.* Varazán S.A.

Domoney, B. (2014). Student teacher´s understading of rational number: part - whole and numerical constructs. *Research in Mathematics*, 53-63.

Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación.*, 25-38.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici.* Bologna, Italia: Pitagora.

Fausto Correa, D. A. (2012). Sensación y percepción en la construcción del conocimiento/Sensation and perception in the construction of the knowledge. *Sophia*, 124-149.

Filloy, E. (1998). *Seminario: Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. .

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CINVESTAV- IPN .

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* . Kluwer Academic Publishers.

Fuenmayor, V. (2008). La percepción, la atención y la memoria como procesos cognitivos utilizados para la comprensión textual. *Revista de Artes y Humanidades UNICA*, 192.

García, D. B. (2008). *Fractal 2. Serie para la educación secundaria: Construir.* México: Ediciones SM.

Hard, K. (1981). *Childrens Understanding Mathematics.* Antonhy Row Publishing.

INEGI. (2010). *Cuéntame*. Obtenido de http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/rur_urb.aspx?tema=P

Kieren, T. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instructional fundations of rational numbers.* ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1981). *Five faces of mathematical knowledge building.* Canada: Departamento de Educación Secundaria.

Kieren, T. (1998). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. *National Council of teacher of mathematics*, 162-181.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and intructional strategies for teachers.* Mahwa, New Jersey: Erlbaum Associates, Publishers.

Maza, C. (1999). Equivalencia y orden: la enseñanza en la comparación de fracciones. *SUMA*, 87-95.

Merlyn Behr, R. L. (1986). Research based observations about children´s learning of rational numbers concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 18*(1).

Merlyn Behr., R. L. (1983). *Rational Number Concepts.* Academic Press Inc.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*, 30-53.

OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preeliminar.* Paris: OECD Publishing.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Aplicational Meaning in the Semantics of fractions and related Concepts . *National Council Teachers of Mathematics*.

Palacios, J. Marchesi, A, y Coll, C. (Comps.) (1998). *Desarrollo Psicológico y Educación* Vol. I Madrid: Alianza

Pozo, J. I. (1999). *Aprendices y maestros*. (3º edición). Madrid, España. Alianza.

Ratsimba-Rajhon, H. (1986). Elements d´etude de deux methodes de mesures rationnelles. *Focus on learning Problems in Mathematics* .

SEP. (2002). *Libro para el maestro. Educación Secundaria.* México: SEP.

SEP. (2002). *Orientaciones Académicas para la Elaboración del Documento Recepcional.* México: SEP.

SEP. (2011a). *Orientaciones Didácticas y Planes de Clase. Tercer Grado.* México: Sep.

SEP. (2011b). *Orientaciones didácticas y Planes de Clase. Cuarto grado.* México: SEP.

SEP. (2011c). *Orientaciones didácticas y Planes de clase. Quinto grado.* México: SEP.

SEP. (2011d). *Orientaciones didácticas y Planes de clase. Sexto grado.* México: SEP.

SEP. (2013a). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* México: SEP.

SEP. (2013b). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* SEP.

SEP. (2017a). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: SEP.

SEP. (2017b). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Matemáticas.Educación Secundaria. Plan y Programas de Estudio, orientaciones y sugerencias de evaluación.* México: SEP.

Soriano, R. R. (1995). *Investigación-Acción en el aula. Enseñanza - Aprendizaje de la metodología.* México: Plaza y Valdés, S.A. de C.V.

Streefland, L. (1978). Some observations results concerning the mental constitution of the conceptof fraction. *Educational Studies in Mathematics, 9*(1).

Tall, M. P. (1996). Student Teacher´s Conceptions of the Rational Numbers. *Psicology of Mathematics Educaction (PME)*, 139-146.

Valdemoros, P. P. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *XI*, 209-218.

Vest, F. (1986). A study of teaching the measurement and partition consepts of division. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(2).

