INSTITUTO SUPERIOR DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEL ESTADO DE MÉXICO

DESARROLLO COGNOSCITIVO DE LOS ESTUDIANTES EN ÁLGEBRA. EL CASO DE LA ESCUELA SECUNDARIA OFICIAL No. 710 “MIGUEL HIDALGO Y COSTILLA”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN

CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PRESENTA

í

NORA LAURA ROMERO JÁURES
LIC. EN EDUCACIÓN MEDIA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

DIRECTOR DE TESIS

MIGUEL DÍAZ CHÁVEZ
MTRO. EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TOLUCA, MÉX. DICIEMBRE DE 2008

Contenido

Introducción

El alto índice de reprobación que hay en Matemáticas en los diferentes niveles educativos es alarmante, A menudo escuchamos lo difícil que es aprobarla y —sobre todo— aprenderla.

Esta asignatura presenta —en comparación con las demás asignaturas— el más alto índice de reprobación y el menor promedio de aprovechamiento. El mayor problema parece ser la ausencia de comprensión.

En el artículo *México: ¿Un país de reprobados?* (Revista Nexos 1991) se dan a conocer los resultados de una investigación obtenidos en mayo de 1990, de dos exámenes nacionales, aplicados en escuelas primarias y secundarias, con el fin de obtener información sobre el avance programático de los alumnos en ¡as cuatro áreas fundamentales de estudio: Matemática, Español, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. En forma genera!, se obtuvieron calificaciones reprobatorias. En secundaria, Matemáticas obtuvo un promedio de 3.47, y un porcentaje de aprobación del 7 %. La mayor dificultad fue hallada en Álgebra, Geometría y Estadística. De ahí que está investigación esté enfocada a los contenidos de aprendizaje correspondientes a los elementos algebraicos de las matemáticas.

En el año de 1997 en el artículo *La enseñanza de las Matemáticas: una encuesta y una propuesta* (Revista Educación 2001) se menciona la falta de interés y gusto de los alumnos por las matemáticas, convirtiendo a ésta en uno de los problemas más críticos de la escuela.

En el artículo publicado por la *Revista Educación 2001*, se informa que el gusto por la matemática disminuye de manera progresiva conforme el niño avanza en su escolaridad.

Consideremos también que

> *"...muchos escritores han afirmado que un porcentaje tristemente elevado de los estudiantes que ingresan en la universidad —* y *en especial los que ingresan en (...) universidades que ofrecen cursos de dos años (...)— están 'mal equipados' para ser frente a los desafíos intelectuales que la experiencia universitaria les presentará, o debería presentarles. En concreto, se afirma que*
> *muchos estudiantes que han completado la escuela secundaria no han transitado al pensamiento abstracto o, hablando en términos piagetianos, al periodo de las operaciones formales. (...) Estos estudiantes parecen haberse detenido en el periodo de las operaciones concretas del desarrollo cognitivo."* (Nichcrson 1987 p. 263)

*

En esta década los resultados de las evaluaciones internacionales como **PISA** y nacionales como **enlace** nos confirman la misma situación.

La problemática que existe en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y mi experiencia como profesora en dicha asignatura, me ha motivado a estudiar el desarrollo cognoscitivo alcanzado en álgebra por un grupo de estudiantes en el tercer grado de secundaria.

En esta investigación hago un recorrido, en el primer capítulo, por la teoría cognoscitivista de Jean Piaget, en lo referente a los postulados y las características que hace de los procesos cognoscitivos o periodos de desarrollo del periodo operacional (operaciones concretas y operaciones formales) y la forma en que el individuo logra adquirir el conocimiento y los procesos mentales o cognitivos que pone en juego para apropiarse de él.

En el capítulo dos reviso los **Planes y Programas de Estudio de Matemáticas** de tercero de secundaria en lo referente a los contenidos, enfoque, propósitos, ejes temáticos de álgebra y los documentos de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia y la vinculación de todos éstos con la teoría.

En el capitulo tres presento los resultados de ia investigación: menciono las características de los veinticinco alumnos en estudio y el contexto en el que se desenvuelven; describo como se hizo la selección, la elaboración, y la aplicación del instrumento que me permitiría ver el desarrollo cognoscitivo de ios estudiantes, el cuál consistió en una batería pedagógica con problemas y ejercicios matemáticos. Finalmente con dicho instrumento hago una confrontación de la teoría y la práctica (lo postulado y lo observado).

En resumen, en esta investigación se aborda la teoría de Jean Piaget en lo referente al desarrollo cognoscitivo de los seres humanos, en lo que respecta al periodo preope ración al que comprende las operaciones concretas y las operaciones formales.

También se trata lo referente a los contenidos de álgebra y su enfoque en los planes y programas de estudio de secundaria.

Finalmente, por medio de la aplicación de un cuestionario con problemas y ejercicios de los contenidos de álgebra en el tercer grado de educación secundaria a un grupo selecto de alumnos, —de la Escuela Secundaría Oficial No. 710 “Migue! Hidalgo y Costilla" ubicada en la Concepción Coatipac, Municipio de Calimaya, Estado de México; del ciclo escolar 2001-2002— se hace la confrontación de las dos teorías que sustentan este trabajo —Piaget y los Planes y programas de estudio— con el análisis de cada una de las respuestas que dieron los alumnos a cada uno de los planteamientos del examen que se les aplicó. El propósito principal es conocer el desarrollo cognoscitivo en álgebra de los sujetos en estudio.

Capítulo I

Piaget y el desarrollo cognoscitivo

Piaget (1969) sostiene en su teoría que el desarrollo cognoscitivo ocurre en una serie de etapas. Estas etapas son integrativas, es decir, cada etapa subsiste en las siguientes, sobre la cual las anteriores desarrollan nuevas características. Su orden de sucesión es constante pero el ciclo real varía de una persona a otra por factores tanto individuales como sociales, lo cual hace que las fronteras de la edad no sean precisas.

A esos distintos momentos del desarrollo Piaget los denomina periodos de pensamiento o periodos evolutivos. Éstos son:

a. *sensorio-motriz* **o sensomotriz** (del nacimiento a los dos años de edad). El recién nacido cuenta únicamente con los esquemas sensorio-motrices congénitos, como son los primeros reflejos o instintos.

b. **preoperatorio o** *preoperacionai* (más o menos de los dos a los siete años de vida). Este periodo consta de dos fases: la fase *preoperacionai* y la fase *instintiva.* La fase preoperacionai (llamada también de representación) abarca aproximadamente de los dos a los cuatro primeros años de vida. La fase instintiva puede prolongarse hasta los siete años de vida, y se caracteriza porque el sujeto es capaz de pensar las cosas a través del establecimiento de clases y relaciones, y del uso de números, pero todo ello de forma intuitiva, sin tener conciencia del procedimiento empleado.

c. *operacionaL* Este último periodo del desarrollo intelectual del ser humano comprende *el estadio de las operaciones concretas* (más o menos de los siete a los once o doce años de edad) y *el estadio de las operaciones formales* (alrededor de los doce años a la edad adulta). En las *operaciones formales* se perfeccionan y sistematizan las construcciones aún limitadas de las operaciones concretas y desarrollan las llamadas operaciones formales, las cuales no sólo se refieren a objetos reales, sino también a todos los objetivos posibles.

Cómo ya mencionamos, esta diferenciación de los periodos es bastante variable, ya que existen una multitud de factores biológicos, sociales y ecológicos que participan. Todo esto hace imposible establecer periodos precisos, ya sea desde el punto de vista cronológico como desde la perspectiva de su misma naturaleza. Por eso es importante que consideremos que las edades que menciona Piaget son —como él lo dijo— una aproximación.

El desarrollo de esos periodos en su conjunto es un proceso unitario y continuo, aunque en realidad no se puede considerar perfecta del todo ni su unidad ni su continuidad, ya que la continuidad del desarrollo está interrumpida por la existencia de estadios o fases, con lo que el desarrollo rompe su carácter progresivo; y su unidad tampoco es plena, ya que en ella participan diversos componentes que la hacen variar según difieren unos de otros.

Esa integración de estructuras sucesivas, cada una de las cuales lleva a la construcción de la siguiente, permite dividir el desarrollo en grandes períodos o subestadios, que obedecen a los siguientes criterios: 1) Su orden de Sucesión es constante, aunque las edades promedio pueden variar de un individuo a otro; según sus grados de inteligencia, o bien, de un ambiente social a otro. 2) El desarrollo de los estadios puede dar lugar a retrasos o aceleraciones; pero el orden de sucesión persiste constante en los ámbitos.

La conservación se refiere al hecho de que si dos conjuntos son ¡guales en número, ponga como se ponga los objetos, en cada uno de ellos habrá siempre el mismo número, El número se conserva, no se altera porque se altere la configuración perceptual.

> *"El estadio de las operaciones concretas se caracteriza porque el sujeto adquiere las operaciones o sistemas de acciones mentales internas que subyacen al pensamiento; el sujeto es capaz de hacer uso de algunas comparaciones lógicas, como por ejemplo la reversibilidad, la clasificación y la seriación, El individuo puede clasificar y seriar, pero sólo cuando tiene los objetos presentes para manipularlos (se mueve en el mundo de lo concreto); tiene la capacidad para enfrentarse eficazmente con los conceptos concretos y las operaciones concretas, pero no con los abstractos. Durante este estadio la capacidad de aprendizaje generalizado es limitada; lo que se aprende en un contexto no se transmite fácilmente a otros contextos." (Nicherson 1987p, 47)*

La seriación es una operación lógica que a partir de un sistema de referencias, permite establecer relaciones comparativas entre los elementos de un conjunto, y ordenarlos según sus diferencias, ya sea en forma decreciente o creciente.

> *Whimbey* (citado por Nicherson 1987 p. 55) *dice que en este estadio se da la existencia de diferencias de actitud y estilos de pensamiento poco dotados con un enfoque superficial de la solución de problemas y pensamiento directo con una "tendencia a lanzarse precipitada y superficialmente sobre un problema en lugar de hacer un esfuerzo serio y prolongado para entenderlo, actitud de indiferencia hacia la propia actuación. La tendencia a concederle relativamente poco valor al razonamiento revela más interés en el modo de conocer una respuesta que en el modo de conseguirla,"*

Con esta adquisición de las operaciones concretas, se produce una serie de modificaciones en las concepciones que el ser humano tiene sobre las nociones de cantidad, espacio y tiempo,

El elemento esencial que permite al sujeto llegar a las operaciones concretas es la *reversibilidad:* capacidad para analizar una situación desde el principio al fin y regresar al punto de partida; o bien para analizar un acontecimiento desde diferentes puntos de vista y volver al original. Esta nueva habilidad hace posible una forma de pensamiento más organizado que considera todas las partes de una experiencia y las relaciona entre sí como un todo organizado.

Si analizamos la reversibilidad que hace posible estos avances en el pensamiento vemos que esta presupone el concepto de permanencia.

En esta etapa una persona puede entender que si el agua de un florero, sea cual sea su forma y dimensión, se vierte en otro recipiente de otras dimensiones o de otra forma, sigue siendo la misma cantidad de liquido; esto se debe a que ahora el sujeto tiene el concepto de cantidad y la estructura de permanencia, Poco a poco el infante podrá hacer la misma operación con relación al peso y dimensión; y al final de esta etapa obtendrá la capacidad para hacerlo con respecto al volumen de un objeto o líquido.

También dentro de las operaciones concretas se desarrollan nociones de conservación, como la identidad, que no precede necesariamente a la reversibilidad pero que resulta de ella de una manera implícita o explícita.

Los agrupamientos de ¡as operaciones concretas consisten en transformaciones reversibles, y esa reversibilidad tiene dos formas esenciales: a) la primera, la inversión o negación cuya característica es que la operación inversa compuesta con la operación directa correspondiente lleva a una anulación (+A - A = 0); b) y la segunda, la reciprocidad o simetría, cuya característica es la operación de partida, compuesta con su recíproca 'A corresponde a B y reciprocamente' (Prf. Piaget e Inhelder 1969 pp. 136- 137)

La *reciprocidad* es

"...el tipo de reversibilidad mediante el cual se compensa el efecto de una fuerza o acción mediante otra." Gorman 1986; p. 126

Es la forma de reversibilidad que caracteriza los agrupamientos de relación; pero ella obtiene también su fuente de conductas muy anteriores en forma de simetría.

El sujeto en este estadio puede resolver problemas lógicamente si se enfoca en el aquí y el ahora. Comprende que 7 + 12 es igual a 19, pero la formulación abstracta, como la de una ecuación algebraica, sobrepasa su captación. Esto se debe a que dentro de las operaciones concretas se afecta directamente a los objetos y no a hipótesis. Forman la transición entre la acción y las estructuras lógicas más generales que implican una combinación y una estructura de 'grupo' coordinante de las dos formas posibles de reversibilidad. Dentro de las operaciones concretas, no es posible extraer dos clases no contiguas para hacer de ello una nueva clase lo que hace el sujeto es referirse directamente a los objetos o a sus reuniones (clases). La forma lógica de los juicios y razonamientos no se organiza sino cuando hay ligazón, más o menos indisoluble, con sus contenidos, es decir, que las operaciones funcionan únicamente respecto a comprobaciones o representaciones consideradas verdaderas. Las estructuras de las operaciones concretas, sean cuales fueren sus progresos respecto a las regulaciones preoperatorias, siguen siendo incompletas o inacabadas, pero la invención de la combinatoria permite colmar una de sus lagunas. (Cfr. Piaget e Inheler 1969; pp. 132-138).

En este período se dominan (en situaciones concretas) las operaciones lógicas como la reversibilidad, la clasificación, la descentración, el heterocentrismo y el razonamiento inductivo; preparándose para la transición al pensamiento abstracto en el período de las operaciones formales. Veamos a qué se refiere cada una de estas operaciones lógicas:

a. Reversibilidad

El término reversible hace referencia a la posibilidad mental que tiene el individuo de concebir y representar un hecho o pensamiento desde su comienzo hasta el final o viceversa. Esta reversibilidad se debe a que el pensamiento, en este nivel, es flexible, puede ir y venir a discreción y regresar mentalmente al punto de partida de un problema dado. El pensamiento reversible maneja datos mentales e interiorizados, No se reduce, solamente, como en el sub-período anterior, a las acciones reales, coordina datos interiorizados con datos reales simultáneamente,

b. Clasificación k

Constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenencia del objeto a una clase y se incluyen en ella subclases. En conclusión las relaciones que se establecen son las semejanzas, diferencias, pertenencias (relación entre un elemento y la clase a la que pertenece) e inclusiones (relación entre una subclase y la clase de la que forma parte).

El sujeto manipula o agrupa lo que ha percibido, su pensamiento depende del mundo real 1/ *concreto, los agrupamientos se suceden en su mente* (Gorman 1986 p. 35).

c. Descentraron

La estructura de pensamiento es descentrado cuando puede atender a varios aspectos, a varias dimensiones simultáneamente y coordinarlos entre sí. Este pensamiento advierte diferencias perceptivas pero capta las compensaciones.

I **d. Heterocentrismo**

Es la capacidad de adoptar el punto de vista del otro, funciona como un índice del pensamiento reversible.

e. Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo implica ir más allá de la información que uno recibe. Tiene que ver con el descubrimiento de reglas y principios, con la conquista del caso general a partir de ejemplos particulares. La inducción es tan omnipotente en nuestra vida cotidiana como la deducción.

> *"Aún cuando la capacidad de razonar inductivamente tiene una importancia crítica, el razonamiento inductivo, igual que el deductivo, puede llevarnos —y lo hace a menudo — a conclusiones que no concuerdan con los hechos."* (Nichersson 1987 p. 54)

En este estadio, el sujeto alcanza un desarrollo cognítivo más complejo que en los periodos anteriores. Puede verse objetivamente; su cuerpo y su pensamiento const.tuyen cosas diferentes. Acepta y comprende que se puede al mismo tiempo compartir una posición real y suponerse en otra porque se mueve en el plano de la representación, ya que reconstruye en el plano mental interiorizado lo que estaba construido en el plano de la acción. Posee un pensamiento móvil, es decir, sigue el curso de las fases y su pensamiento regresa al punto de origen. Tiene la posibilidad de seguir las transformaciones que implica poder reproducir y reconocer los cambios que se llevan a cabo en un evento.

Al mismo tiempo aprende muchos términos abstractos que son la base del cálculo y razonamiento intelectual y van a ayudarle —por ejemplo— a establecer críticas basadas en juicios inductivos o deductivos que poco a poco lo van introduciendo en el mundo de la ciencia y la ► introspección.

Para Piaget esta fase se alcanza aproximadamente entre los once y doce años de edad y ' coincide con cambios físicos fundamentales en los seres humanos. Pero más que edades cronológicas se refiere a edades mentales. Desde el punto de vista de la maduración sexual el niño pasa a ser adolescente, lo que trae como consecuencia grandes diferencias con respecto a las demás etapas, sobre todo en el aspecto emocional, de lo cual hablaremos más detalladamente en el Capítulo 3 de esta investigación.

Ejemplos:

a. Alrededor de los 6 o 7 años de edad el niño adquiere la capacidad intelectual de conservar cantidades numéricas: longitudes y volúmenes líquidos.

b. Cerca de los 7 u 8 años el niño desarrolla la capacidad de conservar los materiales.

c. Aproximadamente a los 9 o 10 años el sujeto ha accedido al último paso en la noción de conservación (la conservación de superficies).

d. El individuo clasifica objetos de acuerdo con el tamaño de éstos y a su preferencia.

► **e.** El infante sabe diferenciar el peligro al cruzar las calles, conoce las luces del semáforo y sus significados.

Estadio de las operaciones formales

En el estadio de las operaciones formales el sujeto deja a un lado la realidad concreta. Es capaz de separar las relaciones y las clasificaciones de sus vínculos concretos o intuitivos.

Con estas operaciones y con el dominio del lenguaje que poseen en esta edad, son capaces de acceder al pensamiento abstracto, abriéndoseles las posibilidades perfectivas y críticas que facilitan la razón. El pensamiento formal naciente reestructura las operaciones concretas subordinándolas a nuevas estructuras, cuyo despliegue se prolongará durante la adolescencia y toda la vida posterior con otras muchas transformaciones todavía.

Según Piaget cerca de los once a los doce anos se da el complemento de las operaciones concretas dando paso a un nuevo periodo operatorio, característico de la adolescencia, que llega a su punto de equilibrio alrededor de los quince años y sigue en toda la vida adulta, llamado estadio de las operaciones formales, las cuales permiten perfeccionar las construcciones aún limitadas y con lagunas parciales propias de las operaciones concretas.

Mientras el sujeto que se encuentra en el estadio de las operaciones concretas tiene dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas en esta etapa el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Desarrolla sentimientos idealistas y se logra la formación continua de la personalidad, hay un mayor desarrollo de los conceptos morales.

Nieto (1978) llama al estadio de las operaciones formales, la etapa de la abstracción e introspección.

"...el pensador concreto es mía persona que no ve más que relaciones limitadas e inmediatas 1/ *tiene una escasa conciencia de las Ínter relaciones.*
Mientras que el pensador formal es capaz de integrar las generalizaciones, de ' tener insights 1/ *de ver la interacción existente entre las ideas y las acciones/*" (Prfr. Nichersson **1987 p. 48)**

Piaget expresa que no toda la población llega al nivel abstracto. Sin embargo, el individuo en el estadio de las operaciones formales es capaz de dejar a un lado la realidad concreta liberando las relaciones y las clasificaciones de sus vínculos concretos o intuitivos, hasta llegar a desprenderse de lo concreto y situar lo real en un conjunto de transformaciones posibles con intereses orientados hacia el porvenir.

El estadio de las operaciones formales es la edad de los grandes ideales o del comienzo de nuevas teorías, sobre las simples adaptaciones presentes a lo real. Transformaciones del pensamiento, que hacen posible la elaboración de las hipótesis y el razonamiento sobre las proposiciones desligadas de la comprobación concreta y actual; forma una estructura para extraer de ello los aspectos lógicos sin caer en el logicismo, sino, simplemente en servirse de un álgebra general y cualitativa más bien que recurrir a la cuantificación estadística. (Crfr. Piaget e Inhelder 1969 pp. 131-133).

Al nivel de las operaciones concretas, el sujeto pasa directamente a la acción por métodos de seriación y de correspondencia serial, pero cuando se encuentra dentro de las operaciones formales, el sujeto busca un inventario previo de los factores y tiene la posibilidad de formular hipótesis, de hacer proposiciones mentalmente, de hacer altas abstracciones. Es la etapa correspondiente a las facultades superiores de los seres humanos.

Al principio de este estadio se produce una especie de egocentrismo intelectual debido a que — como en otras etapas— el sujeto piensa que su punto de vista es el único. Pero en la medida que ejercita su nueva habilidad de reflexión, su punto de vista se amplía y considera el punto de vísta de los demás;

"...será capaz de manipular transformaciones según las cuatro posibilidades I (transformación idéntica), N (inversa), R (recíproca) y C (correlativa), lo que constituye un grupo de cuatro transformaciones que reúne, en un sólo sistema las inversiones y las reciprocidades, llevando a cabo así la síntesis de las estructuras parciales construidas hasta allí al nivel de las operaciones concretas" (Piaget e Inhelder 1969 p. 140).

Es decir, ahora puede manejar algo más que las situaciones concretas y reales de la etapa anterior. Puede pensar en forma lógica sobre cosas abstractas, cosas que sólo existen en su mente. Puede ingresar inferencias, enfrentar situaciones hipotéticas, cavilar en posibilidades, crear teorías y sacar conclusiones lógicas sobre sus consecuencias, aún sin haber tenido experiencia directa en la materia.

Desde el inicio de las operaciones formales

"...el sujeto después de algunos tanteos, hace su lista de factores, a título hipotético; luego los estudia uno por uno, pero disociándolo de los otros, es decir, que hace variar uno solo cada vez, dejando iguales los demás" (Piaget e Inhelder 1969 p. 146).

En las operaciones formales el sujeto es capaz de diferenciar la forma del contenido, de razonar correctamente sobre proposiciones en las que no cree o no cree aún pero que considera a título de puras hipótesis;

de sacar las consecuencias necesarias de verdades simplemente posibles, lo que constituye el principio del pensamiento hipotético-deductivo o formal.

Las operaciones nuevas por ser combinatorias, comprenden todas las combinaciones, incluidas precisamente las inversiones y las reciprocidades, fusión operatoria en un todo único, en el sentido de que cada operación será en adelante a la vez la inversa de otra y la recíproca de una tercera, lo que da cuatro transformaciones: directa, inversa, recíproca e inversa de la recíproca (cuaternalidad de las operaciones formales), siendo esta última al mismo tiempo correlativa (o dual) de la primera, Esta generalización de las operaciones de clasificación o de las relaciones de orden desemboca en lo que se llama una *combinatoria* (combinaciones y permutaciones), la más sencilla de las cuales está constituida por las operaciones de combinaciones propiamente dichas o clasificaciones de todas las clasificaciones. Esa combinatoria es de una importancia primordial en la extensión y el refuerzo de los poderes del pensamiento porque, apenas constituida, permite combinar entre sí objetos o factores físicos e incluso ¡deas o proporciones (lo que engendra una nueva lógica) y por consiguiente razonar en cada caso sobre la realidad dada. (Cfr. Piaget e Inhelder 1969 pp. 133-139),

En este periodo los individuos comienzan a dominar las relaciones de proporcionalidad y conservación, A su vez, sistematizan las operaciones concretas del anterior periodo, y desarrollan las llamadas operaciones formales, las cuales no sólo se refieren a situaciones reales como la anterior, sino también a todas las situaciones posibles. Con estas operaciones y con el dominio del lenguaje que poseen en esta edad, los infantes son capaces de acceder al pensamiento abstracto, acrecentando las posibilidades perfectivas y críticas que facilitan la razón,

Cuando el individuo logra acceder *a* las operaciones formales es capaz de dar todas las combinaciones posibles de un evento probabilístico, lo que refuerza considerablemente los poderes deductivos de la inteligencia. El sujeto logra fácilmente (aproximadamente a los doce años para las combinaciones y algo más tarde para las permutas) encontrar un método exhaustivo, sin descubrir aún una fórmula, pero obteniendo un sistema que tiene en cuenta todas las posibilidades. Es así como el estudiante se inicia en la preálgebra, logrando poco a poco la obtención de una fórmula algebraica para resolver un conjunto de problemas del mismo tipo, ahorrando a la vez tiempo, porque no necesita de lo real para poder deducir todas las combinaciones y permutaciones posibles. (Cfr, Piaget e Inhelder 1969 pp. 134-135).