Viramonte, M. (2000). *Comprension Lectora. Dificultades Estrategicas En Resolucion De Preguntas Inferenciales.* Buenos Aires: Ediciones Colihue.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de Número. *Educación Matemática*, 5-16.

Wood, D., Bruner, J.S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry.*

Woolfolk, A. (1996). Psicología Educativa. (6ª edición). México, D.F. Prentice Hall.

ANEXOS

Anexo A

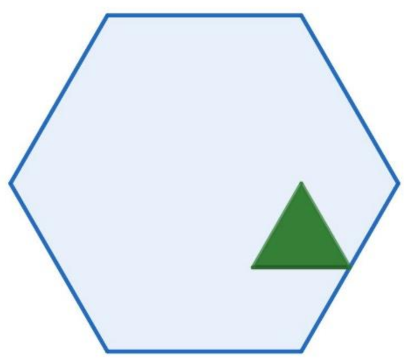
Cuestionario diagnóstico aplicado a estudiantes de segundo grado de secundaria sobre las fracciones.

CUESTIONARIO SOBRE FRACCIONES

Nombre:	**Edad:**
Grado:	

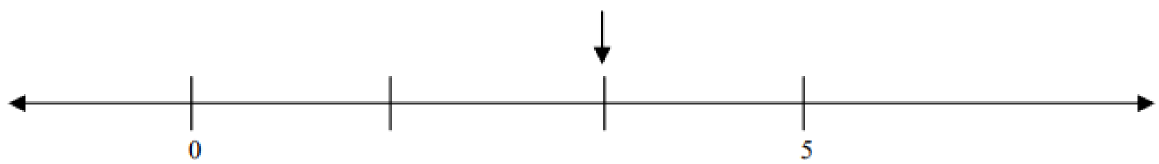
Instrucciones: Resuelve el siguiente cuestionario, respondiendo todas las preguntas que a continuación se te plantean realizando un procedimiento claro y ordenado, puedes incluir dibujos, gráficas y otros recursos visuales a tu consideración.

1.- ¿Qué fracción del hexágono representa el triángulo verde?



2.- Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco despues llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad?

3.- En la siguiente recta numerica el segmento (0, 5) esta dividido en tres partes iguales. Anota el número que corresponde al punto señalado con la flecha.



4.- Una mezcla de pintura está compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca representan juntas 3/5 de la mezcla. La roja es 1/4 de esos 3/5. ¿Qué fracción de **toda la mezcla** representa la pintura roja?

5.- En dos jarras iguales, tenemos una mezcla de agua con jugo de naranja. En una de las jarras, la proporción es de 3:7, es decir, de tres vasos de agua y 7 de jugo de naranja, mientras que en la otra hay una proporción de 3:5. Si juntamos el contenido de las dos jarras, ¿Cuál será la proporción?

Anexo B

Contenidos relacionados a los diversos significados de fracción en la Educación Secundaria.

		Aprendizajes esperados		
Eje	**Tema**	**Primer grado**	**Segundo grado**	**Tercer grado**
Número, álgebra y variación	1. Número	Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales.		Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos. Usa técnicas para determinar el mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD).
	2. Adición y sustracción	Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.		
	3. Multiplicación y división	Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, y de división con decimales.	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos. Resuelve problemas de multiplicación y división con	

			números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.	
	4. Proporcionalidad	Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluye tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	
	5. Ecuaciones	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.		Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
	6. Funciones	Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabulares, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la

			con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.	física y de otros contextos.
	7. Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan.		
Forma, espacio y medida	8. Ubicación espacial			
	9. Figuras y cuerpos geométricos			Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
	10. Magnitudes y medidas	Calcula el perímetro de polígonos y del circulo, y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando formulas. Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un triangulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando formulas.	Calcula el perímetro de polígonos y del circulo, y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando formulas. Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un	

			triangulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando formulas.	
Análisis de datos	11. Estadística	Recolecta, registra y lee datos en graficas circulares. Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana)	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana).	
	12. Probabilidad	Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.

Tabla 8. La fracción en el Plan de Estudios 2017 para la Educación Secundaria.