En este estadio los mecanismos reguladores son de tal naturaleza que permiten no solamente compensar las perturbaciones reales, sino incluso anticipar y compensar perturbaciones posibles, lo que se traduce en equilibrios más estables. Es decir, el sistema cognitivo crea la tendencia a reestablecer el equilibrio perdido y muestra una tendencia a reaccionar ante las perturbaciones externas introduciendo modificaciones en su organización que aseguran un equilibrio más estable que le permiten anticipar y compensar un número, cada vez mayor, de perturbaciones posibles, lo que genera más posibilidades de supervivencia.

Cabe mencionar que la liberación de los mecanismos formales del pensamiento, con respecto a su contenido, no desemboca solamente en la constitución de una combinatoria sino en la elaboración de una estructura bastante fundamental, que señala a la vez la síntesis de las estructuras anteriores de ‘agrupamientos’ y el punto de partida de una señe de nuevos progresos. Lo que Piaget llama cuaternalidad, es decir, el grupo de las cuatro operaciones, de las cuatro posibilidades: I (transformación idéntica), N (inversa), R (recíproca) y C (correlativa). (Cfr. Piaget e Inhelder 1969 p. 136).

En las operaciones formales se manejan eficazmente *conceptos* abstractos y la aplicación de habilidades de razonamiento. Una diferencia fundamental entre el pensador preformal y el formal reside en la capacidad de generar posibilidades y de repensar la realidad a la luz de esas posibilidades.

El pensador preformal imagina cómo las cosas podrían ser diferentes de lo que son, pero suele percibir esas diferencias como algo no ortodoxo, peculiar o desviado,

> *"...es capaz de construir toda una serie de posibilidades y de evaluar la realidad que le es relativa."* *(*Nichersson 1987 p. 47)

Piaget mencionó que una persona no llega a las operaciones formales (ni en los demás periodos de desarrollo cognitivo) en todos los contextos al mismo tiempo, ni siquiera casi al mismo tiempo, ya que depende del significado que cada sujeto le da a las cosas.

> *"Piaget reconocía que una persona puede conseguir realizar las operaciones formales dentro de esferas que le resultan personalmente importantes y familiares, mientras que no consigue realizarlas cu otras esferas." (Nichersson 1987 p. 50)*

Ejemplos:

- **a.** El individuo puede resolver satisfactoriamente ecuaciones, problemas geométricos, encuestas, test, etcétera.
- **b.** El sujeto es activo socialmente, gusta de conversar y divertirse con sus ¡guales; sus temas de conversación son variados y entretenidos.

Con los elementos de la teoría de Piaget relacionados con el periodo operacional (operaciones concretas y operaciones formales) hasta aquí expuestos hago el siguiente cuadro comparativo que me servirá de apoyo —junto con el contenido del capítulo dos con respecto a el álgebra en los planes y programas de estudio de matemáticas en educación secundaria y ¡os elementos de la teoría de Jean Piaget encontrados en éstos— en el último capítulo de este trabajo para hacer el análisis de los instrumentos del diagnóstico y ver en que *estadio se encuentran los alumnos en estudio* en los contenidos de álgebra.

Cuadro comparativo de las operaciones concretas y las operaciones formales

Operaciones concretas	Operaciones formales
Etapa de lo concreto, de lo presente, de lo rea), del aquí y ahora.	Etapa de las grandes abstracciones, de la introspección, del ser plenamente consciente de los actos que se llevan a cabo para poder controlarlos.
El sujeto manipula o agrupa lo que ha percibido. Su pensamiento es descentrado, depende del mundo real y concreto. Los agrupamientos se suceden en su mente. Puede —en situaciones concretas— atender a varios aspectos, a varias dimensiones simultáneamente y coordinarlos entre sí.	El individuo puede ingresar inferencias, enfrentar situaciones hipotéticas, cavilar en posibilidades, crear teorías y sacar conclusiones lógicas Le es posible pensar en forma lógica sobre cosas abstractas, cosas que sólo existen en su mente; imagina cómo las cosas podrían ser diferentes de lo que son.
El pensamiento se ocupa de lo real, de lo concreto, de la diferenciación de la forma y el contenido.	El pensamiento puede ocuparse de ¡o posible y no simplemente de lo real, de la forma de una afirmación en oposición (diferenciación) a su contenido, de lo abstracto y no solamente de ¡o concreto.
El pensamiento del individuo es literal y concreto, puede resolver problemas lógicamente.	El pensamiento del individuo es abstracto, puede resolver problemas abstractos que exijan el uso del cálculo y razonamiento proporcional, demostrando la capacidad de utilizar supuestos teniendo el control comprensivo de las variables, la capacidad de averiguar, de deducir todas las combinaciones y permutaciones posibles, sacando las consecuencias necesarias de verdades simplemente posibles, logrando poco a poco la obtención de una fórmula algebraica para resolver un conjunto de problemas.
	Posee un pensamiento hipotético-deductivo, formal, reflexivo, crítico, abstracto. La reflexión es obra del pensamiento, se da el caso que una reflexión obre sobre una reflexión (pensamiento reflexivo).
El ser humano tiene dificultad al aplicar sus capacidades a situaciones abstractas.	El ser humano logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo.

Se dominan (en situaciones concretas) las operaciones lógicas como la reversibilidad, la *clasificación,* la descentración, el heterocentrismo y el razonamiento inductivo, siempre que lo haga con símbolos referidos a objetos concretos.	Se dominan (en situaciones abstractas) las operaciones lógicas como a reversibilidad, la *clasificación,* la descentración, el heterocentrismo y el razonamiento inductivo.
El elemento esencial que permite al sujeto llegar a formar operaciones concretas es la noción de *reversibilidad* (pensamiento flexible), presupone el concepto de permanencia y tiene dos formas esenciales: la inversión o negación y la reciprocidad o simetría (transformaciones reversibles).	Lo que permite al sujeto llegar a formar operaciones formales es la posibilidad de moverse en el campo de la formulación, de la realización de grandes abstracciones, de la introducción en el mundo de la ciencia, del espíritu experimental, de los dobles sistemas de referencia, de los grandes ideales o del comienzo de nuevas teorías.
Se da la aparición de operaciones lógico- matemáticas y espacio-temporales consolidándose las nociones espaciales, temporales, táctiles y propioceptivas.	La noción de reversibilidad le permite establecer relaciones de oposición contraste y sucesión de hechos en el espacio y el tiempo.
Se afecta directamente a los objetos concretos-presentes o mentalmente representados o a sus reuniones (clases).	El sujeto llega a desprenderse de lo concreto, comprende términos abstractos y sitúa lo real en un conjunto de transformaciones posibles.
La clasificación de objetos y acontecimientos reflejan el uso de categorías conceptuales y jerárquicas; implican una clasificación y una generalización elemental concerniente a objetos tangibles.	Hace clasificación de clasificaciones, además ¡bera estas clasificaciones y las relaciones de sus vínculos concretos o intuitivos.
No es posible extraer dos clases no contiguas para hacer de ello una nueva clase.	Es posible extraer dos clases no contiguas para hacer de ello una nueva ciase.
El sujeto pasa directamente a la acción por métodos de seriación y de correspondencia serial.	El sujeto busca un inventario previo de los factores. Hace su lista de factores a título hipotético, luego los estudia uno por uno pero disociándolo de los otros, es decir, hace variar uno solo cada vez dejando ¡guales los demás.
Es difícil captar las diferencias existentes entre la verdad empírica y la validez lógica.	Capta mejor que el pensador preformal las diferencias existentes entre la verdad empírica y la validez lógica.
El individuo hace "operaciones" o actividades mentales basadas en las reglas de la lógica, siempre y cuando disponga de puntos de apoyo concretos. Es así como se va desarrollando la lógica y el razonamiento.	
La capacidad de aprendizaje generalizado es limitada; lo que se aprende en un contexto no se transmite fácilmente a otros contextos.	Domina la descentralización y la reversibilidad, aplica las habilidades de razonamiento y solución de problemas a contextos diferentes *de aquellos en* los que los ha adquirido.

Se adquieren relaciones de proporcionalidad y conservación, inclusión de ciases y adopción de perspectiva.	Se da la manipulación interna de conceptos, relaciones y proposiciones.
	Tienen lugar nociones ' probabilísticas (resultantes de una asimilación de azar), de descentralización, de reversibilidad de relaciones de proporcionalidad y conservación. Se distingue entre acontecimientos probables e improbables y se pueden resolver problemas referentes a cualquiera de ambos tipos. El sujeto da todas las combinaciones posibles, haciendo a la vez un control de las variables.
Se desarrollan nociones de conservación, como la identidad, número, longitud, masa, superficie, peso y volumen.	Las operaciones preposicionales que se presentan son: la implicación, la disyunción, la exclusión, la implicación recíproca.
No exige una explicación de las posibilidades fuera de los datos expuestos.	Es capaz de construir toda una serie de posibilidades y de evaluar la realidad que le es relativa. Repiensa la realidad a ia luz de esas posibilidades (inversión de la realidad y la posibilidad).
Puede observarse una aproximación casi sistemática a la resolución de que incluye ia consideración de hipótesis alternativas.	Se combinan y elaboran hipótesis y razonamientos sobre las proposiciones desligadas de la comprobación concreta y actual. Se sigue una línea de razonamiento que empieza en una afirmación hipotética o incluso obviamente falsa, para vera dónde va a parar.
Se manejan y coordinan datos mentales interiorizados con datos reales simultáneamente.	Se razona correctamente sobre proposiciones en las que no se cree o no se cree aún (se hacen proposiciones mentalmente). Se maneja eficazmente la aplicación de habilidades de razonamiento.
	Se da lugar al razonamiento inductivo: ir más allá de la información que uno recibe. La conquista del caso general a partir de ejemplos particulares y del descubrimiento de reglas y principios.
	Tiene lugar el razonamiento hipotético-deductivo: ¡os términos abstractos (base del cálculo y razonamiento intelectual) ayudan a establecer críticas basadas en juicios inductivos o deductivos.

Se inicia la invención de la combinatoria. Sólo es posible manipular transformaciones con dos posibilidades.	Tiene lugar un sistema integrado de operaciones y transformaciones: operaciones sobre operaciones (operaciones combinatorias). Se consideran todas las asociaciones posibles entre los elementos del juego (combinatoria). Se manipulan transformaciones según las cuatro posibilidades 1 (transformación idéntica), N (inversa), R (recíproca) y C (correlativa). Se reúne en un solo sistema las inversiones y las reciprocidades.
Las operaciones funcionan únicamente respecto a comprobaciones o representaciones consideradas verdaderas.	Las operaciones y actividades mentales implican conceptos abstractos e hipotéticos. Pueden aplicarse a lo posible e hipotético además de lo real.
Se tienen dificultades al enfrentarse a relaciones de segundo orden y a relaciones existentes entre relaciones.	Se manejan relaciones de segundo orden y relaciones existentes entre relaciones con más facilidad que el pensador preformal.
Sólo se ven relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones.	Se tiene la capacidad de integrar generalizaciones, de tener *insigas* y de ver la interacción existente entre las ¡deas y las acciones.
El individuo —en relación con su desarrollo intelectual— puede construir estructuras sintácticas más complejas.	El individuo cuenta con estructuras bipartitas. Es capaz de hacer la unión o listado de varias características de un objeto.
Se desarrolla la capacidad de hacer series y ordenar eficientemente.	Se combinan objetos por un método exhaustivo y sistemático.
Se utilizan las relaciones de causa y efecto directo en una situación simple de dos variables.	Se construye el concepto de proporcionalidad: relación de equivalencia entre dos o más relaciones o razones.
Se observan grandes avances en la comunicación no egocéntrica. Mejora la conjugación verbal, la expresión de la noción de tiempo relativo, la utilización de preposiciones, conjunciones y adverbios. Comprende el lenguaje escrito y términos abstractos para comprender moralejas, interpretar refranes, establecer críticas según el desarrollo de su lógica y razonamiento. Puede articular palabras largas con o sin significado y trabalenguas.	Se da la verificación de enunciados.
Procede directamente de la experiencia personal y es capaz de adoptar el punto de vista del otro.	
Puede ser enseñado y comprendido a través de analogías y algoritmos.	
Se apega más a los estereotipos que a las observaciones empíricas y los experimentos para tomar sus decisiones.	Se apega a las observaciones empíricas y los experimentos para tomar sus decisiones.

	Desarrolla sentimientos idealistas y se logra formación continua de la personalidad, hay un mayor desarrollo de los conceptos morales.
Los procesos de razonamiento se vuelen lógicos y pueden aplicarse a problemas concretos o reales.	El individuo puede ser «limitado» y exigir especulación sobre ¡as posibilidades que no han sido explicadas.
Aparecen los esquemas lógicos de sedación, ordenamiento mental de conjuntos y clasificación de los conceptos de casualidad, espacio, tiempo y velocidad.	El individuo puede requerir de una definición a través de otros conceptos de abstracciones, sin una correlación evidente con la realidad tangible.
Se mueve en el plano de la representación.	La persona puede requerir de un razonamiento deductivo a partir de hipótesis no verificadas.

Capítulo II

Los planes y programas de estudio de matemáticas en la escuela secundaria

Reforma de 1993: enfoque y propósitos

La Reforma de 1993 que se hizo a los *Planes* **y** *Programas de Estudio de Matemáticas* hace énfasis en el fortalecimiento —tanto en primaria como en secundaria— de tos conocimientos y habilidades.de carácter básico como lo son el dominio del español y la aplicación de las matemáticas. En lo referente a las matemáticas, en el planteamiento y la resolución de problemas.

En lo que a curricula se refiere, en los nuevos programas de Matemáticas de educación secundaria desaparecen los temas de lógica y conjuntos, así como el énfasis puesto por tos programas anteriores en las propiedades estructurales de los diferentes dominios numéricos. Se abandona también el tratamiento conjuntista de la probabilidad, mientras que los temas de estadística se ubican dentro del contexto más amplio de la presentación y tratamiento de la información, punto al que se concede gran importancia en estos programas.

El propósito de la asignatura de Matemáticas es dar importancia a la resolución de problemas como la práctica de pensar, con un objetivo definido: que el alumno piense, imagine la situación que éste le plantea, que entre en polémica, que lo lleve a la construcción de un aprendizaje al que pueda darle una aplicación útil y verdadera, que de importancia a ia comprensión y argumentación del conocimiento para que pase a formar parte de su experiencia y sirva de base a nuevos conocimientos. Que lo lleve a reflexionar del qué, por qué y para qué del contenido.

La enseñanza de la Matemática en México tiene como propósito general el desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de tos alumnos que le permitan:

- **a.** Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.
- **b.** Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
- **c.** Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- **d.** Reconocer situaciones análogas.
- **e.** Escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema.
- **f.** Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- **g.** Predecir y generalizar resultados.
- **h.** Desarrollar gradualmente el pensamiento deductivo.

Para ello con la Reforma de 1993 hecha a tos planes y programas de estudio, ei aprendizaje de ciertos temas no queda localizado en un sólo momento de la enseñanza ni es concebido como una sucesión de temas que deben agotarse uno a continuación del otro —como se hacía antes—, al contrario, se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas o áreas del programa, de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de la matemática y tenga la oportunidad de llevar a la practica constantemente los conocimientos adquiridos. Se resalta también la importancia, que tiene para el aprendizaje de la matemática, que el estudiante aprenda a resolver problemas utilizando el lenguaje y los procedimientos algebraicos.

El constructivismo y la práctica educativa en matemáticas

Para empezar, a nuestro parecer, dichos planes tienen una base teórica constructivista aunque no esté de manera explícita, estos toman en cuenta los conocimientos previos, la situación problemática copio oportunidad de aprendizaje y la interacción del sujeto con el conocimiento.

Los planes y programas señalan que el constructivismo es una de las teorías principales en la actual didáctica de las ciencias y de la matemática. Su *enfoque* plantea que su enseñanza debe fomentar en el estudiante la misma curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva, Su *propósito* central es que el alumno aprenda a utilizarla para resolver problemas de cualquier tipo, en los que no solamente ponga en práctica los procedimientos y técnicas adquiridas en la escuela, sino también su curiosidad e imaginación creativa.

Es decir, el conocimiento es abstraído de la acción y no de los objetos. La construcción del conocimiento tiene lugar en la mente de la persona y hay desequilibrio y equilibrio en los intercambios entre el sujeto y el objeto de conocimiento. Para que el sujeto asimile mentalmente un nuevo conocimiento este debe aportar algo suyo a los datos provistos por el objeto de conocimiento.

El conocimiento, desde la perspectiva constructivista, es una interpretación de la realidad que se obtiene como producto de la interacción entre el sujeto y el medio ambiente (conocer es hacer) que da como resultado la interiorización que el sujeto construye de la realidad; construcción humana a través de la equilibración (factor-proceso central del desarrollo mental); proceso activo mediante el cual una persona responde a perturbaciones o modificaciones en su modo de pensar por medio de un sistema de compensaciones (el resultado es una nueva comprensión y satisfacción), Es decir, un equilibrio, un estado de nivelación, satisfacción o comprensión y de construcciones sucesivas de constantes elaboraciones de nuevas estructuras. Es el sujeto el que construye su conocimiento, por medio de una actividad mental constructiva que responde a sus necesidades internas vinculadas al desarrollo evolutivo. (Cfr. García Fernández y Fabregat Deusdad 1992 p. 100),

¿Qué es lo que los planes y programas de estudio con su enfoque constructivista, demandan del alumno?

a) "La producción de un pensamiento reflexivo e intuitivo en cuanto a sus éxitos y fracasos en las tareas del programa; y

b) la inculcación de una percepción de sí mismo como generador activo de conocimiento e información y no como receptor y reproductor pasivo de aquéllos."

Es así cómo el sujeto construye su conocimiento, y lo hace a partir de sus construcciones anteriores (conocimiento previo).

El núcleo de la actividad constructiva por parte del estudiante consiste en construir significados asociados a su propia experiencia. Su punto de partida, es una red de información, de imágenes, de relaciones, de anticipaciones y de inferencias alrededor de una idea. El proceso de construcción de significados es gradual y permanente y se da como un proceso de reorganización (equilibrio- desequilibrio). El trabajo del estudiante consiste en extraer de tal concepción relaciones y patrones; un conjunto coordinado de acciones que conducen al conocimiento viable, a los conceptos y a la generación de algoritmos. (Prfr. Moreno Armella 1996 pp. 62-64).

El estudiante no está conscientemente buscando esquemas lógicos. Más bien, está tratando de encontrar el sentido de aquello a lo que se ve enfrentado. Esta búsqueda del sentido es una necesidad cognoscitiva, porque la matemática se desarrolla en un escenario ideal. Los términos "conjunto", "función", etcétera, corresponden a experiencias mentales. Es imposible, en este punto, dejar de reconocer el papel central de la abstracción reflexiva, como el mecanismo que da lugar a las experiencias del mundo matemático. La matemática da cuenta de la estructura de un mundo ideal, cuya "materia prima" son las acciones interiorizadas del sujeto. (Prfr. Moreno Armella 1996 pp. 62-64).

Así pues, son los sujetos los que construyen sus propios significados mediante la interacción que tiene con su maestro, sus compañeros de clase y con el objeto de conocimiento. Dicho con otras palabras, el alumno es el responsable de su propio conocimiento (artífice del proceso de aprendizaje). Un aprendiz que selecciona y transforma la información, que construye hipótesis y toma decisiones utilizando una estructura cognoscitiva que da significado y organización a las experiencias y le permite 'ir más allá de la información que se le ha dado'.

La organización es uno de los atributos que posee la inteligencia. Está formada por las etapas de conocimientos que conducen a conductas diferentes en situaciones específicas.

De esa manera el constructivismo apunta a la acción porque implica modelos de acción, reacción y sentido crítico, convirtiendo al aula en un espacio dinámico de interacción intersubjetiva e intrasubjetiva.

¿Qué es el aprendizaje desde la perspectiva constructivista en los planes y programas?

El aprendizaje, dentro del constructivismo, es un proceso activo, donde el aprendiz construye activamente nuevas ¡deas o conceptos con base en su conocimiento actual o pasado y su interacción con el mundo. Sólo así, los conceptos interiorizados, las reglas y los principios generales pueden consecuentemente ser aplicados en un contexto del mundo real y práctico. Esto le facilita al sujeto un intento de integración de las ideas, proporcionándole a la vez una lectura y una utilización crítica de los conocimientos.

> "...e*l aprendizaje se forma construyendo nuestros propios conocimientos desde nuestras propias experiencias."* (Ormrod, J. E. 2003 p. 227)

Conforme el individuo se va desarrollando física e intelectualmente sus estructuras cognitivas también se desarrollan y pasan de un estadio menor a otro más avanzado, es decir, su desarrollo mental y su inteligencia van aumentando. Así pues, el pensamiento y la inteligencia son procesos cognitivos que tienen su base en un substrato orgánico-biológico determinado que va desarrollándose en forma paralela con la maduración y el crecimiento biológico; y le permite al individuo el manejo y asimilación de información, de manera objetiva y analítica.

> *De acuerdo con la interpretación constructivista la matemática se reconoce como una actividad esencialmente abstracta, en donde la abstracción reflexiva es el eje*
>
> *de la actividad, y la interiorización de las acciones es su punto de partida.* (Prfr. Moreno Armella 1996 p. 60)

Documentos de apoyo para la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la secundaria

Así pues, para lograr un mejor desempeño en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la Secretaría de Educación Pública **(SEP)** ha diseñado los siguientes documentos y videos:

1) **Planes y programas de estudio de Matemáticas.**

2) **Libro para el maestro. Educación secundaria, Matemáticas.**

3) **Secuencia y organización de los contenidos, Matemáticas.**

4) **Fichero de actividades didácticas.**

5) Colección de videos *El mundo de las matemáticas.*

6) Colección de videos *Resuélvelo.*

7) Guía de estudio. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.

8) Lecturas. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.

Contenidos programáticos de álgebra en la escuela secundaria

Los historiadores distinguen tres etapas de desarrollo del álgebra: *álgebra retórica,* cuando todavía no existían símbolos algebraicos y tanto los problemas como las ecuaciones se expresaban enteramente en el lenguaje natural; *álgebra sincopada,* en la que el lenguaje natural se combina con el uso de algunos símbolos; *álgebra simbólica* (que es la que utilizamos hoy en día) cuando el lenguaje algebraico se ha vuelto autónomo en relación al lenguaje natural y tiene sus propias reglas de sintaxis. (Prfr. Alarcón, J, 1995, p. 147)

El *álgebra clásica* que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos.

> *"Ceriains pourraient dire: les niathématiques qui nous importent sont les mutilé i na tiques dites classiques que suffisent bien aux apphcations. Il n'en est rien; les mathématiques contemperadles sont ¿nfiniment plus applicables, plus riches d' applications, dans le domable des Sciences exactas comnie dans celui des Sciences sociales, que la démarche dite classique."* **(OCDE,** 1963, pp. 239-248).

El álgebra ha sido tradicionalmente uno de los temas centrales de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria. En los nuevos programas con la Reforma de 1993 conserva este carácter, pero propone además algunos contenidos de preálgebra desde el *primer grado,* con el propósito de aprovechar las oportunidades que ofrecen la aritmética y la geometría para que los estudiantes se inicien gradualmente en la utilización de las expresiones con literales, así como a las primeras reglas sencillas de escritura algebraica y otros temas que preparan el acceso al álgebra.

Para lograr un aprendizaje significativo del álgebra es necesario que los símbolos y las operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares: para adquirir poco a poco seguridad y destreza en el manejo de los procedimientos algebraicos y utilizarlos para resolver problemas cada vez más complejos. (SEP, 1995, p. 162)

El objetivo en toda la enseñanza del álgebra es procurar que los alumnos la utilicen en el planteo y solución de problemas, como aplicación de los conocimientos adquiridos; sobre todo para dar sentido a las nociones algebraicas y facilitar la comprensión de nuevos procedimientos. Para ello, es importante que los problemas no se vean únicamente como aplicaciones de formas y maneras de resolución, sino que deberán estar presentes en todas las fases del aprendizaje. El fin es introducir y facilitar la comprensión de nuevos conocimientos, así como enriquecer los que se hayan visto con anterioridad. **(SEP,** 1995, p. 147)

Así, para enriquecer el significado de las expresiones con literales —en una primera instancia vistas como abreviaturas de los procedimientos, después como una relación aritmética o geométrica entre cantidades— es importante acompañarlas, desde el principio, con actividades que propicien la construcción de tablas de valores y su presentación gráfica.

La enseñanza del álgebra propiamente dicha comienza en el *segundo grado* de la escuela secundaria con una breve revisión de las principales reglas de escritura algebraica y con el tratamiento de las ecuaciones lineales. Se completa con algunos temas de operaciones con monomios y polinomios, con la introducción del plano cartesiano y la iniciación al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Estos temas representan el primer contacto de los alumnos y las alumnas con las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra, necesarios para todo estudio ulterior de matemática.

La idea es comenzar operando con expresiones en una variable, sin avanzar de manera prematura hacia expresiones más complicadas, que serán el objeto de un estudio más intensivo en el tercer grado, donde se profundiza y completa el estudio de los temas anteriores y se introducen los productos notables, factorización y ecuaciones cuadráticas; poniendo énfasis en la factorización de polinomios de segundo grado y la solución de ecuaciones cuadráticas por diversos métodos.

El álgebra, en la secundaria, representa la transición entre la aritmética y la geometría elementales de la primaria, así como la base de las matemáticas de grados superiores. Casi todas las matemáticas de la preparatoria y la universidad requieren del lenguaje del álgebra para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar conceptos y operar con ellos en niveles cada vez más abstractos, dando paso al pensamiento abstracto.

Las notaciones y el lenguaje simbólico del álgebra constituyen uno de los grandes logros de las matemáticas y son un instrumento imprescindible para el pensamiento abstracto y la solución de problemas. La expresión simbólica y el pensamiento abstracto se desarrollan por medio del estudio del álgebra. Los alumnos tienen dificultades para dominar este lenguaje simbólico. Es decir, al principio se desconciertan por el uso de literales, más tarde desarrollan formas de expresión y solución de problemas donde se mezclan el lenguaje natural con el uso, no siempre correcto, de expresiones simbólicas. Para ello es importante que el docente destaque la importancia que tiene pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y operar con ella. (Prfr. SEP, 1995 pp, 145-147)

La Reforma de 1993 a los planes y programas de estudio señala cinco rubros para organizar los contenidos de álgebra, sin olvidar que hay temas que pueden pertenecer a varios rubros. Además, sí lo considera necesario, el profesor tiene la oportunidad de introducir otros apartados. Los rubros o apartados son:

I. Nociones y procedimientos básicos

II. Técnicas de uso frecuente

III. Ejercicios y problemas

IV. Experiencias necesarias

V. Precisión de nociones

A continuación se presenta un cuadro con los contenidos de álgebra que se proponen en cada uno de los tres grados de educación secundaria.

Cuadro comparativo de los contenidos de álgebra propuestos en cada uno de los tres grados de educación secundaria

Primero PREÁLGEBRA Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis en la aritmética. -		
Operaciones asociadas: suma y resta; multiplicación y división. Ecuaciones del tipo: 237.45 + ... = 513.25 809.60 -... = 579.85 45 x... = 325.5	Segundo	
Iniciación al uso de literales a) Fórmulas de geometría; problemas que conducen a la escritura de expresiones algebraicas sencillas. b) Primeras reglas de escritura algebraica. c) Construcción de tablas de valores a partir de fórmulas o expresiones algebraicas.	INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO Introducción y uso de la incógnita. Primeras reglas para *simplificar* la escritura y operar con expresiones algebraicas. Uso del paréntesis.	Tercero
	EL PLANO CARTESIANO Coordenadas de un punto. Representación de regiones y conjuntos de puntos (semiplanos, franjas, rectas).	PLANO CARTESIANO Y FUNCIONES Ejemplos para revisar la noción de función Graficación de funciones y comportamiento local de una función. Familias de gráficas de la forma $y = mx+b$ Representación de conjuntos de puntos y regiones que satisfacen ecuaciones y desigualdades lineales en dos variables (casos sencillos). ________

Primero

Segundo

OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS

Diferentes tipos de expresiones algebraicas.

Evaluación de polinomios en una variable.

Propiedades de las operaciones y su aplicación al simplificar u operar con expresiones algebraicas.

Operaciones con monomios y polinomios: suma, resta, multiplicación y casos sencillos de división de polinomios.

ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

Métodos de solución de ecuaciones de las formas $a + x = b$ $ax = b$, $ax + b = c$ y de otras ecuaciones que pueden llevarse a esta forma; en particular ecuaciones de las formas $ax + b = ex + d$, $ax + bx + c = dx + ex + f$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas su solución por el método de sustitución.

Tercero

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Monomios y polinomios.

a) Leyes de los exponentes.
b) Revisión de la suma, la resta y multiplicación de polinomios.

Fracciones algebraicas.

Ejercicios de despeje y de sustitución algebraica.

ECUACIONES Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Profundización en el estudio de las ecuaciones lineales.

Métodos de solución de sistemas 2 x 2 de ecuaciones lineales.

a) Sustitución, igualación, suma y resta.
b) Método gráfico y número de soluciones de un sistema 2x2

Ejemplos de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (sistemas 3 x 3) y su solución por el método de eliminaciones sucesivas.

Primero

Segundo

Tercero

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

Extracción de un factor común.

Los productos notables:

a. $(x + a)^2 - x^2 + 2ax + a^2$

b. $(x - a)^2 - x^2 - 2ax + a^2$

c. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

d. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

y sus aplicaciones al cálculo numénco y la factorización de polinomios de segundo grado.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Solución de ecuaciones incompletas ($ax^2 + 0 = 0$, $ax^2 - bx \sim 0$); de ecuaciones completas por factorización y completando cuadrados.'

Fórmula general; discriminante y número de soluciones de una ecuación cuadrática.

Los estudiantes

La institución educativa en la que se llevó a cabo la investigación de campo es —como ya se mencionó— La Escuela Secundaria Oficial No. 710 "Miguel Hidalgo y Costilla", donde trabajé como orientadora y como profesora horas clase en ciclos escolares anteriores. La escuela tenía únicamente tres grupos: uno de cada grado escolar. Los alumnos y alumnas inscritos en ei tercer grado en el ciclo escolar 2001 -2002 en esta institución fueron 27 estudiantes, de los cuales se dieron de baja una alumna y un alumno. La primera se dio de baja el 10 de enero por cambio de domicilio; el segundo se dio de baja a finales de abril por incumplimiento, indisciplina y falta de interés en terminar la educación secundaria. La plantilla del personal docente estaba integrada por el director, la subdirectora, el orientador, dos maestros y cuatro maestras horas clase.[1] El maestro que impartía la asignatura de matemáticas iba a cumplir 19 años de servicio. Estudió la normal elemental e hizo una especialidad en matemáticas.

La escuela está ubicada en la localidad de La Concepción Coatipac, municipio de Calimaya, a 14 kilómetros al sur de la ciudad de Toluca. Es una localidad de aproximadamente 2,400 habitantes. Prácticamente tranquila, pero comienza con pequeños problemas de pandillerismo, alcoholismo y drogadicción entre los jóvenes. Es una zona semiurbana, Cuenta con los servicios de luz, teléfono, alumbrado público, calles pavimentadas, drenaje y agua. Pero también tiene una pequeña colonia, más o menos de unos 300 habitantes, que no cuenta más que con los servicios de luz y agua y eso no bien instalados. Los alumnos y alumnas que acuden a esta institución provienen tanto de la localidad, como de la colonia. Sus edades oscilan alrededor de los quince años, aunque hay dos alumnas de 13 años que nacieron en el año de 1988 —una en enero y otra en abril— y otras dos de 16 años que nacieron en 1985

Los estudiantes provienen de un hogar humilde, integrado -en su mayoría— por 6 personas: papá, mamá y cuatro hijos; aunque también hay alumnos y alumnas que tienen 1, 2, 3, 4 o 5 hermanos Asimismo hay tres hogares donde la mamá tiene la responsabilidad de ser madre y padre a la vez, porque es madre soltera, separada o viuda. Además hay una alumna que no tiene ni a su papá ni a su mamá **y** que vive con sus 3 hermanas menores, 2 primas, 1 primo, su tío y su tía.

En su mayoiía trabaja tanto la mamá como el papá. Las ocupaciones de los padres y de las madres son generalmente como empleados en fábricas, talleres de costura, albañilería, electricistas, vigilantes en una escuela o fábrica, campesinos o empleadas domésticas. La gran mayoría de las personas que trabajan no cuenta con los servicios médicos ni prestaciones. Además, hay un padre de familia que no tiene un sueldo fijo porque su trabajo consiste en cantar en los camiones. Los padres no tienen una profesión, la mayoría sólo tiene los estudios de primaria; el padre y la madre de una alumna no saben leer ni escribir; otro caso es el de la madre de una alumna, que tampoco sabe leer ni escribir; otro más es la mamá —cuya edad es avanzada— de un alumno, que sólo estudio hasta el segundo grado de primaria. Sólo un padre de familia tiene estudios de educación secundaría; otro estudió la secundaria abierta y ahora estudia la preparatoria abierta y se desempeña como profesor del taller de electricidad y computación dentro de la misma escuela a la que acude su hijo y los demás alumnos y alumnas en estudio.

[1] Cabe mencionar que en este ciclo escolar yo gozaba de un año de periodo sabático.

Algunos de los estudiantes trabajan: unos ayudan en la costura, otros tienen un horario específico de trabajo; tal es el caso de un alumno, que trabaja por las tardes y fines de semana en un taller donde hacen coladeras y, una alumna que ayuda en una tienda.

Además de los problemas económicos, algunos hogares tienen problemas de desintegración familiar, mala comunicación, infidelidad, maltrato físico y psicológico, alcoholismo de uno o de los dos cónyuges —tal es el caso de una alumna— o de uno o más hijos así como la falta de interés en las tareas escolares de sus hijos. Esto se refleja en la irresponsabilidad de los padres para desempeñar de la mejor manera posible su rol de padres. Hay descuido y desinterés por los hijos, lo que se refleja en el aprovechamiento escolar de los educandos y en la falta de interés por continuar con sus estudios y terminar una carrera.

Selección y aplicación de los instrumentos

El instrumento que empleamos para conocer el desarrollo cognoscitivo de ios estudiantes en álgebra del tercer grado de la Escuela Secundaria Oficial No. 710 “Miguel Hidalgo y Costilla" fue un cuestionario —instrumento de la investigación diseñado por mí y aplicado por el profesor titular, a los alumnos en estudio casi al final del ciclo escolar— con ejercicios y problemas tomados del *Libro para el maestro de matemáticas* con ios temas y los objetivos de Álgebra señalados en ios *Planes y programas de estudio de matemáticas,* considerando las sugerencias dadas en la *Secuencia y organización de los contenidos,* primera y segunda edición. Dichos exámenes se encuentran en la parte de anexos de este trabajo de investigación donde el lector puede consultarlos.

Para ¡ntegrar el cuestionario, realicé una revisión exhaustiva de todos los problemas y ejercicios de álgebra señalados en eí *Libro para el maestro* editado por ¡a SEP, resolviéndolos e identificando en cada uno su relación con la *Secuencia y organización de los contenidos* considerando el tema y el objetivo al que correspondían; los separé por temas, identifiqué e hice grupos de los ejercicios y problemas similares, y entre cada grupo elegí algunos que —a mi criterio— eran los más completos y encerraban varias características de todos los ejercicios y problemas propuestos para cada tema y que cumplían con los objetivos propuestos.

El cuestionario estuvo integrado por 23 ítems y los temas que involucraban fueron:

1) Plano cartesiano y funciones

2) Operaciones con expresiones algebraicas

3) Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

4) Productos notables y factorización

5) Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Cabe mencionar que para el cuestionario se pidió a los alumnos —dentro de las instrucciones generales— hicieran lo que se pedía, realizando todas las operaciones necesarias sin borrar nada. Para ello se dejó el espacio suficiente en cada problema o ejercicio y se les dio la opción de utilizar hojas

blancas, en caso necesario, para llevar a cabo todas las operaciones correspondientes. Todo eso con la finalidad de conocer el procedimiento o camino que cada adolescente siguió para llegar al resultado. Desgraciadamente, algunos alumnos no entregaron todas las hojas donde hicieron las operaciones, otros las borraron y otros más las tacharon o encimaron.

Análisis de las respuestas

Las respuestas dadas por los estudiantes me permitieron confrontar la teoría de Jean Piaget con los Planes y Programas de Estudio de Matemáticas con la realidad en el aula. Para guiar el análisis construí, en el capítulo 1, el cuadro comparativo de las características y actitudes del pensador concreto y el pensador formal. Así como el cuadro comparativo —del capítulo 2— con los temas de álgebra que integran dichos planes y programas en cada uno de los tres grados escolares de secundaria.

La confrontación la hago por temas considerando los problemas y ejercicios que planteé en cada uno de ellos en el cuestionario que se les aplicó a los alumnos en estudio. Además señalo el objetivo y los conocimientos que deben desarrollarse en cada uno de los grados escolares de secundaria conforme a los planes y programas de estudio. También hago referencia a los procedimientos que sigue el alumno para llegar a la solución de cada uno de los ejercicios y problemas planteados y finalmente lo confronto con la teoría de Jean Piaget.

Dicho análisis fue conformando de la siguiente manera: en un primer acercamiento elaboré un cuadro —que está al final del análisis de cada ejercicio o problema— dónde recaudo parte de la información que cada alumno presentó, como por ejemplo si da respuesta a no a el planteamiento, si lo resolvió o no, si procede a su resolución aritméticamente o algebraicamente y en algunos casos señalo lo que el alumno fue capaz de hacer y lo que no. La numeración de los ejercicios y problemas esta conforme al cuestionario que se les aplicó a los alumnos en estudio y que se encuentra en la parte de anexos de este trabajo.

En un segundo momento del análisis escaneé algunas de las respuestas representativas de las soluciones que dan los alumnos, en las cuales señalo el procedimiento que cada uno siguió para dar solución ha dicho problema o ejercicio. El objetivo era ver si los estudiantes se movían en el plano concreto o en el campo de la formulación.

Cabe mencionar que —a lo largo de esto capítulo— el orden de manera ascendente en el que presento las respuestas que dieron los estudiantes, así como los procedimientos que siguieron, obedece a periodos de estadios cada vez más completos y avanzados en el escolar. Es decir, a procesos cada vez más superiores del pensamiento que corresponden, a la vez, a un desarrollo de la inteligencia más completo.

El análisis tiene varios momentos, primero me enfoco a los diferentes tipos de respuestas, que dieron los estudiantes, posteriormente se hace el análisis por cada ejercicio o problema y finalmente por tema. También presento tres tablas comparativas: una de la resolución de los ejercicios, otra de la resolución de problemas, y una más de la resolución de los ejercicios y problemas que cada alumno fue capaz de resolver.

En dicha investigación elegimos 2 ejercicios y 2 problemas para hacer un análisis más detallado para mostrar más a fondo al lector las diferencias que existen entre una repuesta y otra, conforme al grado de pensamiento en que se encuentra cada uno de los estudiantes.

Plano cartesiano y funciones

El tema del plano cartesiano se introduce desde el primer grado de secundaria, por medio de la representación gráfica de los datos de una tabla y las gráficas de variación proporcional entre dos cantidades. La finalidad es que los alumnos empiecen a familiarizarse con las funciones.

En el segundo grado se localizan regiones y subconjuntos que satisfagan condiciones sencillas: semiplanos, franjas, rectas y cuadrantes. Ya en el segundo y tercer grados los alumnos localizan en el plano cartesiano las regiones y conjuntos de puntos que satisfacen algunas condiciones algebraicas dadas.

El propósito principal de los planes y programas de estudio de la Reforma de 1993 no es introducir los procedimientos algebraicos para resolver desigualdades o sistemas de desigualdades lineales, sino enriquecer el significado de las expresiones algebraicas mediante su representación en el plano cartesiano.

Por ejemplo el Libro para el maestro de Matemáticas de educación secundaria en la página 179 señala lo siguiente:

> *. .si se pide al alumno que localice los puntos que satisfagan y-3x ~ 5, debe tener la oportunidad de encontrar mentalmente algunos valores y desarrollar sus propios procedimientos, pues si desde el principio se le enseña a encontrar valores despejando una de las variables y asignando valores a la otra, se pierde el objetivo pedagógico de la actividad."*

Uno de los objetivos de la Reforma del 93 hecha a los Planes y programas de estudio es que el alumno al inicio del tercer grado sepa: 1) que un sistema de coordenadas es la representación matemática de la posición de puntos; 2) que las coordenadas cartesianas están formadas por un par de rectas en una superficie plana, o plano, que se cortan en ángulo recto; 3) Que cada una de las rectas se denomina *eje;* 4) que el punto de intersección de los ejes se llama *origen;* y 5) que los ejes se dibujan habitualmente como la horizontal y la vertical, y normalmente se les denomina xe *y* respectivamente.

Con dichos conocimientos los alumnos y las alumnas del tercer grado podrán localizar las regiones y conjuntos de puntos que satisfagan algunas condiciones algebraicas dadas, así como rectas de las formas ax + by = c y algunos casos sencillos de sistemas con dos desigualdades lineales.

En relación a este tema del plano cartesiano y funciones se les planteó a los alumnos un problema y dos ejercicios de tabulación y graficación de expresiones algebraicas para identificar si estos:

a) Han adquirido la *noción de función.*

b) Son capaces de predecir el *comportamiento de una función* y *de familias de funciones.*

c) Organizan los valores de x e *y* como pares de coordenadas.

d) Señalan la gráfica como el resultado de una función,

e) Presentan correctamente el plano cartesiano.

f) Comprenden las expresiones algebraicas que se les presentan.

g) Aplican correctamente dichos conocimientos en la resolución de problemas.

Todo esto (junto con las demás situaciones problemáticas que se les presentaron) nos ayudará a saber si los alumnos cuentan con un pensamiento formal o se mueven aún en el campo de lo concreto, O bien si el estudiante ha alcanzado un pensamiento formal sólo en ciertas esferas.

El primer problema que se les planteó a los alumnos relacionado con el tema del plano cartesiano y funciones fue el siguiente:[2]

Un agente de ventas recibe dos ofertas de empleo de una misma compañía: un salario base mensual de N$ 500 más un 8 % de comisión sobre Jas ventas, o bien un 15 % de comisión sobre las ventas, sin salario base: Escribe en cada caso una fórmula para indicar como dependen los ingresos del agente de las ventas que realiza. Construye una tabla para comparar ios ingresos posibles en cada caso; por ejemplo, ¿cuánto recibe en cada caso si vende 1000, 2000, 3000,... pesos? ¿En qué casos le conviene aceptar una n otra oferta?

Cabe mencionar que la resolución de este problema no es nada sencillo. Para resolverlo el individuo deberá tener ciertos conocimientos tales como el de variación directa proporcional, función, proporción, construcción de tablas, incremento o detrimento de una cantidad, cantidades absolutas y relativa, y saber obtener el tanto por ciento de una cantidad; Así mismo para resolver dicho problema el sujeto deberá tener ciertos elementos de un pensador formal como lo son el utilizar un lenguaje simbólico (literales y expresiones algebraicas), tener habilidad de razonamiento y capacidad de abstracción y formulación,

Para identificar estos conocimientos y elementos se le pidió la construcción de una tabla comparativa y la elaboración de una fórmula algebraica que le sirviera para calcular cualquier cantidad de venta, además se le sugirieron algunas cantidades y se le pusieron puntos suspensivos después de las mismas para que hiciera cálculos con otras cantidades no dadas.

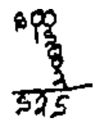
[2] 'Todos los ejercicios y problemas Rieron tomados del **Libro para el maestro de Matemáticas.** Educación Secundaria. Editado por la **SEP** en el año de 1995. En la parte de anexos de esta investigación, se adjunta el cuestionario que fue aplicado a los estudiantes y ahí se hace referencia de la pátina de la que fueron tomados cada uno de ellos.

Algunas de las respuestas y procedimientos que dieron los alumnos son:

1. Una alumna no comprendió el problema. Presenta al 500 como oferta, el 18 como salario, el 8 como ventas y el 2 como tablas. Además suma estas cantidades dando como resultado 525. Presenta datos, operación y resultado de una manera mecánica y errónea.

o.s
ó/etkc*

-lo^loS



La estudiante sabe que tiene cantidades para operar con ellas, pero no esta conciente del procedimiento a seguir. En este caso llevó a cabo una suma —la operación básica más sencilla y no otra operación— con algunas de las cantidades que se le dieron, todo ello de forma intuitiva, sin tener conciencia del procedimiento empleado (característica del pensador preoperatorio). No razonó qué procedimiento podía seguir para obtener la respuesta que satisfaciera dicho planteamiento. Además presentó como datos algunas palabras del problema, entre ellas "tablas".

2. Otra alumna más que no comprendió el problema. No supo sacar el tanto por ciento de una cantidad. Resta 8 o suma 15 a las cantidades que se le dieron.

fiolax	t sz.	
	H9Z	01$

	1 AfZ	2^/5
dooó		

= 2 ao ?

- y 00 ?

Esta alumna también opera de manera intuitiva con las cantidades dadas (suma y resta), sin tener conciencia del procedimiento empleado y sin saber obtener el tanto por ciento de una cantidad. Pero a diferencia de la anterior, ésta presenta una tabla y distingue datos importantes en el problema (salario base, algunas cantidades de venta, el 8% y 15 %). Algo más que podemos destacar de esta respuesta es que esta persona hace operaciones mentales de suma y resta.

3. Una alumna obtuvo únicamente el 8 por ciento de 500 y el 15 por ciento de 1000. Pero no entendió el problema o se confundió con dichas cantidades; multiplica estos resultados (40 y 150) por las cantidades que se le dieron. También multiplica 150 x 4000.

Opei oc
--- -------- xooo
> ÍOOO ~ SOOOO\
>u5 do v zoco =

150 X IOOO
=300DOD

'Vc.SoWcxA o
Le. Gcvitnc ed pie

Aquí cabe destacar dos aspectos importantes: el primero es que es la única estudiante que agrega una cantidad más de venta (4000), una cantidad que no se le dio, pero que calculó posiblemente como resultado de los tres puntos suspensivos incluidos en el problema. El segundo es que, a diferencia de las respuestas anteriores, esta alumna —al igual que los alumnos que dan las siguientes respuestas- distingue, que hay dos tipos de ofertas

4. Un alumno presentó las siguientes anotación. dos tablas ninguna otra

	1000	2000	3000
5%	66.66	133	200

	1000	2000	3000
8%	125	250	375

Aunque no sabemos como obtuvo el estudiante las cantidades de 66.66 y 125, vemos dos cosas interesantes, la primera es que el escolar no ha desarrollado el concepto de proporción, ya que no fue capaz de darse cuenta que en la respuesta que dio, el 8 por ciento de una cantidad es mayor al 15 por ciento de la misma; pero por otro lado vemos que existe un incremento constante en las cantidades de cada una de las tablas, es decir, el alumno sabe que el 15% de 2000, es el doble del 15% de 1000, y el triple para 3000. Lo mismo sucede con las siguientes respuestas.

5. Alguien obtuvo tanto el 8 como el 15 por ciento de las cantidades que se le dieron, pero olvidó sumar el sueldo base, lo que le hizo dar una respuesta errónea.

¿ooo —~

qó á.OÓ'O — 6^0- A ZfD P 3COO

----------------------z £

COÓ ---------4» **A-5**

JODO — Wo C 2í>

/ -- tr ¿ 3OO

3000 ------------C

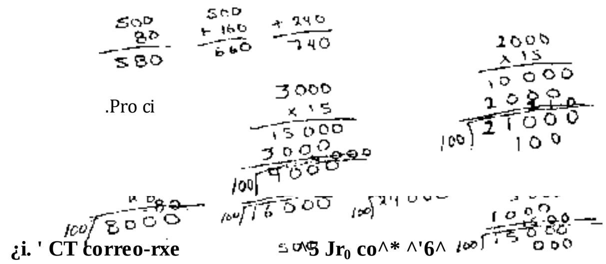
Oq LX'dcrxJo < 300

Esta persona calculó innecesariamente tanto el 8 como el 15 por ciento de 500, recordemos que ésta cantidad es el sueldo base.

6. Una alumna logró obtener el 8 por ciento de las cantidades que se le dieron y lo sumó a los 500 del sueldo base. Aunque hubo confusión en la obtención del 15 por ciento, lo que la llevó a dar una respuesta errónea. Dicha confusión estuvo en la realización de las operaciones más no en el procedimiento. Por ejemplo: se equivocó al dividir 150000 entre 100; al sumar 10000 más 2000; asi como al sumar 15000 más 3000. En toacas estas operaciones, la falta de orden y atención a lo que estaba haciendo la llevó a un resultado incorrecto. Por otro lado, esta respuesta deja al descubierto que esta persona no a interiorizado que cuando

dividimos un múltiplo de 10 mayor que quitar dos ceros tanto al divisor como una operación más sencilla. Por ejemplo:

cien entre cien podemos al dividendo y tener asi



_2I 21
100)2100 =1J21

.Pro ci

¿i. ' CT correo-rxe

5 Jr$_0$ co^* ^'6^

#soo ^ovS-Z.