Anexo C

Entrevista al docente titular de la Escuela Secundaria de Práctica

ENTREVISTA

DATOS

Nombre: Rafael Sánchez Juárez

Años de servicio: 23 años de servicio

Formación Profesional: Licenciatura en educación media en el área de matemáticas

Grados en los que labora actualmente: 2° y 3° grados de secundaria

1. **¿Cuáles son las problemáticas que ha detectado en los estudiantes de segundo grado de secundaria relacionadas con las fracciones?**

R: *Son varias, pero por mencionar algunas:*

**El rechazo hacia las fracciones ya que los alumnos consideran que el trabajo es mucho más complejo.*

**Cuando manejan algoritmos es muy común que confundan el de la división con la multiplicación y viceversa.*

** Reflexionar que una fracción impropia representa un número mayor que el entero.*

2.¿Aproximadamente cuántas veces en el ciclo escolar se imparten contenidos relacionados con las fracciones en segundo grado de secundaria?

R: *El programa matemáticas segundo grado marca de forma estricta, solo un aprendizaje esperado que es el primero, pero sabemos que las fracciones inciden en todos los temas ya que su manejo y comprensión es determinante para que un alumno* *comprenda contenidos como, escalas, repartos proporcionales, razones y proporciones y conversión de fracciones a decimales, etc.*

3.¿Los alumnos se limitan a resolver las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) de manera algorítmica o se les da otro sentido para ampliar su compresión?

R: *El programa se presta para trabajar fracciones no solo de forma algorítmica si no que se sugiere plantear problemas de la vida diaria en distintos contextos que representen conflictos cognitivos para que al resolverlos el alumno obtenga aprendizajes significativos.*

4.¿Considera que, el recorrido previo al segundo grado de secundaria repercute en los conocimientos de los estudiantes sobre las fracciones?

R: *Yo creo que repercute todo el recorrido que el niño a tenido desde preescolar hasta el primero de secundaria ya que hay alumnos que al llegar a segundo grado se les dificulta identificar hasta lo más básico numerador y denominador, fracción propia de impropia y será necesario dar una reafirmación a diferencia de un porcentaje muy bajo de alumnos que tienen bien identificadas las partes de una fracción y las manejan con fluidez.*

5. ¿Cuál es para usted la importancia de que los alumnos de segundo grado de secundaria aprendan y amplíen sus conocimientos de las fracciones?

R: *Si al término del segundo grado de educación secundaria un alumno no maneja las fracciones podemos decir que no obtuvo el perfil de egreso deseado y va a enfrentarse a serios problemas en el tercero ya que para mantenerse estudiando tendrá que entenderlas y comprenderlas y utilizarlas en cualquier disciplina o asignatura, y posteriormente le serán necesarias para poder transitar en cualquier ámbito que decida desenvolverse*

Anexo D

Instrumento de intervención: Compendio de actividades sobre las fracciones.

LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES

Como aprendiste en la Primaria, los números decimales suelen ser una manera de representar a las fracciones. En la siguiente lección, aprenderás la relación que existe entre las fracciones y un número decimal y sacarás tus conclusiones sobre qué conviene utilizar.

Para comenzar, RECUERDA…

Parte entera				Punto decimal	Parte decimal			
unidades de millar	centenas	decenas	unidades		décimas	centésimas	milésimas	diezmilésimas
4º orden	3er orden	2º orden	1er orden		1er orden	2º orden	3er orden	4º orden
Órdenes enteros					Órdenes decimales			

Los números decimales se denominan de acuerdo con su valor posicional.

Así dependiendo del número de cifras decimales que contenga un número es el denominador que la fracción tendrá.

Ejemplo al convertir el decimal 0.25 se tendría: $\frac{25}{100}$ porque el número se lee como veinticinco centésimos es decir veinticinco partes de cien.