,/*GO

7 O< \<r& - ¿ i ' CU
-A. C 'i \ ~>00 .,'p •2.\tx5\v>= '«'A

Aquí la alumna no relacionó que el 15% de una cantidad es un poco más del doble del 8% de la misma. No tiene o no aplicó los conocimientos de razón y proporción en la resolución de este problema,

7. Hubo dos alumnas (El v y Kar) que obtuvieron correctamente y mentalmente tanto el 8 cómo el 15 por ciento de las cantidades que se les dieron. Además sumaron el sueldo base a los resultados que obtuvieron de calcular el 8 por ciento de las cantidades dadas y lo compararon con el 15% de estas. Desafortunadamente no calcularon más cantidades de venta más que las que se les dieron, esto les llevó a dar una respuesta .errónea sin saber en que casos le convenia al agente de ventas tomar una u otra oferta. Cabe mencionar que en estos dos tipos de respuestas las colegialas presentan estructuras de pensamiento más completas que los estudiantes anteriores.

Por otro lado, Elv en su respuesta habla de dos compañías; recordemos que eran dos propuestas de salario en una misma compañía. Probablemente hubo confusión al final.

a) Estas son las operaciones que llevó a cabo Kar y la respuesta que dio:

acepiar una u oira oferta? CO0 *I« vi o í>*

-í 87. XOOÓ -

lf?y. ***(oou Z 'W- ¡y/v 'XÜOO z***
3 o ***07.*** **/ boa» "** 'ÍJO

Esta alumna, también sabe que el 8% de 2000, es el doble del 8% de 1000 y así sucesivamente con el 3000 y con el 15% de las cantidades que se le dieron. Además calculó los tantos por cientos sin presentar operaciones, pero hace el algoritmo al sumar el 8% de las ventas más el sueldo base.

b) Elv por su parte hizo lo siguiente:

y "A» o Váe’A

te. er'
1 CX Cía A oft Ac \<

15

	%	
1000	80	580
2000	160	660
3000	240	740
1000	150	
2000	300	
3000	450	

Esta alumna presenta una tabla más ordenada que las anteriores que hemos visto. Además señala el 8 y 15 % de las cantidades a la izquierda de éstas y obtiene dichos tantos por ciento en una columna a la derecha. También presenta una columna más en donde escribe la suma del 8% de las cantidades con el sueldo base sin presentar el algoritmo de la suma (a diferencia de la alumna anterior), es decir, hizo la operación mentalmente. Cabe destacar que la alumna tenía bien presente lo que iba a realizar en la tabla, de lo contrario hubiese sumado —erróneamente— los 500 del sueldo base a todas las cantidades de la segunda columna. Por último, podemos decir que aquí la alumna hizo uso del lenguaje simbólico al presentar el símbolo % en la segunda columna como la representación del tanto por ciento que iba a obtener de dichas cantidades sin importar si era el 8 o el 15 por ciento.

Algunos procedimientos que pudieron seguir los estudiantes son:

1. Elaborando una tabla

v = cantidad de venta
sb ~ sueldo base
sb + 8% = sueldo base más el 8% de v
8% el 8% de v
15% = el 15%dev
Diferencia = (sb + 8% de v) - 15 % de v

V	sb	8% v	sb + 8% v	15% V	Diferencia del (sb + 8%v)-15%v
1000	500	80	580	150“^	430
2000	500	160	660	300	360
3000	500	240	740	450	290
4000		320	820	600	220
5000		400	900	750	150
6000		480	980	900	80
7000		**560**	**1060**	**1050**	**10**
80ÓÓ		**640**	**1140**	**1200**	**-60**
9000		720	1220	1350	-130
10000		800	1300	1500	-200
11000		880	1380	1650	-170
12000		960	1460	1800	-340

V	8% v	sb + 8%	15% v
6500	**520**	**1020**	**975**
7500	**600**	**1100**	**1125**

Nota: En la columna del sueldo base se dejaron sin llenar algunos recuadros para indicar que ios alumnos podían o no colocar dicha cantidad.

Tabulando algunas ventas por debajo o por encima de 7000 hasta encontrar una cantidad de venta en la que fuera mínima la diferencia de ias dos ofertas de sueldo.

Primer oferta

$V_o=500$
$V_i = 500 + (0.08)(1)$
$V_2 = 500 + (0.08)\{2)$
$V_3 = 500 + (0.08)(3)$
$V_n- 500 + (0.08)(n)$
$\mathbf{V_n= 500 + 0.08n}$

Segunda oferta

$V_0 = 0$
$V_i = 0.15 \times 1$
$V_2 = 0.15 \times 2$
$V_3- 0.15x3$
$V_n = 0.15 \times n$
$\mathbf{V_n=0.15n}$

Igualando las dos ofertas

$0.15n = 500 + 0.08n$
$0.15n - 0.08n = 500$
$0.07n = 500$
$n = i®$ 0.07
n = 7142.85'

Respuesta:

V	sb	8% v	sb + 8% v -	15% v	Diferencia del (sb + 3%v)~15%v
6500	500	520	1020	975	430
7500	500	600	1100	1125	-360
7800	500	624	1124	1170	-46
7100	500	568	1068	1065	-3
7150	500	572	1072	1072.5	-0.5

2. Buscando la fórmula

Le conviene la primer oferta (sueldo base de $ 500 + el 8% de comisión sobre las ventas) si las ventas del mes son regularmente menores o ¡guales a $ 7142. Pero si las ventas mensuales son regularmente de más de $ 7143, le conviene la segunda oferta (15 % de comisión sobre las ventas).

Las fórmulas son: $V_n = 500 + 0.08n$, $V_n= 0.15n$ y n =

La resolución de este problema por parte de los alumnos, nos permitió ver que éstos no comprendieron el problema en su totalidad. Ninguno dio respuesta satisfactoria al planteamiento. Aunque es importante no perder de vista que no era un problema sencillo.

Once de veinticinco alumnos —lo que equivale a un 44 % del total— dejaron sin contestar el problema. Muchos no supieron obtener el tanto por ciento de una cantidad, lo que nos muestra la falta de este conocimiento en la mayoría de los estudiantes. Otros no sumaron el sueldo base al 8% de cada una de las cantidades de venta. Nadie obtuvo la fórmula que se les pidió para indicar como dependen los ingresos del agente de ventas de las ventas que lleva a cabo, situación que nos indica que el alumno no sabe resolver problemas algebraicamente y que aún no se mueve en el campo de la formulación.

Tampoco calcularon otras cantidades no dadas, que les permitiera contestar correctamente en que casos le convenía a éste tomar una u otra oferta de trabajo. Es decir, todos los alumnos, a excepción de uno, calcularon únicamente las cantidades que se le dieron: 1000, 2000 y 3000 a pesar de los tres puntos suspensivos que aparecen en el problema, dificultando el dar respuesta a la problemática planteada: "ver en qué casos le conviene al agente de ventas aceptar una u otra oferta".

En lo referente a la construcción de la tabla la mayoría no la construyó. Algunos ia presentaron pero no en forma de función, sino que lo hacen con datos totalmente erróneos o bien presentando únicamente el 8 y 15 por ciento de las cantidades que se les dieron en dicho problema. Talvez si la hubiesen construido los alumnos se hubiesen percatado de que tipo de variación había de una cantidad a otra.

Por otra parte los alumnos no hicieron uso de un lenguaje simbólico que es el inicio del álgebra y de las operaciones formales.

El análisis de las respuestas que dieron los alumnos a este problema, nos permite ver que el pensamiento de estos estudiantes es lineal y concreto, ya que aunque se les pidió la elaboración de **una** fórmula para indicar como dependen los ingresos del agente de ventas de las ventas que éste lleva a cabo, no la dieron. No utilizaron supuestos que los llevaran poco a poco a la obtención de una fórmula algebraica. Así pues, esto nos da los elementos suficientes para decir que los alumnos están dentro de las operaciones concretas. Pero lo que es muy importante señalar es que en estos diferentes tipos de respuestas, vemos como unos estudiantes tienen estructuras cognitivas más avanzadas que otros. Lo que nos permite decir que hay subestadios dentro de los estadios que señala Piaget. Es decir, algunos estudiantes están en el inicio de dichas operaciones, otros ya han avanzado más y tienen consolidados más elementos de dichas operaciones que poco a poco les permitirán acceder a las operaciones formales.

Cabe mencionar que en el análisis de cada ejercicio y problema de este trabajo de investigación, tratamos de que el orden en que se presentan las respuestas que dieron los estudiantes sea conforme a desarrollos de estadios cada vez más avanzados en el escolar. Por ejemplo, en la resolución de este problema, en la respuesta 7 vemos que estas dos últimas maneras de resolver el problema son más completas y obedecen a un desarrollo cognitivo más avanzado en los estudiantes que la respuestas anteriores que dieron sus demás compañeros.

Problema 1) Un agente de ventas recibe dos ofertas de empleo de una misma compañía: un salario base mensual de N$ 500 más un 8 % de comisión sobre las ventas, o bien un 15 % de comisión sobre las ventas, sin salario base. Escribe en cada caso una fórmula para indicar como dependen los ingresos del agente de las ventas que realiza. Construye una tabla para comparar los ingresos posibles en cada caso; por ejemplo, ¿cuánto recibe en cada caso si vende 1000, 2000, 3000,... pesos? ¿En qué casos le conviene aceptar una u otra oferta?

Nombre del alumno	Llqjd ji ri^ idilio confuí	Construyó la tabla	Dicj la for- tnJa	Fue capaz de:	Nn fue capaz de;	Observaciones
Liz	no	no	no	Obtener el 8 % de las cantidades que se le dieron y lo .sumir a los 500 del sueldo base	Obtener el % de otra(s) cantidad(es) que no se le dieron. De relacionar qué sí el 8% de 1000 eran 80, de 2000 sería el doble (160), de 3000 el triple (240)	Logró obtener el 8 % de las cantidades que se le dieron y lo sumó a los 500 del sueldo base. Aunque hubo confusión en la obtención del 15 %, lo que la llevó a dar una respuesta errónea.
Ala	-	-	-	-	-	-
Cri	no	Intentó construirla con datos erróneos y sin forma de una función (sin nombrar x *(y y)*	no	Obtuvo el 8 % de 500 y el 15 % de 1000	Sumar el sueldo a el 8% de las cantidades que se le dieron	Obtuvo tanto el 8 % de 500 como el 15 % de 1000, pero no entendió el problema. Multiplica estos resultados (40 y 150) por las cantidades que se le dieron. También multiplica 150 x 4000
Mar	-	-	-	-	-	-
Sam	no	Presentó dos tablas totalmente erróneas	no	-	Obtener el %	No comprendió el problema y no supo sacar el % de una cantidad. Resta 8 o suma 1 5 a las cantidades que se le dieron. Por ejemplo: 1000 -8 = 002, 1000 +■ 15 = 1015, y al final suma 092 + 1015 = 2007
Sel	no	Presentó una tabla tí f límente errónea	no	-	Obtener el %	No comprendió el problema y no supo sacar el % de una cantidad. Presenta como el 15% de las cantidades que se le dieron 66.61, 133.31 y 200
Rol	na	Presentó dos tablas totalmente erróneas	no	-	Obtener el % y de darse cuenta que dio resultados erróneos. En su respuesta el 8% de una cantidad es mayor al 15 %	No comprendió el problema y no supo sacar el % de una cantidad. Presentó el 66.66, 133 y 200 como 15% de las cantidades que se le dieron Y 125, 250 y 375 como el 8% ?
Ber	-	-	-	-	-	-
Moi		-	-	-	-	-
Sha	-	-	-	-	-	-
Jor	nn	no	no			No supo sacar el % de una cantidad. Al parecer multiplicó los datos que se le dieron por 0.4 obteniendo como resultados 400, 800 y 1200 respectivamente.
Ime	-	-	-	-	-	-
Ada	-	-	-	-	-	-

[3] Los resultados que presenta tanto Sel como Rol, me hace pensar que se copiaron.

Elv	no	Si pero no en forma de función ¡ sino, sólo presentando el 8 y el 15 por ciento de las cantidades que se le dieron	no	Obtener el % que se le pidió		Supo sacar tanto el 8 cómo el 15 por ciento de las cantidades que se le dieran. En el primer caso sumó el sueldo base. Al final hubo confusión o no logró entender que las dos propuestas de sueldo eran en la misma compañía y no en dos distintas. Su respuesta fue ”Ie conviene aceptar en la compañía dónde le dan un salario base mensual de $500”
Agu	-	-	-	-	-	Solamente escribe: En los egresas de ventas
Pat	no	-	-	-	-	No comprendió el problema, presentó al 500 como oferta, el 18 como salario, el 8 como ventas y el 2 como tablas. Suma estas cantidades dando como resultado 525
Rey	no					Trató de obtener tanto el 8 coma el 1 5 por ciento de 500 sin hacerlo correctamente. Pues multiplicó al 500 por 15 y par 8, pero a la hora de dividirlo entre 100 se equivocó en el resultado. Y sólo da coma resultado: "en la de 8%”
Jav	no	-	-	-		Sólo escribe 3000, sin ninguna explicación
Vic	-	-	-	-	—	-
Har	-	-	-	-	-	Únicamente escribe algunos de los datos que se le dieron: 500 + 8% + 15% y 1 000, 2000, 3000
San	-		-	-	-	-
Yes	no	No, aunque presentó los datos y las operaciones de forma ordenada.	no	Obtener el %		Supo sacar el % de una cantidad, pero olvidó sumar el sueldo base lo que le hizo dar una respuesta errónea.
Kar	no	No, aunque presentó los datos y las operaciones de forra ordenada.	no	Obtuvo bien el 8 y el ! 5 % de las cantidades que se le dieron. Sumó el sueldo base en las cantidades que así lo pedían	Escribir la fórmula y construir la- tabla en forma de función	Resolvió "correctamente el problema” pero únicamente con las cantidades que se le dan. No fue capaz de ir más allá y contestar ¿f/j *qué casos le conviene aceptar tina u otra oferta?*
Gui	-	-	-	-	-	-
Emi	-	—	-	-	-	-

Por otro lado se les pidió a los alumnos que completaran la siguiente tabla y la representaran en el plano cartesiano. El objetivo era saber si entendía la expresión algebraica $y = x + 2$, la sustitución, ver las operaciones que efectuaba y el resultado al que llegaba;- si formaba parejas ordenadas y por último ver si graficaban la función.

Completa la siguiente tabla y represéntala en el plano cartesiano:

x y-x + 2

2

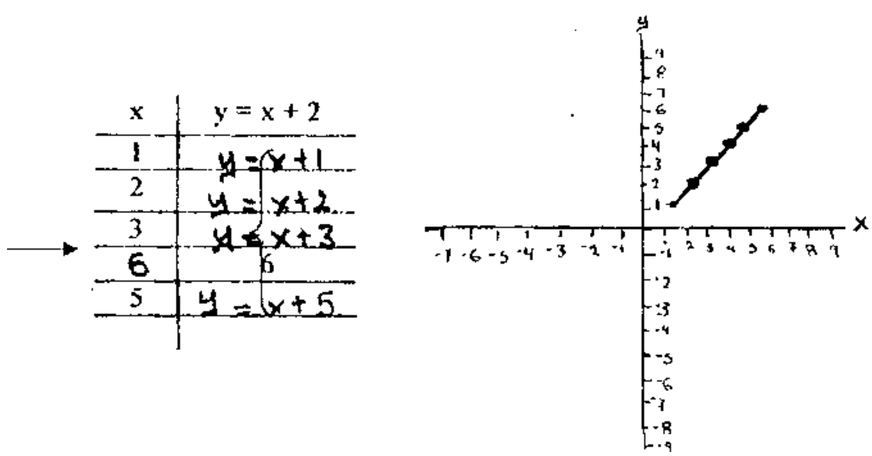
3

6

~ 5

Algunas de las respuestas que dieron los alumnos son:

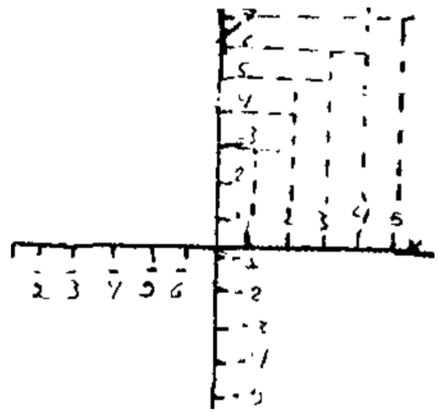
1. En la siguiente respuesta la estudiante coloca un número 6 en la primera columna. En la segunda columna deja intactas a las variables *y* y a la *x* en la función, es decir no sustituye los valores que se le dieron para x , para encontrar los valores de *y* . Más si en cambio, sustituye al 2 (valor constante y que no deberla de haber cambiado) por dichos números: 1, 2, 3 y 5 de la primer columna. Sin dar los valores de *y* . En lo referente a la gráfica localiza las siguientes coordenadas: (1,1), (2,2), (3,(3) (4,4) , (5,5) y (6, 6) .



Nota: Las flechas y las llaves no las colocaron los estudiantes, estas tienen como finalidad resaltar, en este análisis, aspectos importantes de las respuestas que dieron los alumnos.

2. Alguien más no comprendió que el valor de *y* estaba dado en función del valor de *x* y que tenia que sustituir el valor de xen la función _y = x + 2.

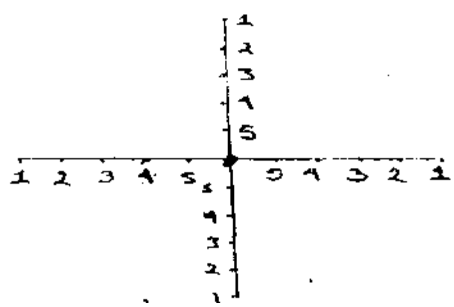
x	y = x + 2
1	y = x + 3
2	y = x + 4
3	y = x + 5
4	y = 6
5	y = x + 7
6	y = x + 8



En este caso vemos que el alumno no comprendió la expresión algebraica - x + 2. Cambió el valor de "2" que era un valor constante en lugar de considerar los valores que se le había dado para x (variable independiente). En lo que respecta a la gráfica, notamos que no elaboró una gráfica correcta y vemos además, como se apoya en lineas punteadas para localizar las coordenadas. Situación que nos indica que el escolar necesita apoyarse de situaciones concretas y que no comprende el lenguaje algebraico,

3. Hubo quien no comprendió la expresión algebraica. Dio el valor de x como la continuación de un número y no como el valor de xen una función dada. No nombró los ejes e invirtió el orden de los números en el plano cartesiano. Es decir, después del origen de dicha tabla escribió los números de mayor a menor, en lugar de comenzar con el número uno.

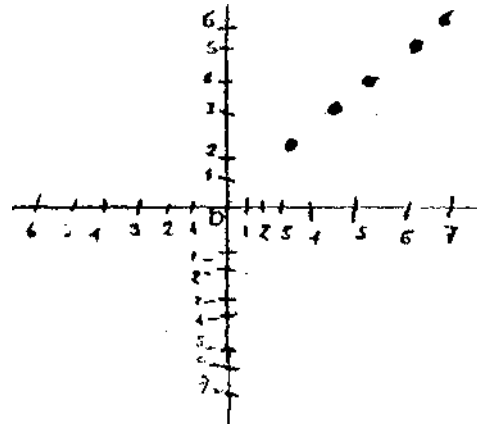
x	y = x + 2
1	
2	
3	
4	6
5	



Esto nos demuestra falta de conocimiento tanto del manejo del lenguaje algebraico como del plano cartesiano. Posiblemente el alumno colocó el número cuatro de la primer columna como una sucesión de números y no se dio cuenta de la relación que había entre ese cuatro que colocó y el seis de la columna de al lado, ya que de ser así, no se le hubiese dificultado hallar los números faltantes de la otra columna.

4. Alguien más dio el 4 de la primer columna y los números 3, *4,* 5 y 7 de la segunda columna, talvez como una sucesión de números pero sin considerar el valor de x.

X	Y=x+2
1	Y=3+2
2	Y=4+2
3	Y=5+2
4	Y=6+2
5	Y=7+2

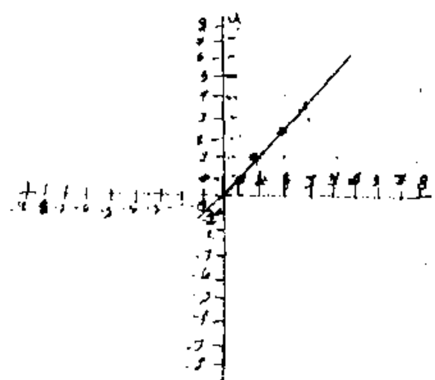


En esta respuesta vemos que el 2 permanece constante y que el alumno sabe que esa x esta representada por un número, pero no lo relaciona con la primer columna y da dichos números como una sucesión de números, También podemos observar que, aunque el plano cartesiano aún no esta correcto, el sujeto ya no se apoyó de líneas punteadas para localizar las coordenadas.

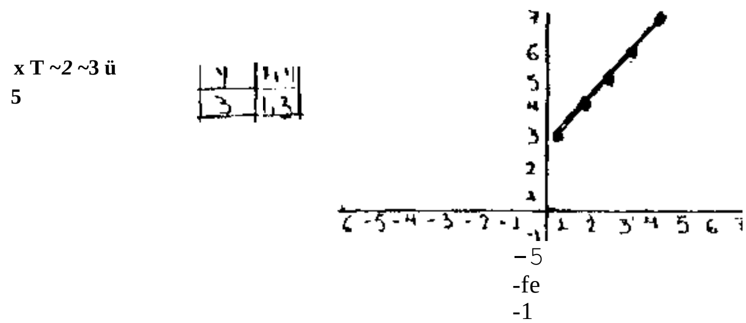
Por otro lado, hasta aquí, en este tipo de respuestas que dieron los alumnos, nos percatamos que éstos no entendieron la expresión algebraica ^ = x + 2, por lo que podemos decir que no están bien familiarizados con el lenguaje algebraico, lo cuál significa un problema muy grande, si consideramos que este es el inicio del álgebra y por consiguiente de las operaciones formales.

5. En el siguiente caso, permanece constante el 2, y el alumno sustituye los valores de x en la función dada pero no efectúa la suma para obtener, de esa manera, los valores de *y.* Veamos como suma 2 al 6 que se le habla dado en la segunda columna de la tabla, Con referente al plano cartesiano lo hace de manera incorrecta como la estudiante que di o la primer respuesta que presentamos en este ejercicio.

x	y = x + 2
1	y = [illegible] + 2
2	y = 2 + 2
3	y = 3 + 2
4	y = 6 + 2
5	y = [illegible] + 2

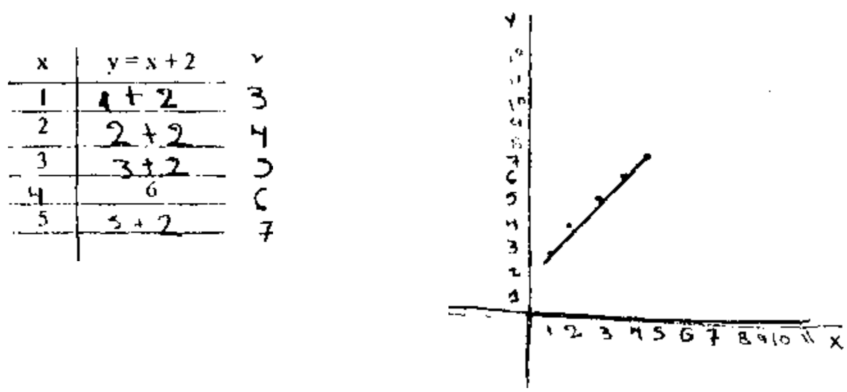


6. Alguien sustituye los valores de *x* en la función y obtiene los valores de *y* . También escribe los pares de coordenadas y finalmente los localiza en el plano cartesiano.



En este caso la estudiante necesitó tener presente los pasos que iba dando para obtener lo que se le estaba pidiendo. Es decir, no operó mentalmente, ni hizo la abstracción del par de coordenadas que iba a localizaren el plano cartesiano, sino que las escribió.

7. .En el siguiente caso la alumna sustituye los valores de x , pero sin colocar ^{vx} *y* , sólo deja la suma indicada y escribe enfrente los valores de *y como* producto de la suma. Además sabe que los valores de x y los valores de *y* , forman las coordenadas que debe localizar en el piado cartesiano.

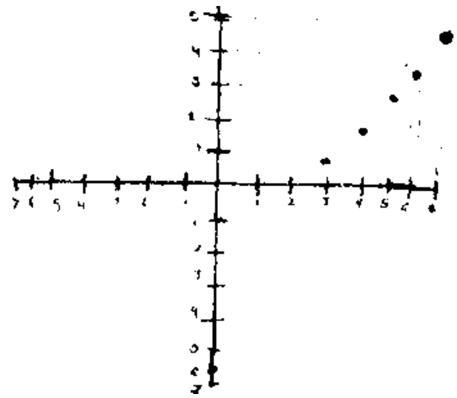


En esta resolución del ejercicio podemos destacar que la escolar presenta un solo cuadrante del plano cartesiano (+, +), que es a la vez el único que se requiere para localizar dichas coordenadas.

Nota: De aquí en adelante, en las respuestas que se presentan, los estudiantes ya no indican la sustitución del valor de x en la función, ni indican la suma del valor de x + 2. Hacen el procedimiento mentalmente. Dan correctamente los valores de y y el valor faltan te de x.

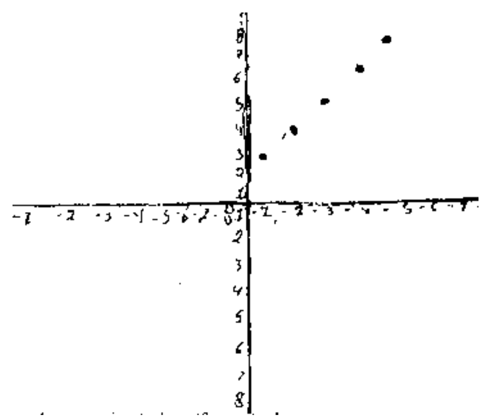
8. En este primer ejemplo la alumna invirtió la localización de las coordenadas, además de que se apoya de lineas punteadas y únicamente coloca números positivos en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.

x	y = x + 2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7



9. En el siguiente caso en lo referente a la gráfica el alumno coloca únicamente números negativos en el eje *x* y positivos en el eje *y.* Adejnás, ,al localizar las coordenadas en el plano cartesiano confunde los ejes. Tampoco considera el signo menos que colocó a los números del eje x

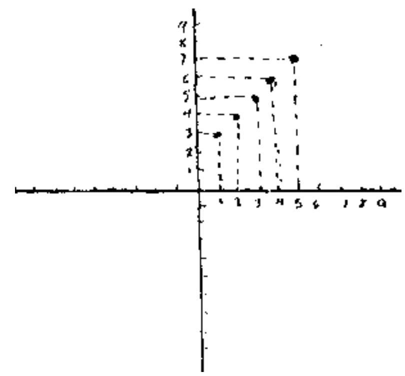
x	y = x + 2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7



En estas dos respuestas vemos que los estudiantes comprendieron la expresión algebraica $y = x + 2$ y la relación que había en las dos columnas dadas, pero la falta de un conocimiento fijo de la elaboración de un plano cartesiano, les hizo presentar un plano incorrecto.

10. En el siguiente caso el alumno también da los valores de *y* (segunda columna de la tabla). En lo referente al plano cartesiano vemos que aún se apoya de lineas punteadas para localizar las coordenadas. Algo interesante es que el estudiante dibuja los 4 cuadrantes del plano cartesiano, pero talvez al percatarse que los pares de coordenadas que va a localizar son números positivos, y que no va a ocupar los otros dos cuadrantes decide no colocar números negativos a los ejes.

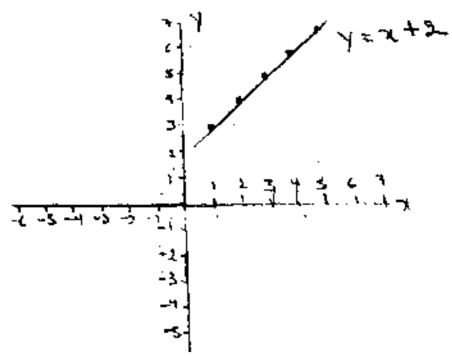
x	y = x + 2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7



11. Dos estudiantes tienen bien fundamentado el concepto de función ya que señalan la gráfica como el resultado de una función.

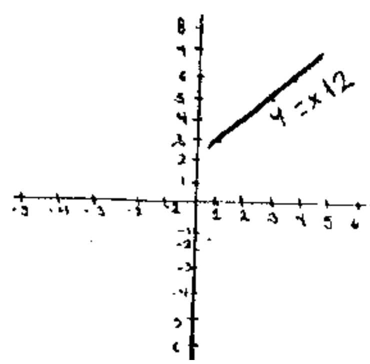
a) En el primer caso el alumno organizó los valores de **x** e *y* como pares de coordenadas. Aunque colocó los valores del eje x por encima de éste.

x	y = x + 2	x, y
1	3	1, 3
2	4	2, 4
3	5	3, 5
4	6	4, 6
5	7	5, 7



b) En el segundo caso ya no escribe cada par de coordenadas, sólo las localiza en el plano cartesiano.

x	y = x + 2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7

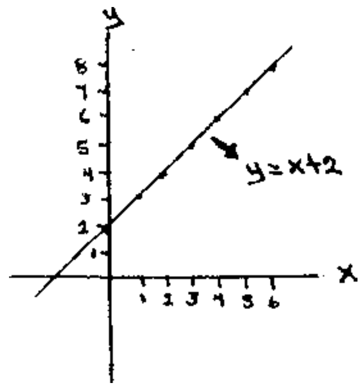


A continuación se dan algunas posibles soluciones y maneras de resolución del ejercicio:

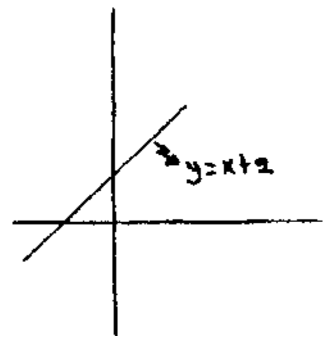
Completando la tabla con dos o más puntos

x	**y = x + 2**	y	(X, y)
1	y = 1+2=3	3	(1.3)
2	y = 2 + 2 = 4	4	(2,4)
3	y = 3 + 2 = 5	5	(3.5)
4	y=4+2=6	6	(4,6)
5	y = 5 + 2 = 7	7	(5,7)

Representándola en el plano cartesiano



Representándola directamente en el plano cartesiano con dos puntos



Los valores para *y* son 3, 4, 5 y 7 respectivamente y para x es 7.

Al hacer el análisis de las respuestas que dieron los alumnos y las alumnas al resolver este ejercicio nos percatamos que:

a) Únicamente las dos terceras partes del grupo entienden ia expresión algebraica *y* = *x* + 2

b) Un poco más de la mitad del grupo logró encontrar los valores tanto de " *y* " como de"x

c) Nueve alumnos contestaron mal el ejercicio, lo que equivale a un 36% de los alumnos en estudio. Ocho adolescentes lo contestaron parcialmente correctamente (un 32%). Y otro tanto de los escolares lo contestaron correctamente. Es decir, entendieron la expresión algebraica *y* = *x* + 2*',* encontraron los valores de y y el valor de x. Además localizan correctamente los ejes x e yen las coordenadas y realizan la gráfica de puntos. Aunque algunos aún realizan el algoritmo de la suma y se apoyan de líneas punteadas para localizar un punto. Esto nos deja al descubierto que los alumnos aún se apoyan de situaciones concretas.

d) Únicamente dos estudiantes representaron el plano cartesiano como el resultado de una función.

e) En los primeros cuatro tipos de respuestas que los estudiantes dieron a este ejercicio, vemos como éstos no están concientes del procedimiento a seguir y lo hacen de manera intuitiva.

f) Algo muy bueno es que la mayoría no lleva a cabo el algoritmo de la suma, lo cual nos indica que gran parte de los estudiantes hace la operación mentalmente. Es decir, maneja datos interiorizados.

g) En lo referente a representar la función en el plano cartesiano vemos, desafortunadamente que la grao mayoría de los educandos no tienen bien fundamentado dicho conocimiento. La mayoría no presenta el plano cartesiano completo, ni correcto. No localizaron correctamente los ejes x e *y* o no los nombraron; invirtieron el orden de los números ó colocaron únicamente números positivos; no localizaron correctamente las parejas de puntos en el plano cartesiano; algunos se apoyaron de líneas punteadas para la localización de los pares de coordenadas; y la gran mayoría no unió los puntos localizados en el plano cartesiano para representar la gráfica, misma que no identificaron como una función.

Ejercicio 1) Completa la siguiente tabla y represéntala en el plano cartesiano...

Nombre del alumno	Eiileiidió la expresión algebraica y = x + 2	Realizó c! algorúnw de la suma	Encontró los valores de y	Encontró el valor de x	Localizó correctamente ios ejes .r e y> en las coordenadas	Se apoyó de lineas punteadas para localizar un punto	Realizó la gráfica de puntos	Observaciones
Liz	sí	SÍ	sí	sí	sí	no	si	
Ala	sí	nu	sí	sí	Sí pero no los escribió	sí	no	Localizó las parejas de puntos en la gráfica, pero no señaló la gráfica.
Cri	no	-	no	no	sí	no	Sí pero con datos erróneos	Colocó números negad vos en los ejes de coordenadas.
Mar	sí	nn	sí	si	Sí pero no los escribió	sí	sí	Colocó números positivos y negativos sobre el eje de x y sobre el eje y del lado izquierdo colocó números positivos y del derecho negativos.
Sam	sí	no	si	sí	No y no los escribió	Sí, pero los borró	nn	Confundió el eje x con el eje y. Además colocó incorrectamente puros números negativos en el ejex y positivos en el e¡ey
Sel	sí	no	sí	sí	no	no	no	Nombró x al eje *y* (este último no lo nombró). Localizó los puntos después de varios intentos, pero colocó números negativos en el ejex y positivos en el eje y.
Rol	sí	no	sí	sí	Sí pero no los escribió	no	sí	Realizó correctamente el ejercicio pero no nombró los ejes porx y *y*
Ber	no	-	no	Sí pero sólo como una sucesión de números, no como una función.	no	-	no	No comprendió la expresión algebraica. Dio e! valor de x pero sólo como continuación de un número y no como una relación. No nombró los ejes e invirtió ios números en el plano cartesiano (después del origen escribió el número mayor, en lugar del 1)
Mni	Sí, aunque hubo confusión con el 6 que se le dio.	Sólo índica la suma pero no lo realiza.	Los representa en ¡a gráfica, pero no ius da en la tabla	no	sí	sí	no	Supo localizar las coordenadas en el plano cartesiano aunque se apoyó de líneas punteadas. En cuanto a la comprensión de la expresión algebraica, lo confundió el valor de y (6) que se ie din; no logró entender que ese 6 era igual a x + 2
Sha	sí	no	sí	sí	no	nn	Sí pero invirtió los ejes x e y	Invirtió los ejesx e y y como consecuencia la localización de coordenadas fue incorrecta.
Jor	no	Sólo lo indica pero no In realiza.	no	sí	sí	Sí, pero los borró	Si pero de | manera	No comprendió la expresión algebraica, no supo dar los valores de *y*, señalo el algoritmo de la suma pero no la realizó,

							incorrecta	dio una unidad de medida al cero en lugar de representarlo como el origen y escribió los números del cuadrante (x, y) por encima del eje x.
Ime	sí	no	Sí, sólo que se equivocó en un dato	sí	No los nombró	no	Sí pero de manera incorrecta	Dio correctamente los valores de y, a excepción de uno, pero localizó otros pares de coordenadas en el plano cartesiano distintos a los de la tabla
Ada	sí	no	SÍ	sí	sí	Sí, pero las borró	Sí, incluso la señaló como y = x + 2	Tiene bien fundamentado el concepto de función, organizó los valores de x c y como pares de coordenadas, señaló la gráfica como el resultado de una función. Realizó todo casi correctamente sólo que colocó los valores del ejex por encima de éste.
Eív	sí	sí	sí	sí	Sí pero no los nombró	no	sí	Tiene bien fundamentado el concepto de función. Organizó los valores de x e y como pares de coordenadas, aunque le faltó nombrar x o *y* a los ejes del plano cartesiano.
Agu	no	Lo indicó con datos erróneos	no	Sí pero como una sucesión de números, no como una función.	no	no	no	Cambió los datos de x, parece que sumó mentalmente 2 a los datos que se le dieron.
Pat	sí	no	sí	sí	No y no los nombró	no	Sólo hizo una linea sin localizar ninguna coordenada	No tiene bien fundamentado el concepto del plano cartesiano. Además invirtió los números en el plano cartesiano (después del origen escribió el número mayor, en lugar del 1)
Rey	no	Lo indicó con datos erróneos	no	Si pero como una sucesión de números, no una función.	-	-	-	Intentó realizar la tabla pero cambió los datos de x. Parece que sumó mentalmente 2 a los datos que se le dieron y posteriormente los presentó como datos de x y efectuó la expresión algebraica y ~ x + *2*
Jav	-	-	-	-	no	no	Realizó 3 gráficas en un sólo plano cartesiano, pero ninguna es correcta	No completó la tabla. Realizó 3 gráficas en un sólo plano cartesiano, pero ninguna corresponde con la función que se le dio.
Vic	sí	no	sí	sí	No y no los nombró	sí	Sí pero con datos erróneos	Cambió los ejes (por lo que la localización de los pares de coordenadas no fueron las correctas) y no los nombró x o y.

Har	no	no	no	Sí pero coino una sucesión de números, no como una función.	No, coloca* ey corno unidades (números) sobre el eje x	sí	no	No entiende la expresión algebraica y = x + 2. No tiene clara la noción de función ni la de plano cartesiano. Colocó los números del eje y a la derecha y los números positivos del eje* por encima de éste.
San	sí	no	sí	sí	Sí pero no los nombra	no	Sí pero no localizó correctamente las coordenadas	Cambió los ejes ,r e *y* lo que le llevó hacer una localización incorrecta de los pares de coordenadas.
Yes	-	-	-	-	no	no	Sí pero con datos erróneos	No completó la tabla. En el plano cartesiano no nomhró _v y/ó *y* a los ejes e hizo la gráfica con otras coordenadas: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) y (6,6), lo que nos indica que no comprendió la función.
Kar	sí	no	sí	sí	Sí pero no los nombra	no	Sí, incluso la señaló como y = x + 2	Señaló la gráfica como el resultado de una función.
Gui	no	no	no	Sí pero como una Sucesión de números, no como una función.	No, colocó* ey al inicio y final de cada uno de los ejes	sí	no	No logró entender la expresión algebraica y = x + 2. En el plano cartesiano colocó x ey al inicio y final de cada uno de los ejes.
Emí	sí	no	Se equivocó en un valor	sí	no	no	no	No tenía bien fundamentado el conocimiento del plano cartesiano. Colocó correctamente los números.

Con respecto a las funciones y sus gráficas, el plan y programa de matemáticas junto con el libro para el maestro de esta misma asignatura, recomienda que las actividades en ciase deben "escogerse de manera que los alumnos puedan darse cuenta del poder y la utilidad de las funciones para describir y modelar fenómenos del mundo real, de la física, de la geometría, la economía y otros contextos; para ello es necesario que en clase se propongan actividades y problemas que conduzcan a los alumnos a elaborar tablas y gráficas a partir de la expresión algebraica de una función y, en casos sencillos, a buscar la expresión algebraica que corresponde a una tabla o una gráfica. De esta manera los educandos se acostumbrarán y comprenderán mejor la utilidad de las diversas formas de presentar una función," (Cfr. SEP, 1995. pp. 179-182)

Con la Reforma de 1993 los planes y programas de estudio señalan que tanto en primer como en segundo grado no es recomendable precisar el significado del término *función,*

> *"es preferible esperar hasta tercer grado o el bachillerato, cuando se hayan visto los suficientes ejemplos que les permitan comprender las funciones como una relación entre dos cantidades, o como la expresión de una cantidad en términos de otra,"* (SEP, 1995. p. 179)

A diferencia de las ecuaciones, donde lo importante es encontrar su solución (o soluciones), en las funciones se trata de estudiar su comportamiento, ya sea a través de una tabla de valores o de su gráfica.

El estudio del comportamiento de una función se enriquece si al tabular se agregan columnas adicionales para registrar cómo se incrementan o disminuyen los valores de las variables. La observación de dicha columna permitirá en muchos casos simplificar la elaboración de la tabla y desarrollar criterios para pasar de una tabla o una gráfica a la expresión algebraica de función. De ahí la importancia de que al estudiar las funciones lineales los alumnos relacionen lo que observan en la columna de incrementos o detrimentos con el aspecto de las gráficas que se obtienen.

Detrás de muchas de las aplicaciones importantes de las funciones subyace la idea de variación, es decir, la idea de una cantidad que varía al cambiar los valores de otra. (Cfr. SEP, 1995. pp, 182-183)

El problema que se pidió a los alumnos resolveres:

Bosqueja en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones: y - -$3x$, y - -**2x,** y - - x_r $y = x_r$ $y = 2x$, y - $3x$

El objetivo era ver si éstos:

a) asignaron valores a la variable independiente,

b) sustituyeron los valores de *x en* la función,

c) obtuvieron los valores de *y* (la variable dependiente),

d) localizaron correctamente cada pareja de valores en el plano cartesiano,

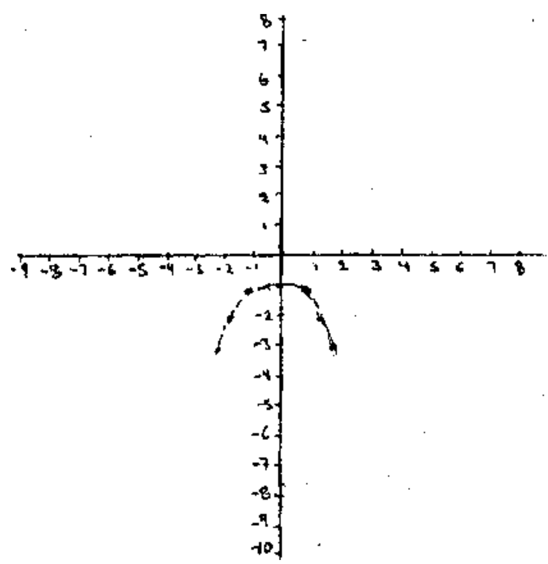
e) bosquejaron la gráfica de la función mediante la unión de los puntos, y por último

f) sí fueron capaces de observar el comportamiento de una gráfica y de familias de gráficas, **g)** bosquejaban correctamente las gráficas,

h) comprendieron que se trata de funciones lineales independientes,

Al resolver este ejercicio, los alumnos cometieron los mismos errores del ejercicio anterior en relación con la tabulación y graficación defunciones, además[4]:

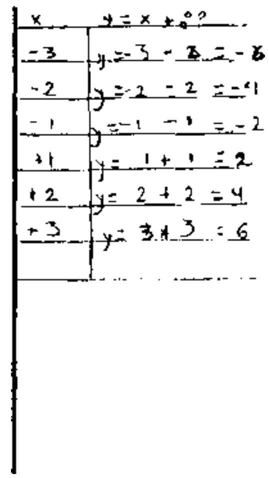
1. Hubo quien únicamente hizo la gráfica de una parábola. No presentó ninguna tabla que le permitiera ver los valores de *x* e *y* como pares de coordenadas. Tampoco nombró meya los ejes. No comprendió que se trataba de ecuaciones lineales independientes. Al parecer desconoce que la gráfica de una ecuación lineal es una recta y que una parábola es la representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

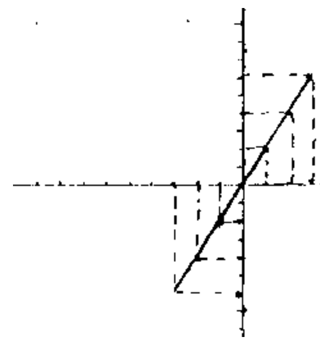


2. Otro alumnos efectuó la función *y - 2x,* pero escribe en su lugar y = x +:? presentándola como suma y resta y no como un producto de 2 por *x* , en dónde el valor de *y* depende del valor que se le de a x. En su lugar sólo escribe: -3-3 = -6, 2 + 2 = *4, etc.* Localizó las parejas de coordenadas que obtuvo, en el plano cartesiano

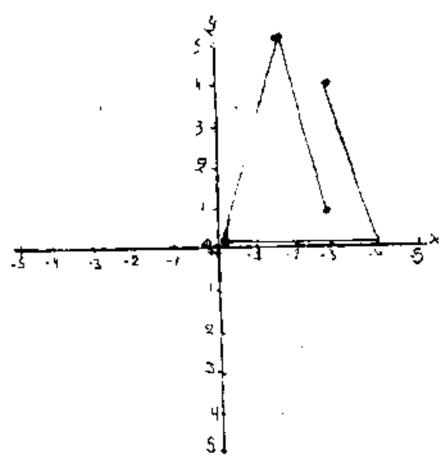
[4] En la parte de anexos de este trabajo de investigación se dan algunas posibles soluciones y maneras de resolver el ejercicio que los alumnos pudieron haber seguido.

apoyándose de líneas punteadas. Sin nombrar x ey a los ejes. Ni escribir números a la gráfica.



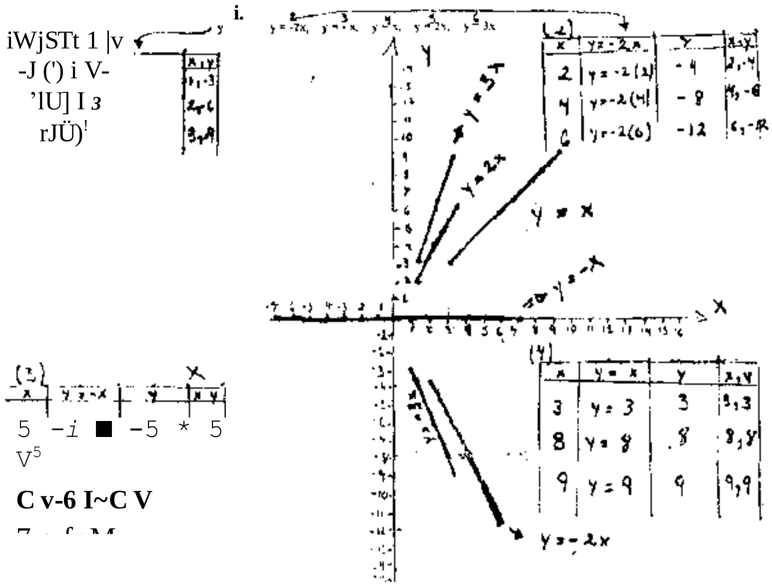


3. .Alguien colocó números antes de la *y* en las funciones que se le dieron y con esto formó, de manera incorrecta, pares de coordenadas y localizó incorrectamente algunas de estas en el plano cartesiano. Nombra correctamente los ejes, pero coloca únicamente números negativos en x y positivos en *y* , partiendo del origen a los extremos. Finalmente une todos los puntos formando una figura no cerrada. No comprendió que se trata!a de ecuaciones lineales independientes. No supo que la gráfica do una ecuación lineal es una recta.

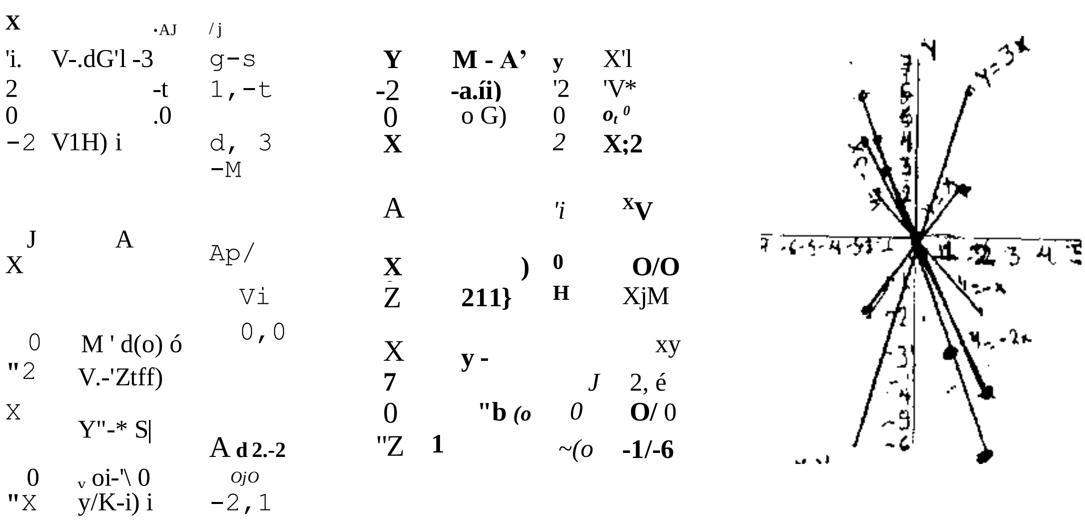


4. Una alumna realizó casi todo correctamente. Sustituyó correctamente los valores de x has¡.r. ■,-btener los valores de *y* , pero en la función y=-x se equivocó al localizar la pareja de puntos en el plano cartesiano presentando una recta sobre el eje **X.**No dio valores negativos a la variable independiente, ni

prolongó las rectas en la gráfica por lo que no sabemos si se dio cuenta o sabia que todas las gráficas pasaban por el origen.