***Ahora es tu turno*.**

Unidad de medida	Equivalencia con respecto al metro	Representación en fracción (m)	Representación en decimal (m)
decímetro (dm)	una décima parte de un metro	$\frac{1}{10}$	0.1
centímetro (cm)	una centésima parte de un metro	$\frac{1}{100}$	
milímetro (mm)	una milésima parte de un metro		0.001
sin nombre oficial	una diezmilésima parte de un metro	$\frac{1}{10000}$	
sin nombre oficial	una cienmilésima parte de un metro		0.00001
micrómetro o micra (µm)		$\frac{1}{1000000}$	

1. Analiza y completa la tabla.

2. Explica el procedimiento para pasar de $\frac{1}{10}$ a la expresión 0.1

3. Lee las siguientes expresiones y escribe como fracción el número decimal que se menciona.

a) Miguel se comió la cuarta parte del pastel: ____

b) Siete de cada diez gatos prefieren croquetas: ____

c) La luz del Sol llega a Plutón con una milésima parte de su potencia: ______________

4. La fracción $\frac{15}{100}$ se puede expresar como una descomposición de fracciones.

$\frac{15}{100} = \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$ de acuerdo a su valor posicional.

a) ¿Qué número decimal corresponde a la fracción $\frac{15}{100}$?

____

____

____

b) ¿Cuál es la fracción original de la cual se obtuvo la siguiente descomposición?

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$$

____

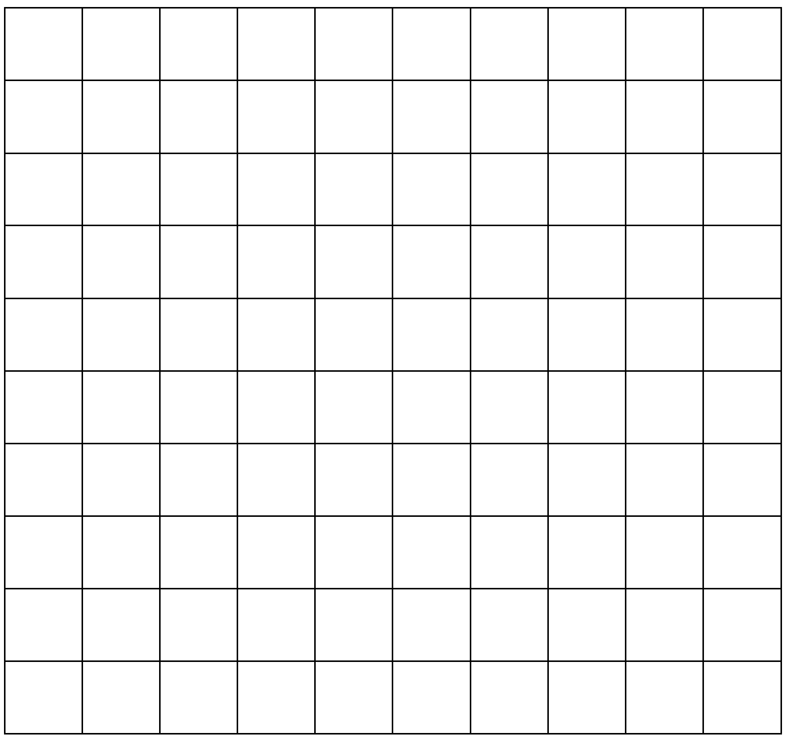
____

Dato:

Recuerda que una fracción puede representarse de la forma $\frac{a}{b}$ en donde *a* es el numerador y *b* (debe ser un número diferente de cero) el denominador. Toda fracción se puede interpretar como una división donde $\frac{a}{b}$ indica a ÷ b.

Además, a las fracciones que tienen como denominador un múltiplo de diez se les conoce como fracciones decimales. ¿A qué crees se deba este nombre?