5. Sólo una alumna resolvió el ejercicio correctamente. Da valores a la x, lo sustituye en cada función,, obtiene los pares de coordenadas, los localiza en el plano cartesiano, elabora las gráficas y las representa como una función.



Si bien no esta expresado de manera explícita, en los planes y programas de estudio de Matemáticas de la Reforma de 1993 dan por hecho que el alumno esta en el estadio de las operaciones formales y por lo tanto éste es capaz de moverse en el campo de la formulación y de manejar situaciones abstractas. Esto lo podemos constatar con el siguiente párrafo:

",..en las aplicaciones modernas de las matemáticas se utilizan con frecuencia funciones rectirsivas, es decir, funciones cuyo valor depende de valores anteriores" donde se maestra claramente cómo "es posible pasar con facilidad de una fórmula de recurrencia a una fórmula cerrada, es decir, una fórmula que sirve para calcular el

valor de la función a partir sólo del valor de n, sin necesidad de conocer o calcular previamente los valores anteriores". (Cfr. **SEP, 1995,** pp. 152-153 y 186-187)

El análisis de los ejercicios anteriores revela que además de que los alumnos no se encuentran aún dentro de las operaciones formales, también carecen de conocimientos fundamentales para poder operar con funciones y su aplicación en problemas como lo son la comprensión de expresiones algebraicas y la localización de una pareja de puntos en el plano cartesiano.

Tampoco se observa el desarrollo de un pensamiento flexible que sea aplicable a todas las situaciones problemáticas que se les presenten.

Los errores revelan las dificultades que tienen los escolares para visualizar e! comportamiento de la gráfica de una función y relacionarlo con su fórmula. Cuando esto ocurre, las gráficas pierden su valor intuitivo. Para ello es recomendable diseñar ejercicios y problemas que rompan con los automatismos que acompañan el bosquejo de la gráfica de una función y conduzcan a los estudiantes a interrogarse sobre sus rasgos principales y aspecto global, y sobre la forma como esto depende de la expresión algebraica de la función. Así, poco a poco los alumnos estarán acostumbrados a las funciones y sus gráficas de funciones matemáticas abstractas como son, las funciones lineales y cuadráticas $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$ y algunos casos sencillos de funciones racionales de la forma[5]:

$$\frac{a}{bx\text{-}c}$$

sin intentar avanzar mucho más allá de observar el comportamiento de la gráfica de:

y = ™ alrededor de x = 0
x

[5] (Cfr. SEP, 1995; pp. 176-188)

Ejercicio II) Bosqueja en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones: y = -3 x, $y = -2x$, $y = -x$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$

Nombre del alumno	Bosquejó correctamente las gráficas	Comprendió qué se trata de funciones lineales inde-pendientes	Qué valores asignó a la variable independiente	Sustituyó los valores dex en la función	Obtuvo los valores de y fia variable dependiente)	Localizó cada pareja de valores en el plano cartesiano	Bosquejó la gráfica de la función mediante la unión de los puntos localizados	Relacionó la gráfica con la expresión algebraica de la función	Observaciones
Liz	no	no	-		-	-	-	-	Sólo colocó debajo de cada función igualaciones (algunas no conectas: ~3=-3, -2=2, -l=-l, 0=0, 1=2 y 2=3 y las localizó en el plano cartesiano como canrdenadas.
Ala	-	-		-	-	no	-	-	Únicamente dibujo un plano cartesiano sin nombrar x ey a kis ejes.
Cri	no	no	-	-	-	-	-	-	Sólo presenta una gráfica en el plano cartesiano con las coordenadas: (-3,-3), (-2.- 2), (-1,-1). (0,0), (1.1), (2,2) y (3,3) y no indica de que función se trata. Quizá únicamente baya hecho igualaciones.
Mar	-	-	-	-	-	-	-	-	Sólo dibujo un piano cartesiano sin nombrar x e *y* a los ejes y colocó los números del cuadrante (xy) pnr encima del eje x y a la derecha del eje *y*
Sam	no	no	-	-	-	-	-	-	Presentó una parábola, no presentó tabla ni nombra x ey a los ejes. No comprendió que se trataba de ecuaciones lineales independientes y que la gráfica de una ecuación lineal es una recta.
Sel	no	no	-	-	-	-	-	-	Colocó números antes de la y en las funciones que se le diemn luego creyó localizar algunos de ellos en el plano cartesiano. Nombró correctamente los ejes, pero cnlocó únicamente números negativos en x y positivos en y, partiendo del origen a los extremos, finalmente unió los puntos. No comprendió que se trataba de ecuaciones lineales independientes y que laográfica de una ecuación lineal es una recta.
Rol	-	-	-	-	-	no	-	-	Sólo presentó un plano cartesiano en el que nombra x e y a los ejes y colocó los números del cuadrante (x,y) a la derecha del eje y.
Ber	-	—	-	-	—	-	-	-	
Moi	no	no	1 Positivos y	-	-	-	-	-	Efectuó sin darse cuenta la función y=2x, y creyó haber efectuado y = x+:? Presentándola como suma y resta y no como un producto de 2 por x, ejemplo: -3-3 = -6, 2-1-2 = 4. Además

			negativos						localizó las parejas de coordenadas en el plano cartesiano sin escribir ,v e y a los ejes sin colocarle númerns, apoyándose de lincas punteadas.
Sha	-	-	-	-	-	no	-	-	Dejó indicada la tabla. Dio a x los valores de 9, 6,7 y l en la función y = 2x, además dejó indicada la operación 9-2- Esto nos indica que no entendió la función, pues de ser asi, fácilmente se hubiese dado cuenta que la operación correcta era -2 x 9.
Jor	no	no	-	-	-	-	-	-	Presentó un plano cartesiano incorrecto, en donde los ejes x e *y* están cambiados. Además sus cuatro cuadrantes presentan númerns positivos a excepción de un sólo valor.
hne	-	-	-	-	-	-	-	-	Sólo presentó un plano cartesiano incompleto e incorrecto. No nombró .rey a los ejes y dio únicamente valores positivos a Ins dos ejes.
Ada	Sí a excepción de una	sí	Positivos	sí	sí	sí	sí	sí	Realizó casi todo correctamente, pero no dio valores negativos a la variable independiente ni prolongó las rectas en la gráfica. No sabemos si sabía o se dio cuenta que todas las gráficas pasaban por el origen. Con la función y=-x, supo sustituir tos valores en la función hasta obtener los valores de y, pero se equivocó al localizar la pareja de puntos en el plano cartesiano presentando una recta sobre el eje x.
Eiv	sí	sí	Po ñivos y negativos	sí	sí	sí	sí	sí	Todo lo realizó comee lamente.
Agu	no	no	-		-	-	-	-	Recscribió de manera vertical las funciones qoe se le dieron; presentó un plann cartesiano incompleto e incorrecto; no nombró x e *y* a los ejes y dio una unidad de medida al cero en el cuadrante (-x,-y). Presentó una gráfica que no corresponde a ninguna de las funciones dadas.
Pat		-	-	-	-	no	-	-	Sólo presentó un plano cartesiano incompleto e incorrecto: no nombró i ey a los ejes. Dió únicamente valores positivos e invirtió los que corresponden al cuadrante (-x,y). Es decir, los colocó de menor-a mayor del extremo al origen. Colocó además dos líneas perpendiculares.
Rey	-	-	-	-	-	-		-	Sólo situó el número uno encima de las x de las funciones y =-x y v - *x*.
Jav	-	-		-	-	no	-	-	Presentó un plano cartesiano incompleto e incorrecto: no nombró .rey a los ejes. Dibujó 2 gráficas que no correspondían a ninguna de las funciones dadas.

Vic	no	no	Positivos en una y negativos en otra	no	no	Sí, pero no todas y de forma incorrecta	no	-	Realizó des labias incorrectas representando !as funciones *y* = -Jx y *y = 2x.* No sustituyó los valores que dio a x en dichas funciones, sino que sumó una unidad. También cambió los ejes x e y del piano cartesiana. Localizó incorrectamente las parejas de puntos que obtuvo pero no los unió por medio de una recta. Además presentó un valor de y coma -0
Har	no	no	-	-	-	no	-	-	Presentó un plana cartesiana incompleto e incorrecto: cambió las ejes x e *y,* colocó los números por encima del eje x y a la derecha del eje *y.* Unió con lineas punteadas y perpendiculares los números 2 y 3 y 3 y -2
San	no	sí	positivos	no	no	Sí, pero incorrecta	Sí, incorrecta	Sí, pero las gráficas son incorrectas	Presentó como coordenadas (4, -64), (4, 64) y (6, -36) en un plano cartesiano en el que cada espacio representa 5 unidades hasta llegar al 70, sin nombrar x o y a los ejes.
Yes	-	-	-	-	-	no	-	-	Presentó únicamente un piano cartesiano en el que nombró incorrectamente las ejes. Además colocó los números negativos del eje x por encima de éste.
Kar	no	sí	En algunos positivos y en otros negativos	no	No correcta-mente	Sí, pero no corresponde a los de las funciones dadas	Sí, pero no corresponde a los de las funciones dadas	Sí, pero no corresponde a los de las funciones dadas	A todas las funciones que se le dieran le sumó 1, cambiándolas totalmente. No tiene aún la noción de función. Dio valores ax pero no los sustituyó en la función, ni tampoco desarrolló correctamente cada una de las expresiones algebraicas.
Guí	no	no	Negativos, ñero coloca el signo menos de! ' ido derecho del número	no	no	No correctamente	-	-	i Dio valores a x e y, pero sin tener ninguna | relación entre si, ni con las funciones que se le i dieran; los Incali/.ó incorrectamente en el plano cartesiano en él que a cada eje le asignó los dos nombres: tanto x como y.
Emi	no	-	-	-	-	no	-	-	Presentó un plana cartesiano incompleto e incorrecto. Nombró x e y a ios ejes, pero invirtió la posición de ios números (del extremo al origen (cuadrante -x, y) e imció de! i -6 progresivamente del origen a los extremos | (cuadrante x, -y).

Operaciones con expresiones algebraicas

Si se quiere lograr un aprendizaje significativo del álgebra es necesario que los símbolos y operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares para adquirir poco a poco seguridad y destreza en el manejo de los procedimientos algebraicos y utilizarlos para resolver problemas cada vez más complejos?

Para ello el Plan y Programa de Estudios de Matemáticas de la Reforma de 1993 señala que en el primer grado de educación secundaria los alumnos comiencen a operar con monomios y polinomios a partir del uso de literales y las reglas de escritura algebraica, como son la expresión simbólica de los procedimientos para calcular perímetros y áreas. Para que en segundo y tercer grado se consolidan estos conocimientos.

Un concepto que los estudiantes deben de formarse poco a poco, justo al término de la secundaria, es el de las nociones algebraicas. Esto les ayudará a irse acostumbrando al uso de expresiones con literales: en una primera instancia vistas como abreviaturas de los procedimientos y después como una relación aritmética o geométrica entre cantidades.

Normalmente los alumnos tienen dificultades para dominar este lenguaje simbólico. Al principio se desconciertan por el uso de literales, pero después desarrollan formas de expresión y solución de problemas donde se mezclan el lenguaje natural con el uso —no siempre correcto— de expresiones simbólicas. Para ello es importante que el docente este conciente de la importancia que tiene el pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y operar con ella, ya que los programas contemplan que se aprenda a operar con monomios, polinomios y expresiones racionales sencillas.

En el segundo grado además de expresiones lineales y cuadráticas, se ve ¡a reducción de factores con base común en un monomio como lo son la simplificación de términos semejantes en un polinomio y las operaciones de suma y resta y multiplicación de polinomios. Para ello es importante que las operaciones y ejercicios con polinomios no se presenten siempre en forma vertical sino también en forma horizontal para que los alumnos practiquen las reglas de eliminación de paréntesis en la suma y la resta y utilicen la propiedad distributiva al multiplicar polinomios.

Así pues para enriquecer el significado de las expresiones con literales es importante acompañarlas —desde el principio— con actividades que propicien la construcción de tablas de valores y su presentación en forma gráfica.

Por otro lado, a manera de confrontación de la teoría con la práctica, y relacionándolo con lo postulado por Jean Piaget, se les solicitó a los alumnos que obtuvieran el perímetro de un trapecio y el área de un triángulo, en los que las medidas de sus lados están dadas por expresiones algebraicas (monomios y polinomios). Además se les pidió encontrar los términos faltantes en una igualdad de expresiones algebrabas.

El objetivo es identificar sí los alumnos:

a) Saben operar con expresiones algebraicas.

b) Hacen e! uso correcto de literales y las reglas de escritura algebraica, sobre todo, ver si practican las reglas de eliminación de paréntesis en la suma y la resta de expresiones algebraicas.

c) Sí llevan a cabo ¡a simplificación correcta de los términos.

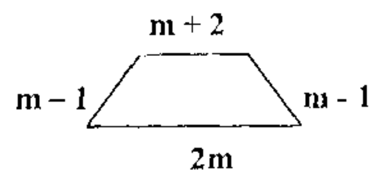
d) Si efectúan correctamente la suma, multiplicación y división de polinomios

e) Si utilizan la propiedad distributiva al multiplicar poi'nomios.

También los dos primeros problemas, nos van a permitir darnos cuenta si el estudiante cuenta con el concepto de perímetro y área y sí es capaz de obtenerlo cuando se le dan como medidas monomios y binomios en lugar de números naturales, enteros o racionales.

El primer ejercicio que se les presentó fue:

Indica el perímetro de la siguiente figura



Perímetro =

El perímetro del trapecio es igual a 5m

En dicho ejercicio el objetivo principa! es identificar si el estudiante es capaz de obtener el perímetro del trapecio cuando se le dan expresiones algebraicas como medidas de sus lados. También queremos identificar sí tiene el concepto de perímetro y de términos semejantes; si conoce la fórmula para obtener el perímetro de cualquier figura; sí hace correctamente la suma de monomios y polinomios; y si simplifica correctamente los términos semejantes.

Algunas posibles soluciones presentadas de manera horizontal son:

1) (m -1) + (m - 1) + (m + 2) + 2m = 5m

2) (m -1) + (m -1) + (m + 2) + 2m = 5m 5m

3) (m-1) + (m -1) + (m + 2) + 2m = 2m m >2^ 2m = 3m + 2m = 5m 4)m“1) + (m-1) + (m + 2) + 2m = m-1+m~1+m + 2 + 2m = 5m

5) (m - 1) + (m ~ 1) + (m + 2) + 2m = m -1 + m -1 + m + 2 + 2m " 5m ->2^2^ 5m

6) 5m - 2 + 2 = 5m

7) 5m, etc.

Algunas posibles soluciones presentadas de manera vertical son:

$m - 1$

$4\text{-}\ m - 1$

$m + 2$

$2m$

$\underline{2m + 3m + O}$

$2m$

$+\ 3m$

$5m$

$m + \cancel{2}$

$\underline{2m}$

$5m$

$m - \cancel{1}$

$+\ m \cancel{+} 1$

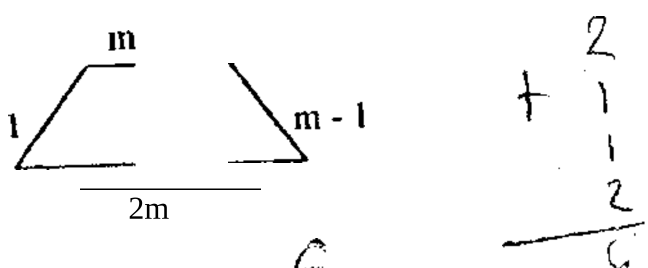
$m + \cancel{2}$

$2m$

$5m$

A continuación se muestran los procedimientos que siguieron los adolescentes y las respuestas que dieron éstos:

1. Alguien escribió perímetro = L x L x L, lo cuál es incorrecto.
2. Ocho alumnos se olvidaron completamente de las literales que se les presentaron como la medida de los lados del trapecio y únicamente dieron como resultado un número entero, ya sea 4, 6, ~6, ~2, o 10, sin presentar operaciones.
3. Un alumno sumó los números que se le dieron sin considerar su signo y mucho menos que se trataba de expresiones algebraicas. Posiblemente lo mismo hicieron los ocho alumnos de los que hablamos anteriormente.

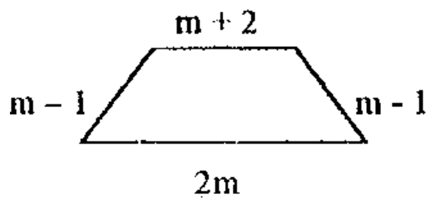


Perímetro ■= 6

Al parecer el alumno sabe que el perímetro de un trapecio se obtiene sumando sus lados. Desafortunadamente el escolar no es capaz de hacer la suma de las expresiones algebraicas que se le presentan y sólo suma los números que se le dan, sin considerar tampoco su signo. Esto nos muestra que el individuo no es capaz de comprender términos abstractos. A pesar de que ya le mostraron dentro del salón de clases como operar con monomios y polinomios e inclusive opero con ellos, no supo aplicar dicho conocimiento en este ejercicio, es decir, no fue capaz de aplicar el conocimiento en contextos diferentes a los que los adquirido.

4. Alguien presenta incorrectamente la .fórmula $v = L + L + L + L = L^3$. Además al realizar la suma sólo toma en cuenta los números sin considerar las literales ($v=2+2-1-1=2cm^3$) y al .final escribe como resultado $2m^3$. Esto nos permite percatamos que el alumno no tiene bien fundamentadas las nociones de perímetro y volumen; no conoce la fórmula para obtener el perímetro de una figura; tampoco sabe (o al menos asi parece) que el trapecio es un figura plana que no tiene volumen y que el perímetro hace referencia a medidas lineales y no cúbicas o cuadradas. Por otro lado, aunque este resultado es incorrecto, se trata de una expresión algebraica. Las respuestas que se presentan a continuación son expresiones alumnos de los que se habí resultado un número entero."

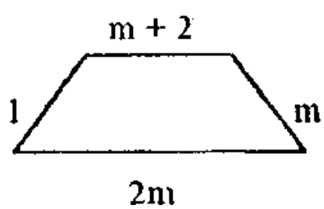
algebraicas. Recordemos que los con anterioridad presentan como



$v = 2+2 -- 1 - 1 = 2cm^3$

5. Un alumno escribe perímetro = 6m

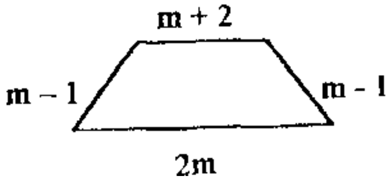
6. Una alumna dio como resultado: $m^4 + 4$



Perímetro =

Muy probablemente la estudiante multiplicó los números y las literales por separado.

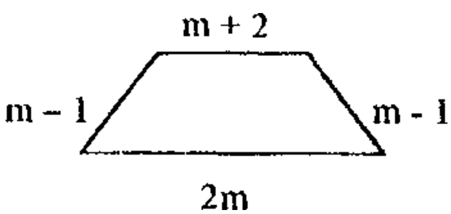
7. Una alumna dio como resultado: $2m^2 + 2_e$ además presenta una igualación incorrecta $2m+m = 2m^2f2$, y escribe por otro lado 2m y arriba de éste escribe NO



Perímetro =

2. m 4 m 2 m -V *Q*—

8. Un alumno presentó como perímetro (m~2) (m+2) + 2m = -2m + 2m + 2m = 2m en donde tanto la expresión como el desarrollo de la misma es incorrecta.



Perímetro =

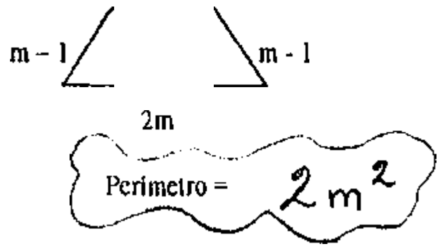
¿n-1) (m*^{1}) 4-

Al parecer el estudiante sumó incorrectamente *(m*–1) + (m-1) dando como resultado m-2. Y posteriormente lo sumó a *m + 2* y a *2m,* aunque los paréntesis indican una multiplicación, en realidad se trataba de una suma, esto lo podemos constatar con el signo más que no colocó arriba, pero que sí colocó abajo. Desafortunadamente la suma estuvo mal.

Lo que es importante resaltar en este proceso de resolución del ejercicio es que el escolar considera cada una de las expresiones algebraicas como medidas de los lados del trapecio. Y no separa dichas expresiones como lo hicieron los estudiantes que dieron las anteriores respuestas.

9. Una alumna sí sumó las expresiones algebraicas que se presentan como la medida de los lados del trapecio, pero se equivocó al final al simplificar los términos: por un lado (m---1) + (m — 1) es igual a *2m — 2* y no a *m — 2* y por el otro *m + 2m~3m* y no a $2m^2$. No comprendió que el perímetro es una cantidad lineal. Además la igualdad que presenta es incorrecta.

4- yvi-1 I''



/Y1 t Zm : ^- •**

Ninguno de los evaluados contestó satisfactoriamente el ejercicio. Además nos percatamos que la mayoría de los alumnos: 1) No tienen bien fundamentado el conocimiento de la obtención de perímetro de una figura, ya que no fueron capaces de obtenerlo porque se les dieron como medidas monomios y binomios en lugar de números naturales. La mayoría no sumó los lados deí trapecio para encontrar su perímetro; sólo una alumna intentó sumar los lados, pero se equivocó al simplificar el resultado y da como resultado un monomio a! cuadrado; otros dan como resultado un número entero, expresiones algebraicas cuadráticas o cúbicas; diez alumnos —40 % del total— no contestaron el ejercicio.

La gran mayoría de los estudiantes, como es el caso de los alumnos que dieron las primeras respuestas a excepción de las dos últimas, sólo ven en las expresiones algebraicas relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interpelaciones. Todo esto nos muestra que los estudiantes no manejan eficazmente conceptos abstractos ni la aplicación de habilidades de razonamiento y que aún se encuentran en la etapa de las operaciones concretas. Aunque claro está, cada uno en diferentes niveles de esta etapa.

1 

Ejercicio III) Indica el perímetro de la siguiente figura:

Nombre del alumno	Dio el perímetro del trapecio	Cuenta con la noción de perímetro	Realizó la suma de polinomios	Simplificó correctamente los términos	Observaciones
Liz	no	-	-	-	Unicamente dio como resultado $m^J + 4$
Ala	-	-	-	-	-
Cri	no	no	-	-	Unicamente dio como resultado LxLxL
Mar	-	-	-	-	-
Sam	no				Unicamente dio como resultado 4
Sel			-	-	Unicamente dio como resultado 6
Rol		-	-	-	-
Bcr	-	-	-	-	-
Moi	no	no	-	-	Presentó como perímetro (m-2) (na~2) + 2m = -2m - 2m - 2m = 2m en donde tanto a expresión como el desarrollo de la misma es incorrecta
Sha	-	-	-	-	-
Jor	no	no	no		Presenta incorrectamente la fórmula v = L ~ L + L - L = L^3, además al realizar la suma sólo toma en cuenta los números sin tomar en cuenta las literales (v=2+2-l- l=$2cm^3$) y al final escribe como resultado $2m^3$, no cuenta claramente con las nociones de perímetro y volumen
¡me		-		-	-
Ada	pe	No del todo	Sí, pero se equivocó al simplificar los términos	no	Se equivocó al final al simplificar los últimos términos: nr-2m = 2irr, lo que es incorrecto, no comprendió que el perímetro es una cantidad lineal
Elv	no	no	No correctamente	no	Realizó la igualación incorrecta 2m-m = $2m^í$+2 y dio como perímetro de la figura la expresión $2m^2$-i-2
Aau	no	-	-	-	Unicamente dio como resultado -6m
Pat	-		-	-	-
Rev	no	-	*	-	Únicamente dio como resultado -6
Jav	no		-	-	Unicamente dio como resultado 6
Vic	-	-	-	-	Al parecer escribió -2 como resultado pero lo borró
Mar	no		-	-	Escribió -2 como resultado
San	-	-	-	-	-
Yes	-	-	-	•	-
Kar	no		-	-	Escribió 4 como resultado
Gui	-	-	-	-	-
Emi	no	-	-	-	Escribió 1 0 como resultado

Por otro lado se pidió a los alumnos y a las alumnas que obtuvieran el área de! siguiente triángulo. En este ejercicio el objetivo es identificar si el estudiante:

a) tiene el concepto de área,

b) conoce la fórmula para obtener el área de un triángulo,

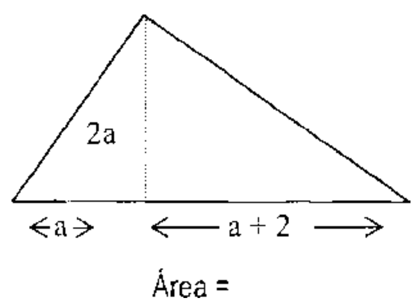
c) sabe lo que son los términos semejantes,

d) hace correctamente la multiplicación y división de monomios y polinomios; y

e) simplifica correctamente los términos semejantes.

El segundo ejercicio que se les presentó fue:

Indica el área de la siguiente figura



Posible procedimiento de solución:

$$A = \frac{bxh}{2}$$

$$= \frac{(a+a+2)(2a)}{2}$$

$$= \frac{(2a+2)(2a)}{2}$$

$$A = \frac{4a^2 + 4a}{2}$$

$$\boxed{A = 2a^2 + 2a}$$

El área del triángulo es $1a$ + 2a

A continuación se muestran los procedimientos que siguieron los estudiantes y las respuestas que dieron:

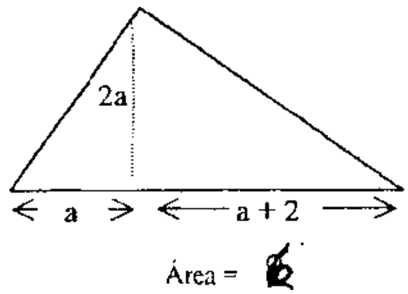
1. Una adolescente escribió únicamente $A = \frac{ABxh}{2}$, pero dicha fórmula no es la correcta para obtener el área de un triángulo.

2. Cuatro alumnos no hacen ningún procedimiento y solamente escriben como resultado un número natural; 96, 3, 8 o 4.

3. Dos alumnos sólo realizaron operaciones con números naturales sin considerar la literal a, por ejemplo: 2 x 2 - 2 = 2 y da

como resultado 2; o bien 6x2 resultado 12 y 12 e 2 6 y da como 6

g

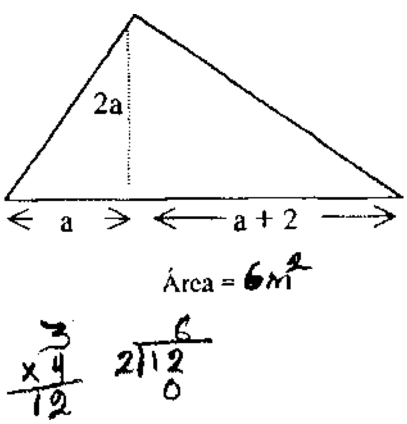


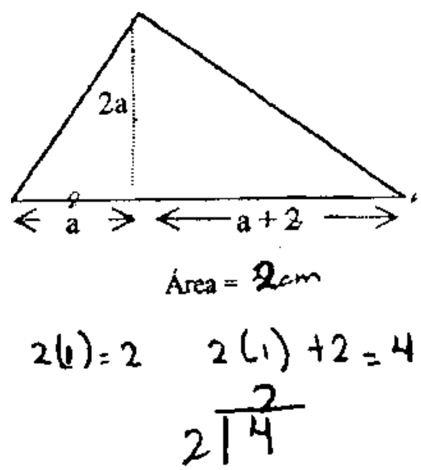
Y ©
7T~

4. Otros dos alumnos hacen algunas operaciones y dan como ,4 resultado 2cm o 6m 2(1) + 2 = 4 y — , igual a 2 cm; o bien, 3

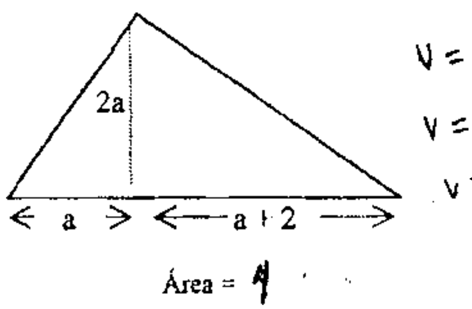
x 4 =12 y 12 e 2 = 6 y da como resultado $6m^2$

5. Un alumno colocó *v - b* . b como la fórmula para obtener el área del





triángulo, lo cuál es incorrecto. Además da el valor de dos tanto a la b y como a la *h y* escribe como resultado v=4cm



V < M í

6. Un alumno da como resultado 8 y presenta las siguientes operaciones que a nuestro criterio no tiene relación con el 6ejercicio .

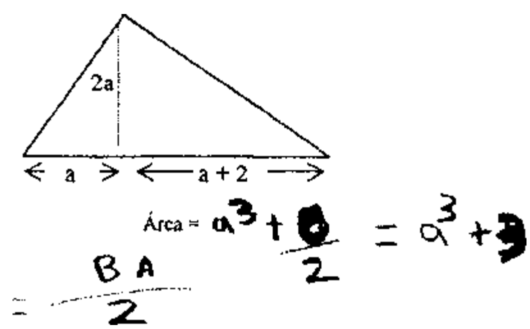
c' a^2 +
$c^2 = 2^2 + 2^4$
c = 4 + 4
c — 8 + 8
c - 16
c = VFó
c = 8

Hasta aquí, en estos diferentes tipos de respuestas vemos que los estudiantes se olvidaron de las expresiones algebraicas contenidas en el ejercicio y no incluyen la literal *a* en su respuesta.

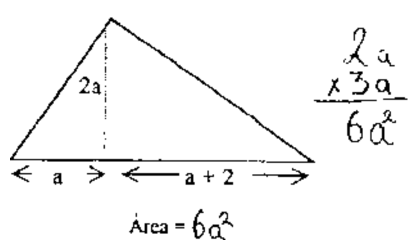
7. Dos alumnos dan como resultado un término lineal incorrecto: uno y *6ci* el otro.

Aunque la respuesta que dan estos dos estudiantes sigue siendo incorrecta, vemos que éstos tienen presente la literal *a* , lo mismo sucede con las siguientes respuestas.

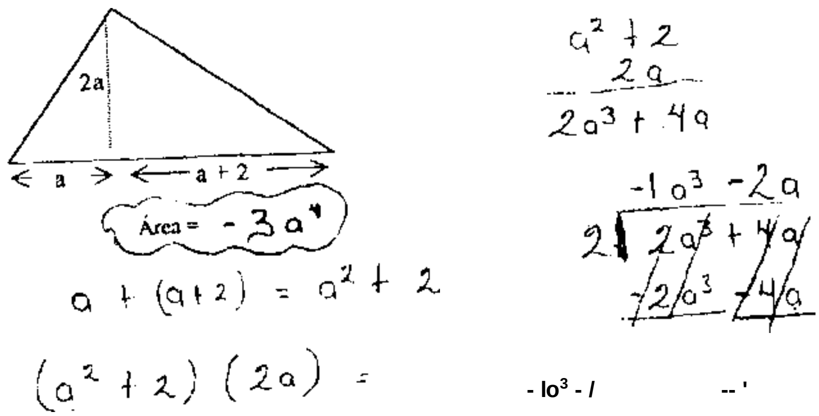
8. Una alumna da como resultado $a^3 + 3$ y efectúa las siguientes operaciones:



9. Un alumno da como resultado $6a^2$ y efectúa una multiplicación de los monomios 2a y 3a, pero no resuelve satisfactoriamente ejercicio.



10. Una alumna supo la fórmula para obtener el área de un triángulo, aunque no la escribió, pero si la desarrolló. Desafortunadamente se equivocó al hacer la suma de polinomios, lo que le hizo dar una respuesta incorrecta. Lo que podemos destacar es que hizo bien la multiplicación de polinomios y la división de polinomios la hizo casi correctamente.



Al hacer el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes nos percatamos que:

Sólo dos alumnos demostraron saber ¡a fórmula para obtener el área de un triángulo, pero no supieron cómo sustituir los datos (expresiones algebraicas) que se les dieron en dicha fórmula, lo que les llevó a dar un resultado erróneo. Esto nos muestra que los estudiantes no son capaces de aplicar con éxito los conocimientos adquiridos en diferentes contextos de aquéllos de los que son adquiridos.

Únicamente dos estudiantes supieron multiplicar polinomios correctamente, aunque no hicieron la multiplicación correspondiente, pero nadie hizo una división de polinomios.

Solamente una alumna comprendió que la base del triángulo era la suma de *a* más ¿z + 2, pero da mal el resultado. Esto nos demuestra que el adolescente no sabe sumar expresiones algebraicas con un término semejante o al menos nadie lo hizo correctamente en este ejercicio.

La resolución de este ejercicio por parte de los estudiantes nos permitió ver que nadie obtuvo el área del triángulo. Talvez lo desconcertaron las expresiones algebraicas *a, a +2* y *2a*. Situación que deja al descubierto que los alumnos no comprenden aún las expresiones algebraicas, no manejan eficazmente conceptos abstractos ni la aplicación de habilidades de razonamiento. Es decir, no presentan estas características de un pensador formal.

Ejercicio IV) Indica el área de la siguiente figura...

Nombre del alumno	Dio el área del triángulo	Maneja eficazmente la fórmula del área del triángulo	Comprendió que la base del triángulo era (a) + (a + 2)	Sustituyó correctamente los valores en la fórmula	Realizó correctamente la suma de polinomios	Realizó correctamente la multiplicación de polinomios	Realizó correctamente la división de polinomios	Observaciones
Liz	no	sí	no	no	-		-	Escribió correctamente la fórmula, pero presenta como únicas operaciones: $a^3 + 6 = 2 = a^3 + 3$
Ala	-	-	-	-	-	-	-	-
Cri	no	Si, aunque escribe mayúscula a *b*	-	-		-	-	Únicamente escribió: A = $\frac{ABxh}{2}$
Mar	-	-	-	-	-	-	-	-
Sam	no	-	**	-	-	-	-	Únicamente escribió como resultada 96
Selenne	no	no	-	-	-	-	-	Escribió las operaciones: 6x2=12 y 12 = 2 = 6 y dio como resultado 6
Rol	-	-	-	-	-	-		-
Ber		-	-	-		-	-	-
Moi	no	nn	Sí, pero realizo mal la suma y dio como resultado 3a		no	Sí pero no es la correspondiente		Comprendió que la base del triángulo era (a) + (a + 2) pero hizo mal la suma y dio como resultado 3^a, después multiplico (2a) (3 a) = $6a^2$ donde el resultado de la multiplicación es correcto pero no es la operación que debió hacer.
Sha		-	-	-	-	-	-	-
Jor	no	no	no	-	-	-	-	Colocó v = b . h, como la fórmula para obtener el área del triángulo
Ime	-		-		-	-	-	-
Ada	pe	sí, aunque no ía escribe	si, pero no elaboró bien la suma	no escribió la fónnula pero si la llevo a cabo	no	Sí, pero no es la correspondiente	Parcialmente y no con los datos correctos	Sabe cual es la fórmula para obtener el área de un triángulo, también hace bien la multiplicación y división de polinomios, pero se equivocó al hacer la suma de polinomios lo que le hizo dar una respuesta incorrecta.
Elv	no	no						No consideró la literal *a*, sólo realizó las operaciones aritméticas 2(1) + 2 = 4 y 4/2, y dio corno resultado 2 cni, aunque en el triangulo las medidas no están dadas en centímetros

Agu	˚»	-	-	-		-	-	Únicamente da como resultado 6a
Pat		-		-	-	-	-	-
Rev	no	-	-	-	-	-	-	Únicamente da como resultado 4
Jav	no	no	-	-	-	-	-	Realiza las operaciones 2x2 = 2 = *2* y da como resultado 2
Vic	no	-	-		-			Escribe $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 2^2 + 2^2$, c = 4 + 4, c = 8 + 8, c = 16, c-= 716 , *c* = 8
Har	no	-	-	-	-	-	-	Inicia desarrollando el teorema de Pitágoras y al final da como resultado 8
San	no	-	-	-	-	-	-	Realiza las operaciones 3x4=12 y 12=2=6 y da como resultado $6m^2$
Yes		-	-	-	-	-	-	-
Kar	no	-	-	-	-	-	-	Únicamente da como resultado 4a
Gui	-	-	-	-	-	-	-	-
Emi	no	-	-	-	-	-	-	Únicamente da como resultado 3

Por otro lado, en ¡as respuestas del tipo *2,* 3 y 4, vemos que los estudiantes que dieron este tipo de respuestas no consideran las expresiones algebraicas y las ven, en los dos primeros casos, sólo como números naturales, y en el último como números enteros.

En la respuesta cinco el alumno da un número a! cuadrado como uno de los resultados.

Vemos que en las respuestas del seis en adelante, los alumnos y las alumnas ya dan como respuesta algunas expresiones algebraicas. Aunque podemos notar que los estudiantes que dieron estas respuestas no estaban seguros de los resultados que estaban dando y talvez por eso decidieron borrarlos.

En la respuesta ocho, vemos que esta alumna primero coloca unos términos perdidos que no satisfacen la igualdad y ya después hace una serie de operaciones de manera incorrecta. Aunque, cabe mencionar que es la única que presenta operaciones.

En las respuestas del tipo nueve, podríamos decir que los estudiantes se acercaron un poco al resultado, por ejemplo en el primer caso presenta el 7x y el $2x^2$; en el segundo 7x y -2 y en el tercer caso 7x y 10, donde el 10 es correcto.

En la respuesta diez el alumno logra dar dos términos correctos, talvez presente el —13x pensando que al restarle el 3x le daría como resultado 10x, pero no consideró que el 3x se convertía en -3x por el signo de la resta.

La resolución de este ejercicio por parte de los estudiantes nos permitió ver que nadie hace el uso correcto de literales y las reglas de escritura algebraica, no practican las reglas de eliminación de paréntesis, porque nadie comprendió que el signo menos de la resta cambio —afecto— los signos del polinomio que se resto; solamente un alumno escribió dos de los términos que hacían verdadera la igualdad, siete estudiantes no contestaron el ejercicio (el 28 por ciento del total) y el resto lo contesto incorrectamente. A continuación se muestran algunas de las respuestas que dieron los estudiantes, cabe mencionar que sólo una alumna presenta operaciones, los demás sólo presentan el resultado, lo que dificulta ver cuales fueron los procedimientos que siguieron para llegar a ellos.

Ejercicio V) Encuentra ios términos perdidos: $(x^2 + \quad + 8) - (\quad + 3x - 2) = 3x^2 - 10x +$

Nombre del alumno	Encontró los términos perdidos	Realizó la resta horizontal mente o la reordeno en forma vertical	Comprendió que el signo - de la resta cambín (afecto) los signos del polinomio que resto	Observaciones
Liz	no	horizontal mente	-	Da como términos perdidos al -I l, 7 y 5 respectivamente
Ala	-	-	-	-
Crí	no	h oriza nt alíñente	no	Da como términos perdidos al $3x^2$, lOx y 3. Efectuó algunas operaciones incorrectas y no comprendió que el signo - de la resta afectó los signos del polinomio que se resto
Mar		-	-	-
Sam	no	horizon taimen te	no	Únicamente da como términos perdidos al 6, 5 y X respectivamente
Selenne	no	horizontalmente	no	Únicamente da como términos perdidos ai 7x, $2x^2$ y 2 respectivamente
Rol		-	-	-
Ber	no	horizon taimen te	no	Unicamente da como términos perdidos al 2, 10 y 12 respectivamente
Moi	no	horizon tal mente	sí	No realizó operaciones, únicamente presentó como resultado al -13x, $-2x^2$ y LO, de los cuales los dos últimos son correctos
Sha	-	-	-	-
Jor	no	-	-	Presentó como témiinns perdidos al 7x, -2 y 6 respectivamente y no realizó ninguna operación
Ime	-	*	-	-
Ada	-	-	-	Al parecer colocó los terminas -13x, 3 y 6 e hizo operaciones pero finalmente borró todo
Elv	-	-	*	Da como términos perdidos al 5x, 3 y ó
Agu	no	-	-	Da como términos perdidos al 4, 5 y 5 aunque a este último le escribe no y escribe el 6 abajo
Pat	no	-	-	Únicamente da como términos perdidos al 2, 1 y 7 respectivamente
Rey	no	-	-	Únicamente da como términos perdidos al 7x, 3 y 10 respectivamente (este último es correcto)
Jav	no	-	-	Unicamente da como términos perdidos al 5 en los dos primeros casilleros, el último lo deja en blanco y escribe a parte 10 = $
Vic	no	-	-	Únicamente da como ténninos perdidos al 1, 10 y 6 respectivamente
Llar	no	-	-	Únicamente da como ténninos perdidos al -2, *8 y 6 respectivamente
San	no	-	-	Únicamente da como términos perdidos al 3, 3 y 16 respectivamente
Yes	-	-	-	-
Kar	no	-	—	Únicamente da como ténninos perdidos al 7, 3 y 6 respectivamente
Gui	no	-	-	Únicamente da como términos perdidos al 4, 12 y 3^2 respectivamente
Emi	-	-	-	-

Por último, podemos concluir que al hacer el análisis de los procedimientos que llevan a cabp los estudiantes en estos tres ejercicios relacionados con el tema de operaciones con expresiones algebraicas, descubrimos que éstos aún no manejan eficazmente las operaciones con monomios y polinomios. No hacen el uso de literales ni de las reglas de escritura algebraica, ni mucho menos hacen la expresión simbólica de los procedimientos para calcular perímetros y áreas. Aún *no* adquieren seguridad y destreza en el manejo de los procedimientos algebraicos y mucho menosson capaces de utilizarlos para resolver problemas; Dificultando con ello que al egresar de la educación secundaria estos alumnos no se hayan acostumbrado al uso de expresiones con literales y mucho menos a la resolución de problemas utilizando los conocimientos y procedimientos algebraicos.

También vimos que los alumnos tienen dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas como en la obtención del perímetro del trapecio y del área del triángulo. Posiblemente la mayoría de los estudiantes sabe como obtener el perímetro y el área de una figura, siempre y cuando se le den medidas de números naturales, enteros o quizá hasta racionales, pero no expresiones algebraicas. Recordemos que para Piaget, la capacidad de aprendizaje generalizado de un pensador concreto es limitada y que lo se aprende en un contexto no se transmite fácilmente a otros contextos.

Cierto que es normal que los alumnos tengan dificultades para dominar este lenguaje simbólico y que al principio se desconcierten por el uso de literales. Para ello, ei currículo de educación secundaria en lo que respecta al álgebra contempla poco a poco el uso de literales, la reducción de factores con base común en un monomio como lo son la simplificación de términos semejantes, las operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios, (incluyendo las reglas de eliminación de paréntesis y la propiedad distributiva en la multiplicación) expresiones lineales y cuadráticas, da construcción de tablas de valores y su presentación en forma gráfica. Hasta desarrollar formas de expresión algebraica y su utilización en la solución de problemas.

Como es sabido es primordial que el docente este conciente de la importancia que tiene que e| alumno sepa pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y que opere con ella. Es decir, que aprenda a operar con monomios, polinomios y expresiones racionales sencillas. Aunque en el caso de los alumnos en estudio al analizar sus apuntes nos percatamos que éstos tuvieron muy pocas oportunidades de llevar esto a la práctica.

En relación con la teoría de Piaget, en todo este proceso de querer dar respuesta a los ejercicios, el alumno se enfrenta a un desequilibrio y hace un esfuerzo cognoscitivo para encontrar un equilibrio entre él mismo y su ambiente, como una integración de ideas de manera dinámica entre el sujeto y el objeto, es decir, en este caso en particular, con los ejercicios que se le presentan.

La respuesta que éste dé y el procedimiento que siga va a depender del desarrollo de las estructuras cognitivas generales con las que cuente el individuo, de cómo dé utilidad a lo aprendido (conocimiento previo), de su forma exploratoria, y de su experiencia.

Cuando al sujeto se le solicita la resolución de un ejercicio o un problema, éste entra primeramente en desequilibrio, en seguida lo integra, es decir, trata de comprenderlo y explicárselo; y luego actúa sobre él empleando esquemas de acción. Adquiriendo un nuevo conocimiento como producto de dicha interacción.

Para Piaget asimilar es incorporar la información al interior de las estructuras cognitivas a fin de ajustar mejor el conocimiento previo que el sujeto posee. Es decir, el individuo adapta el ambiente a sí mismo y lo utiliza según lo concibe.

No perdamos de vista que el orden ascendente en que presento las respuestas obedece a un desarrollo cognitivo o cognoscitivo cada vez más superior en los individuos y que éste ocurre a partir de la reestructuración de las estructuras cognitivas intemas del aprendiz, de sus esquemas y estructuras mentales, de tal forma que al final de un proceso de aprendizaje aparecen nuevos esquemas y estructuras como una nueva forma de equilibrio que lleva consigo un mayor desarrollo intelectual.

Por ejemplo, en estos ejercicios podemos observar como algunos áumnos (tejan de lado las literales que hay en cada uno de ellos, es decir, no las toman en cuenta en las operaciones y el resultado que presentan.

Otros alumnos ya toman en cuenta las literales aunque aún no saben del todo como operar con ellas.

Por último mencionaremos a aquellos alumnos que consideraron la expresión algebraica como la medida de una figura geométrica o como la parte de un trinomio.

Ecuaciones lineales

Dentro de la educación secundaria, las ecuaciones lineales y los métodos que sirven para resolverlas representan el primer contacto de los alumnos con algunas de las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra, como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para despejar la incógnita.

El propósito de los **Planes y Programas de Estudio de 1993,** es que a través de la introducción de actividades y problemas relacionados con las ecuaciones lineales, los alumnos comprendieran esas nociones y, poco a poco, se dieran cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación.

El estudio de las ecuaciones lineales se introduce en segundo grado con los métodos de solución de ecuaciones de las formas $a + b - c$, $ax \sim b$, $ax + b = c$ y de otras ecuaciones que pueden llevarse a esta forma; en particular ecuaciones de las formas $ax + b =$ ex $+ d$, $ax + bx + c = dx + ex + f$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis. En tercer grado se amplían y complementan estos conocimientos, además se introducen los procedimientos para eliminar los denominadores en las ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

Para el tema de **ecuaciones lineales** se presentaron a los alumnos dos ejercicios y dos problemas para su resolución.

El objetivo es identificar si los alumnos:

a) Han aprendido las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para resolver la ecuación.

b) Saben resolver ecuaciones con paréntesis.

El primer ejercicio de este tema que se les planteó fue:

Encuentra el valor de x $\quad 7x + 5 - 4x +20|$

El valor de x es 5

1. Una alumna hace algunas operaciones incorrectas y las borra.
2. Un alumno da como resultado R = -4
3. Otra alumna sólo escribe x = 2

4. Otra alumna presenta una secuencia incorrecta de igualaciones aritméticas sin considerarla como una igualdad de ecuaciones lineales y olvidándose por completo de la incógnita.

7x + 5 = 4x +20

$$5 = \frac{20}{4} = 5$$

5. Un alumno sustituye a la x con diferentes valores de manera incorrecta.

- 7x + 5 = 4x +20

Hx dO

Wt¡ «o

(x + 5) (6 - 20)

2 6 $\frac{x\ 19}{1}$ $\frac{x+4}{1}$

6. Una alumna sustituye a la x elevando el número al cuadrado.

7x + 5 ~ 4x +20

$\boxed{x = 9}$

7. Ctra alumna sustituye a *x* por 2 operaciones. sin desarrollar las

7x + 5 = 4x +20

7

Lo rescatable en esta respuesta es que el alumno sabe que *x* vale lo mismo en fas dos ecuaciones.

8. Dos alumnos hacen varias operaciones, todas ellas incorrectas.

7x + 5 = 4x +20

'*

-K : *n*

7x + 5 = 4x +20

^0 x A 4 - 7 >4 5

7 xA *> = x V0O

I 2 + 2^ 14

$\boxed{x = 2}$ 12

Lo que podemos rescatar de esto es que ambos saben que hay que buscar el valor de x (la incógnita en este ejercicio).

9. Una alumna sustituyó x por 5 e igualó cada ecuación lineal a 40, hace las operaciones de cada ecuación por separado y al final iguala 40 = 40

7x + 5 “ 4x +20

R- x = 5

y(SJ+5 r vo

35 +5 = */O

<4 O) *iZO* =■ *SO*

ZO -t = SO

Aquí podríamos decir que la alumna contestó acertadamente el ejercicio. Talvez así haya sido, pero también existe la posibilidad de que haya sido por casualidad.

10. Tres alumnos encuentran el valor de x, pero en el segundo caso la alumna hace la comprobación y en el tercer caso vemos cómo el alumno se salta pasos lo que nos deja ver que maneja operaciones y procedimientos de manera interiorizada.