5. Observa el cuadro siguiente, está dividido en 100 partes iguales. Colorea las fracciones decimales que se te indican.



a) Colorea $\frac{1}{100}$ de la superficie total con verde.

b) Una décima parte de la superficie total con rojo.

c) 0.05 de la superficie total con azul.

d) ¿Es posible colorear $\frac{1}{1000}$ de la superficie total? ¿Cómo lo harías?

e) ¿Cuantas veces cabe un centésimo en un décimo?

f) ¿Qué tiene que ver el valor posicional con la pregunta anterior?

6. En el siguiente cuadro dividido también en 100 partes iguales, haz lo que se te indica.

a) Convierte a fracción el número 0.33

____

b) Colorea tres veces lo que se indica en la fracción obtenida.

c) Ahora suma tres veces la fracción $\frac{1}{3}$ ¿Cuál fue el resultado?

d) ¿Quedaron recuadros en blanco cuando coloreaste? ¿A qué crees que se deba? ¿Son el mismo número? Justifica tus respuestas a continuación.

____

____

____

____

____

____

LAS FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA

1. En parejas ubiquen en las rectas numéricas los números que se indican.

Explica el procedimiento que utilizaste para ubicar los números en las rectas del ejercicio anterior.

____

____

____

____

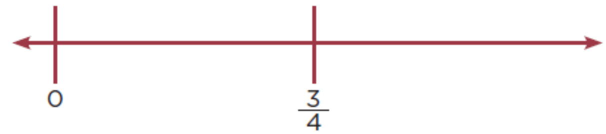
____

2. La Escuela Secundaria "Héroes de la Independencia" organizó una carrera atlética de 5 kilómetros con motivo de su fundación, los participantes llevan los siguientes avances:

- Pedro de 2° B ha recorrido $\frac{1}{3}$ del total de la carrera.
- Joaquín estudiante de 3° ha avanzado 0.8 del recorrido.
- Ana ha avanzado $\frac{1}{4}$ del recorrido.
- Luisa ha recorrido $\frac{3}{4}$ del total de la carrera.
- Mario alumno de primero lleva el 0.25 del total.

a) 1
b) 2.5

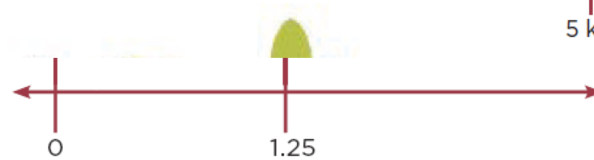
c) 1
d) $\frac{1}{2}$



e) $1\frac{2}{5}$

f)

g) 0.5
h) 2



- Manuel lleva $\frac{4}{5}$ del total del circuito.
- Javier, lleva 4 km recorridos.

a) Representa en la recta numérica las distancias recorridas por cada participante.

b) ¿Quiénes han recorrido mayor distancia?

c) ¿Quiénes han recorrido menos?

d) ¿Quién tiene mayor avance, el competidor que ha recorrido $\frac{4}{5}$ o el que ha recorrido 0.8? ¿Por qué?

e) ¿Un competidor puede llevar $\frac{6}{4}$ del recorrido? Explica tu respuesta.

f) ¿Qué significa que un corredor lleve $\frac{5}{5}$ del recorrido?

EL COMÚN DENOMINADOR

Es muy importante que se comprendan las fracciones equivalentes, así como la expresión decimal de una fracción, como formas diferentes de expresar una misma cantidad o número y que, según convenga, para realizar una operación o resolver un problema, puede utilizarse una representación u otra equivalente.

Por ejemplo, si se quiere sumar:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Conviene reducir las dos fracciones a un común denominador y realizar luego la suma:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$$

En cambio, si se quiere tener una buena idea del valor que representa la fracción:

$$\mathbf{\frac{45}{63}}$$

Lo conveniente es simplificar dividiendo entre nueve: $\mathbf{\frac{5}{7}}$

Utilizando el común denominador realiza las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\frac{2}{4}+\frac{2}{3}=$

b) $\frac{3}{6}+\frac{2}{8}=$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{6}=$

d) $\frac{6}{3}-\frac{2}{4}=$

EL MODELO GRÁFICO

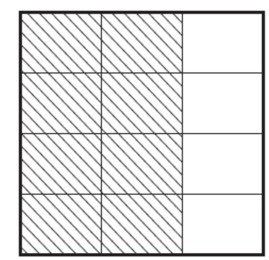
El uso del modelo de áreas ayuda a visualizar y comprender las ideas relacionadas con la equivalencia, la comparación

y el producto de fracciones. Por ejemplo:

1. Ahora realiza las siguientes multiplicaciones de fracciones utilizando el modelo gráfico también conocido como modelo de áreas.

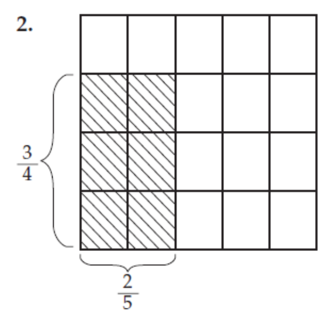
a) $\frac{2}{4}\mathbf{x}\frac{1}{3}=$

1.



$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$$

2.



$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{4\times 5}=\frac{6}{20}$$

b) $\frac{2}{3}\mathbf{x}\frac{3}{4} =$

c) $\frac{3}{5}\mathbf{x}\frac{1}{6} =$

2. ¿Cómo representarías gráficamente la suma de fracciones del inciso a de la sección anterior?

a) $\frac{2}{4} + \frac{2}{3} =$

FRACCIONES, PROPORCIONES, RAZONES Y PORCENTAJE.

El porcentaje

Cuando dices "por ciento" en realidad dices "por cada 100". Un porcentaje es un tipo de *regla de tres* directa en el que una de las cantidades es 100. Es decir estás tomando *x* parte de un total de cien y puede ser calculado a través de fracciones.

Por ejemplo: ¿Qué cantidad es el 20% de 1531.2?

El porcentaje puede ser calculado de la siguiente manera:

a) $\left(\frac{20}{100}\right)1531.2 = 0.2(1531.2) = 306.24$

Otra forma de calcularlo es a través de una regla de tres:

Tomando a 1531.2 como el total, es decir el cien por ciento.

$$\frac{1531.2}{x} = \frac{100\%}{20\%}$$

Realizando las operaciones: $\frac{(1531.2)\ 20}{100}$

1. Resuelve los siguientes problemas.

Juan Gómez pagó $ 427.50 por un par de zapatos ¿cuál era el precio si los compró con el 25% de descuento?

2. - El licenciado Pérez compró una computadora en $ 22,500 con un anticipo del 30% ¿De cuánto fue el anticipo?

3. Si se sabe que un empleado gana $12,000 mensuales ¿Qué le conviene si recibe un aumento salarial? ¿Primero un 20% y poco después un 7% adicional, o recibir un 28% en total?

Razones y proporciones

Razón

Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.

Razón de proporcionalidad: Si *a* y *b* son 2 cantidades directamente proporcionales, la razón *a* /*b* recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.

Ejemplo**:**

Si 18 libros de ciencia cuestan $1260, la razón de proporcionalidad es de 70, ya que $\frac{1260}{18} = 70$

Resolver:

a) Si 12 lápices cuestan \$28, entonces ¿cuánto costarán 54 lápices?

b) Un automóvil recorre 360 km en 4 horas a velocidad constante ¿Cuánto recorrerá en 1 hora?

Proporción

Es la igualdad entre dos razones

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donde *b* y *d* son números diferentes de cero.

Un ejemplo de proporción es la siguiente

$\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$ puesto que al simplificar ambas expresiones se obtiene $\frac{1}{2}$

a) ¿A qué se parecen las proporciones si las relacionamos con las fracciones?

b) Observa el ejemplo:

Para la proporción $\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$ se tiene que $(5)(16) = (4)(20) = 80$.

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } a = \frac{b \cdot c}{d} \text{ o } d = \frac{b \cdot c}{a}$$

c) Hallar el valor de m en la siguiente expresión

$$\frac{m}{5} = \frac{24}{30}$$

d) ¿Cuál es el valor de b en la siguiente proporción?

$$\frac{7}{2} = \frac{28}{b}$$

PARA TERMINAR…

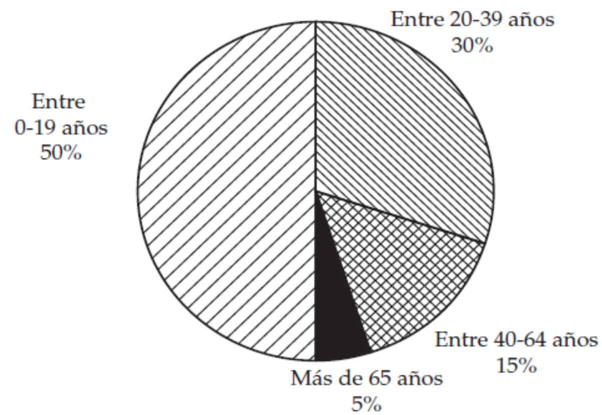
Resuelve las siguientes situaciones:

1. Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad de pizza?

2. Tres amigas, Rosario, María y Teresa, tienen ahorrados $450, $520 y $730, respectivamente. Para irse de excursión, Rosario va a gastar cuatro quintos de lo que tiene ahorrado, María la mitad y Teresa los dos tercios. ¿Quién gastará más? ¿Cuánto gastará cada una?

3. Juan gana dos tercios de lo que percibe Pedro, quien gana cuatro quintos de lo que recibe Tadeo. Si Tadeo gana $1 150, ¿cuánto perciben Juan y Pedro?

4. La gráfica de abajo muestra la distribución por edades de los habitantes de la República Mexicana, según el *Censo de población y vivienda*, realizado por el INEGI en 2010. Si la población de nuestro país era de aproximadamente 91 000 000 de habitantes, ¿cuántas personas tienen entre 0 y 19 años?, ¿cuántas entre 20 y 39?, ¿entre 40 y 64?, ¿más de 65 años?



Por último y después de haber finalizado esta serie de lecciones responde:

a) ¿Para ti qué es una fracción?____

____

____

____

____

b) ¿Cuáles son las interpretaciones que se le pueden dar a las fracciones?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Referencias:

Castañeda, A., González, R. (2018). *Matemáticas 1. Secundaria. Soy Protagonista*, pp. 16-17. México.

Maza, C.(1999). Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones. Revista SUMA, México, pp. 87-95.

SEP, (Secretaría de Educación Pública). (2002). *Libro para el Maestro, Matemáticas Secundaria*. México

SEP, (Secretaría de Educación Pública). (2013). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado*. México. SEP.

MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

El presente compendio fue elaborado para fines académicos por Benito Olivares López de la Escuela Normal Superior del Estado de México. Es de acceso libre y gratuito a través de la siguiente dirección electrónica:

https://drive.google.com/open?id=1OAqUYgmc5Z0LYv9_VA5km7WS9NyKKSw8

Material diseñado para estudiantes de secundaria de cualquier grado.

Anexo E

Etapas cognoscitivas de Piaget

Etapa	Edad	Descripción
Sensoriomotriz	*Nacimiento – 2 años*	Gradualmente, el infante adquiere capacidad para organizar actividades en relación con el ambiente a través de la actividad sensorial y motora.
Preoperacional	*2 – 7 años*	El niño desarrolla un sistema representacional y emplea símbolos para representar a las personas, lugares y eventos; el lenguaje y el juego imaginativo son manifestaciones importantes de esta etapa, pero el pensamiento aun no es lógico.
Operaciones Concretas	*7 – 11 años*	El niño puede resolver problemas de manera lógica concentrándose en el aquí y el ahora, pero no puede pensar de manera abstracta.
Operaciones Formales	*11 años - adultez*	La persona puede pensar de manera abstracta manejar situaciones hipotéticas y pensar en posibles soluciones.

Tabla 9. Etapas de desarrollo según Jean Piaget