Primer alumno

7x + 5 = 4x +20

3*-<5

X-J5

$\boxed{X=5}$

Segundo alumno

7x + 5=4x+20 7x{.£-

X= 5

x= 20 -5

$x = \frac{15}{3}$

$\boxed{X=5}$

Tercer alumno

7x + 5 = 4x +20

1 (sj +3 ~ +20

5+5 = 20+2

40 = 40

X ~ !k5

3

x = 5

~~2(4(5)+1)~~

Trece alumnos dejan sin contestar el ejercicio, lo que equivale a un 52 % del total. Nueve lo contestaron parcialmente correctamente (un 36%) y cuatro alumnos lo contestaron correctamente. Estos últimos, despejaron la *x* hasta encontrar su valor, además usan correctamente las operaciones Inversas. Es decir, han aprendido las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para despejar la incógnita.

En el tercer caso del inciso 9, vemos que el alumno maneja y coordina datos mentales interiorizados con datos reales simultáneamente, esto nos habla de que el estudiante esta dentro de las operaciones concretas pero con poca distancia de acceder a las operaciones formales. Tiene un pensamiento reversible, es decir, maneja datos mentales, interiorizados y no se reduce, solamente, a las acciones reales y concretas.

Ejercicio VI Encuentra el valor de x: a) $7x + 5 = 4x +20$

Nombre del alumno	Encontró el valor de x	Despejó la *x* hasta encontrar su valor	Utilizó las operaciones inversas	Observaciones
Liz	SÍ	sí	sí	Resolvió satisfactoriamente la igualdad de ecuaciones lineales c hizo la comprobación.
Ala	-	"»	-	-
Cri	no	no	no	Presenta igualaciones incorrectas.
Mar	sí	sí	sí	Resolvió e! planteamiento satisfactoriamente e incluso se salto algunos procedimientos, lo que indica que maneja correctamente la resolución de ecuaciones lineales y que maneja cifras y procedimientos interiorizados.
Sam	-	-	-	-
Sel	no	-		Sustituyó el número 2 en el lugar de x y dejo indicada una igualdad de ecuaciones incorrecta. Esto indica que no supo como proceder para encontrar el valor dex (posiblemente se confunda con la tabulación de expresiones algebraicas).
Rol	-	-	-	
Ber	-		-	-
Moi	sí	sí	sí	Resolvió satisfactoriamente la igualdad encontrando el valor de x
Sha	-	-	-	-
Jor	no	no	no	Dio el valor de 2 y 6 a la *x* respectivamente, realizó las operaciones, resultándole dos valores para x, todo indica que no sabe como resolver una ecuación lineal.
Ime	no	-	-	Realizó algunas operaciones de manera incorrecta pero al final borró todo.
Ada	sí	No se sabe	No se sabe	Da el valor de *x* correctamente pero no presenta la forma en la que procedió para obtener dicho valor.
Elv	no	-	-	Presenta una secuencia incorrecta de igualaciones aritméticas: 5 = 20/4 = 5(7) - 35, sin considerarla como una igualdad de ecuaciones lineales.
Agu	-	--	-	Unicamente presenta como respuesta ~4, sin ningún otro número o procedimiento.
Pat	-	-	—	-
Rey	-	-	—	-
Jav	-	-	-	-
Vic	no	-	-	Únicamente convierte al 7x y 4x por 7^2 y 4^2 respectivamente.
Har	no	-	no	Separa la *x* de los términos 7x y 4x y la presenta como x^2, no logró reunir los términos semejantes.
San	—	-	-	-
Yes	—	-	—	-
Kar	—	-	-	Sólo presenta un resultado incorrecto: x = 2, sin ninguna operación.
Gui		-	—	-
Emi	-		-	-

El segundo ejercicio de este tema que se les presentó fue:

Encuentra el valor de x   2(4x + 7) - 3(x + 2) =Í8|

El valor de x es 2

1. Una alumna se olvidó de la literal *x* (la incógnita) y sólo operó con los números. Parece ser que en el primer caso sumó 8 más 14 y en el segundo, multiplicó 3 por 6 olvidándose de los signos. Al final restó estos resultados.

I6

2. Alguien escribió R = 4x

3. Hubo quien escribió únicamente x = 5

4. Otro sustituyó a *x* por 2 y 5 respectivamente.

I8

5. Otra alumna eleva algunos de los números —de la expresión— al cuadrado, al parecer, sustituye a la incógnita x por la potencia 2. También elimina el tercer paréntesis.

M H l-t--'fc

/63 - I »   &

fxTyzZ

6. Una alumna pasa el 18 del otro lado del signo igual, elimina los paréntesis y al dos y lo iguala con 4x + 7 (que es el primer binomio que se le dio), además convierte al -3(x + 2) en 3x T 2, lo cuál es incorrecto. Posteriormente hace una serie de operaciones también de manera incorrecta.

1 A x 4 7 Al ilG

<2.0-u Uii<5>

I 8-lferO

IQcOl

7. Un alumno separa al minuendo y al sustraerlo. A este último lo iguala con 18 y sustituye a la x por 3, después hace varias operaciones de manera incorrecta.

2(4x + 7) ~3(x + 2)=18

Ana./) Jtx I1J - 18

i / X

$9 = 7$

8. Una alumna al principio procedo bien, pero se equivocó al restar 14 menos 6 y dio un resultado incorrecto.

2(4x + 7) - 3(x + 2) = i 8

$(8x + 14) - 3x - 6 = 18$

$\cancel{= 24x - 84}$

$5x = 8$

$x = \frac{8}{5}$

$x = 1.6$

$-5x - 8 = 18$

$x = \frac{-8}{5}$

$x = 1.6$

$5x = 8 = 18$

$x = \frac{8}{5}$

9. Alguien llegó al resultado por tanteo.

2(4x + 7)-3(x+2)=18

c<xl cvle

X^tg^)-5(2 + 2)=/?

¿óíj)

lo -12. - (3

10. Una alumna hizo bien la eliminación de paréntesis y la simplificación de términos hasta llegar al valor de x

oX+^ - 3x “6-

5x f e 1$

$x = 2$

Quince estudiantes dejaron sin contestar el ejercicio lo que equivale a un 60% del total de los alumnos en estudio. Seis lo contestaron pero lo hicieron erróneamente (24%). Una alumna casi llegó al resultado correcto (4%). Dos alumnos dieron respuesta satisfactoria al ejercicio, es decir, sólo un 8% del total.

En la respuesta del inciso 1, la alumna operó con las ecuaciones como si únicamente tuviera los números, sin considerar a la *x.*

En los incisos 3, 4 y 5 los alumnos dan un valor a x pero de manera incorrecta.

En los incisos 6 y 7 el resultado que dan los alumnos es una igualación (0-0, 7=7 o 18=18) de números naturales y dejan a un lado la incógnita x. Hasta aquí en estos tipos de repuesta los alumnos sólo ven relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones.

En los incisos 8 y 10 los alumnos tienen presente que deben encontrar el valor de x. Aunque en el inciso 8 la respuesta no es correcta, los dos alumnos saben que tienen que despejar la variable por medio de las operaciones inversas para obtener su valor, Saben que a cada transformación corresponde la posibilidad de una inversa o de una recíproca.

Ejercicio VI Encuentra el valor de x: b) 2(4x + 7) - 3(x + 2) - 18

Nombre de! alumno	Encontró el valor de x	Resolvió el problema algebraicamente	Despejó la x hasta encontrar su valor	Manejó las operaciones inversas	Manejó correctamente el uso de paréntesis y la jerarquizacíón de operaciones	Observaciones
Liz	pe	sí	sí	no	no	Empezó bien el procedimiento, pero olvidó el 18 de la igualación que se le dio en la ecuación.
Ala	-	-		-	-	-
Cri	no	sí	sí	no	no	Realizó varias operaciones e igualaciones, la mayoría incorrectas.
Mar	-	-	—	-	-	—
Sam	-	-	-	-	-	-
Sel	no	-	-	-	-	Únicamente presenta las operaciones: 2(4(2) +71 - 3(5+2) = 18, luego dio 3 como resultado.
Rol	-	-	-	-	-	-
Ber	-	-	-	-	-	-
Moí	sí	no				Resolvió el problema aritméticamente, dio 2 al valor de x, lo sustituyó, hizo las operaciones y dio un resultado `correcto` y escribió “sólo calcule y me salió el resultado.
Sha	-	-	-	—	-	—
Jor	no	no		-	-	El alumno dividió incorrectamente la igualación en dos: 2(4x + 7) y 3(x + 2) = 18, luego dio a x el valor de 3 e hizo operaciones e igualaciones incorrectas.
Ime	-	-	—	-	-	-
Ada	sí	sí	sí	sí	sí	Encontró el valor de x e hizo la comprobación. En la resolución se salto algunos procedimientos, lo que

						indica que maneja correctamente la resolución de ecuaciones lineales y que maneja cifras y procedimientos interiorizados.
Elv	no	sí	no	no	no	Únicamente presentó dos operaciones: (8x + 14) (-3x -6) = 18 y 22 -18 = 4
Agu	no	.. ..	-	-	-	Únicamente dio como respuesta 4x
Pat	—	—	—	-	-	
Rey		-	-	—	-	—
Jav	-	—	—	-	-	-
Vic	no	no				Presenta las operaciones: $2((4^2) + (7)^2 - (3)^2 + 2 = 18$, 64+49-9+2 = 18, 103- 11-18 y x= 92
Har	no	-	-	no	no	Hizo algunas operaciones incorrectas y dio una respuesta incorrecta: x = 5
San	—	-	—	-	-	-
Yes	-	-	-	-		
Kar	—	-	-	-	—	-
Gui	-	—	-	-	-	
1 Emi	-		-	-	-	

El primer problema de este tema que se les planteó fue:

Se reparten 133 chocolates entre dos grupos de alumnos. El segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. ¿Cuántos chocolates recibe cada grupo?

La respuesta es: el primer grupo recibe 57 chocolates y el segundo grupo 76

1. Dos alumnas no contestaron el problema y sólo escribieron: el primer grupo y el segundo grupo.

2. Una alumna divide 19 entre 2. Observemos los datos que presenta. Además,, podemos ver que tiene muy arraigado que la forma o los pasos a seguir para resolver un problema es escribir los datos, la operación y el resultado, los cuáles son incorrectos.

ítalos

3. Un alumno sólo escribe 19, 30, 91

4. Alguien escribe que un grupo recibe 62 chocolates y el otro 61

5. Cuatro alumnos dividen 133 entre 2. Uno da como resultado 66, otro 66.5, y otros dos 66 y 67

6. Una alumna suma 69 + 64 dándole un total de 133, y al final da como resultado 64 chocolates.

ojo

c e c' Ve

7. Una alumna buscó dos números que sumados le dieran 133

U 3 a uno \t» **O ^5 'ƒ** Q(^6

yn roboro &oo oíoú I

8. Alguien sólo resta 19 a 133 y da como resultado 114 chocolates.

G*ü'AO v <X te Ai.

.\
31 *A chocc^ oV e*=>

ti

(2 v • j p o »c (? b <i *•> i tVxocota'4'C^

-//•y /e Zoco «4-”""

135

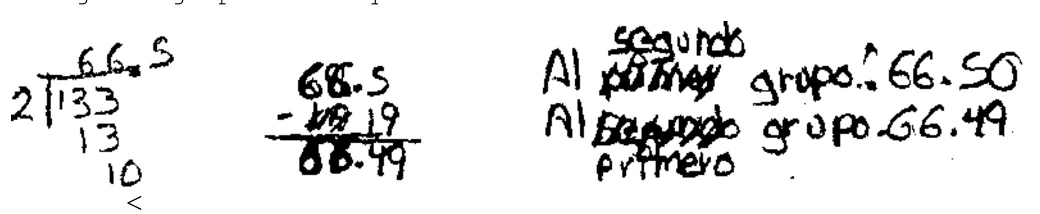
9. Hubo quien dividió 133 entre 2; después multiplicó por dos el resultado y sumó 1. Por otro lado a 133 le resto 19 y al resultado le sumó 19. Escribe como resultado "cada grupo recibe 114 chocolates".

<j»do cyopo ^abo

\ckorotato^

10. Un alumno indica una división (133 ~ *2 =)* pero no la concluye, quizá porque reflexiona nuevamente el problema y decide hacer las operaciones: 133 - 19 = 114, 114 a 2 = 57 y 57 +19 = 76, aunque parece que el alumno si entendió el problema no enuncia el resultado.

11. Alguien divide 133 entre 2 y al resultado le resta 19. En este resultado podemos observar que al hacer la resta no ordena adecuadamente los números y que se olvida del 1 que llevaba al restar 10 menos 9. También tiene claro que el segundo grupo es el que recibe más chocolates.



12. Un alumno divide 133 entre 2 y luego resta y suma 18 al resultado.

El **jr.po** X 5equ,Jo ,ruf0

6t

J-lfi

*'*8 bt* **1** **los <?<** *f'ecíblo* **el**

13. Alguien divide 133 entre 2, dándole como sobrando uno. resultado 66, Además suma 66 más 19 y resta 19 a 67

$\boxed{48 \text{ y } 85}$

$$\begin{array}{r} 66 \\ 2\overline{)133} \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ +\ 48 \\ \hline 133 \end{array}$$

14. Otra alumna hace un procedimiento similar, sólo que suma y resta 19 a 66 y luego suma 1 a 47, este último es el resultado de restar 19 a 66

C tjtndG Cji/ypo vccxtc Sj Y*TSFO qao.
M e\ piiNev *oc»ú¡ cVocoUAo

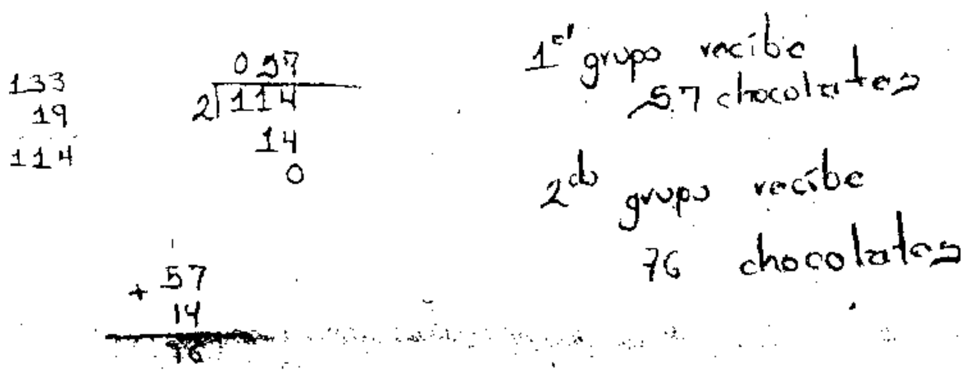
—£<•— Ce te
1)1 S3 ¿11. +11 Bs
'3 *in 8S -¡-jy-

15. Alguien ya había presentado como resultado 66.5, pero lo tacha y resta los 19 chocolates al total. Luego divide el resultado entre dos, pero olvidó sumar los 19 chocolates para cumplir con una de las condiciones del problema, lo que le hizo dar una respuesta errónea.

c<x¿<x J.O ¡

- \ 9 =- I c-iVO

16. Hubo seis alumnos que resolvieron satisfactoriamente el problema. El procedimiento que siguieron fue:



133
19
114

057
2)114
14
0

+ 57
19
76

1er grupo recibe 57 chocolates

2do grupo recibe 76 chocolates

En las respuestas de la 1 a la 7, que aquí se presentan, los alumnos olvidaran que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.

En las respuestas de la 8 a la 15, de alguna manera, Ls alumnos consideran el "19" del que se habla en el problema, pero olvidan que ese "19" indica que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. Esto nos permite ver que los alumnos tienen dificultades al enfrentarse a relaciones de segundo orden y a relaciones existentes entre relaciones. Sólo ve relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones, (características de un pensador concreto).

En las respuestas 8 y la 9 observamos un procedimiento de resolución similar. Lo mismo sucede con las respuestas 12,13 y 14

Los seis alumnos de los que se habla en el inciso 16 entendieron el problema, es decir, comprendieron y tuvieron presente todas las condiciones de dicho planteamiento:

a) Que se repartieron 133 chocolates entre dos grupos de alumnos,
b) Que e! segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
c) Y que lo que tenían que resolver era saber ¿cuántos chocolates recibía cada grupo?

Ninguno de los alumnos procedió a la solución del problema algebraicamente. Por lo tanto no tuvieron la oportunidad de despejar alguna incógnita y encontrar su valor. Nadie planteó una ecuación lineal para resolver el problema. Esto no nos permitió ver si los alumnos hacen correctamente el uso de las operaciones inversas y si dominan los diversos métodos de resolver una ecuación lineal.

Problema 4) Se reparten 133 chocolates entre dos grupos de alumnos. El segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. ¿Cuántos chocolates recibe cada grupo?

Nombre del alumno	Entendió el problema	Lo resolvió	Procedió a su solución aritméticamente o algebraicamente	Planteó una ecuación lineal (cuál)	Despejó la incógnita	Usa correctamente las operaciones inversas	Encontró el valor de la incógnita	Qué operaciones hizo	Qué da como resultado	Observaciones
Liz	no	P	aritméticamente	-	-	-		133-1 9 = I 14 114+2 = 57	Recibe cada uno 57 chocolates	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
Ala	no	no	aritméticamente			-	-	67 + 66= 133	El segundo grupo recibió 67 chocolates. El primer grupo recihió 66 chocolates.	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
Cri	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	69 + 64 = 133	Resultado. Cada grupo recibe 64 chocolates.	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
Mar	sí	sí	aritméticamente					133- 19= 114 114 + 2 = 57 57+ 19 = 76	En el primer salón se dieron 57 chocolates y el segundo salón 76 chocolates.	Da "salón" coma sinónimo de grupo. Subraya la palabra "segundo" en su respuesta. Tal vez como una correspondencia de que es el segundo grupo el que recibe 19 chncolates más
Saín	no	no		-	-		-	-	R = a uno 1c toca 95 y al otro 38 Buscando un número que sumados me'"den" 133	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
Sel	sí	sí.	aritméticamente	-		-	-	o m o 11 11 11	Un salón recibe 76 y otro 57	Da "salón" como sinónimo de grupo. Olvida escribir "chocolates" en su respuesta.
Rol	no	no	aritméticamente					\O oc \D CJ — — — 22 i + + 1 7r <5 So . ri ii ¡j ii + oc oc ..	El primer grupo recibe 48 chocolates y el segundo grupo recibió 85 chocolates.	Hizo anotaciones en una operación que únicamente indicó, pero no resolvió; y en otras dos operaciones, de las tres que realizó. Las anotaciones son: 132 + 2 (sobra 1) ' 66 - 18 = 48 (es el primer grupo) 66 + 18 = 84 (más uno que sobraba son: 85 son los que recibió el segundo grupo.
Ber	no	no	-	-		-	-	-	R = les tocó de 66 y la mitad a cada grupo.	
Moi	no	no	aritméticamente	-	*	-	-	En una ho ja	| 48 y 85	Primero hace una

Sha	no	no	aritméticamente		-	-	
Jor	no	no	aritméticamente	-		-	
line	no	no	aritméticamente				
Ada	sí	sí	aritméticamente		-	-	
Elv		no		-		-	
Agu	no	no			-	-	
Pat	no	no	aritin éticamente				

	aparte: 130 + 2 = 65 y sobran 10 66 - 19 = 47 67+ 18 = 85 85 +47= 132 En el examen: 133 + 2 = 66 y sobra 1 66 + 19 = 85 67-19 = 48 85 +48 = 133		aproximación de 133 a 130, quizá para hacer más fácil la división, pero fue esto lo que lo confundió. Tai vez en un principio tenía presente que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero, pero no procedió adecuadamente, ni tampoco hizo la comprobación o la verificación del resultado. Sólo da como resultado 48 y 85, sin decir que cantidad recihe el primer grupo y que cantidad recibe el segundo grupo.
-	66 - 19 = 47 85 + 47= 132 85 +48 = 133	El segundo grupo recibe 85 más que el primer grupo y el primer grupo recibe 48 chocolates	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
-	133- 19= 1 14 Chocolates	El primer grupo recibe 1 14 chocolates. El segundo grupo recibe 14 chocolates	No considero que el segundo grupo recibe 19 choco’ates más que el primero.
	133+ 2 = 66 y sobra 1 66x2 = 132 132 + 1 = 133 133- 19= 114 114+ 19= 133	R = cada grupo recibe 114 chocolates	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
	133- 19= 114 114+2 = 57 57+19 = 76	Uno 76 chocolates y el otro sólo 57 chocolates.	Le faltó especificar que grupo recibió 76 y que grupo recibió 57
	-	1 er grupo 2do grupo	Es una alumna sobresaliente, no se que paso. Quizá no comprendió el problema o no le dio tiempo contestarlo.
		Un grupo recibe 62 chocolates. El otro grupo 61 chocolates	Olvidó que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero y que en total son 133
	]9 + 2 = 9y sobra 1	Resultado 9	Escribe datos, operación y resultado. En los datos escribe “chocolates'' y “alumnos”

Rey	-	no	-	-	-	-	-	-	1 er grupo 2do grupo	
Jav		no	-	-			-		Uno 66 Dos 67 Tres 152	
Vic	no	no	aritméticamente					133 + 2 = 66 y sobra 0 66x2= 132	Cada grupo recibe 66 chocolates	En la primera operación da como sobrante "cero" y hace la anotación: "y se multiplicaría". Luego multiplica 66 x dos igual a 132 (segunda operación) y hace la anotación: "y haría falta uno para que fueran los 133 chocolates."
Har	-	no	-	-	-		-	-	19,30,91	Antes había escrito 90 y después, encima del 0 colocó el 1
San	no	no	aritméticamente					133 = 2 = 66.5 y sobra 0 66.5 <u>- 19</u> 66. 49 66.5 <u>+ 66.49</u> 132.99	Al segundo grupo 66.50 Al primer grupo 66.49	El resultado de la división es un número decimal. Cuando hace las operaciones de resta y suma no "coloca bien" las cantidades. Al dar la respuesta había escrito "primer" en el lugar de "segundo" y viceversa, después los tacha y cambia el orden. Tal vez considerando que el segundo grupo es el que recibe más, aunque olvida que eran 1 9 chocolates más.
Yes	si	si	aritméticamente		-		-	133 -19=114 114 + 2 = 57 57 + 1 9 = 76	El primer grupo recibe 57 chocolates y el segundo grupo recibe 76 chocolates.	
Kar	sí	sí	aritméticamente					133 + 2 = 625 y sobra 0 133-19= 114 114+2 = 57 57 + 19 = 76 76 + 19 = 85 85 + 57 = 76 + 57 = 133	El primer grupo recibe 57 chocolates. El segundo grupo recibe 57 más 19 chocolates hace un total de 76 chocolates.	Primero divide 133 entre 2 obteniendo un resultado incorrecto. Después decide restar a 133 los 19 chocolates más que recibió el segundo grupo y después hace la división. Suma al resultado los 19 y después vuelve a sumar 19, y deja indicada la operación 85 +57, quizá se da cuenta que la suma rebasa los 133, revisa sus procedimientos y finalmente suma 76 + 57 =

										133 En su respuesta llama la atención "...más 19 chocolates hace un total de 76 chocolates" comprendió que el segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero.
Gui	p.c	no	aritméticamente					ín1 + .1. o Ol o i1][11 ll—		No termina la primera operación, quizá porque reflexiona nuevamente el problema y decide hacer las otras operaciones. Talvez el alumno si entendió el problema, hizo aritméticamente las operaciones correspondientes pero no enuncia el resultado.
Emi	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	66 + 67= 133	Primer grupo = 66 Segundo grupo = 67	No sabemos de dónde obtuvo esos resultados.

El segundo problema que se ¡es planteó a los alumnos fue el siguiente:

En una tlapalería me venden la lata de pintura $ 31 más barata que en otra, de tal manera que con la misma cantidad de dinero, en la primer tlapalería puedo comprar cinco latas mientras que en la otra sólo puedo comprar cuatro. ¿A cuánto me dan-la lata de pintura en la primer tienda?

La respuesta es $ 124

1. Una alumna hizo las siguientes operaciones con los datos que se le dieron.

Os

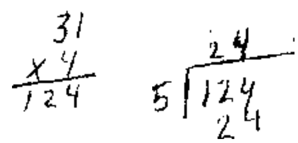
en 30

2__y

3 *O*

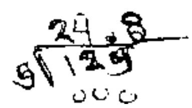
2. Un alumno multiplicó 31 por 2 y escribió como resultados $31 y $62

3. Un alumno multiplicó 31 por 4 y el resultado que obtuvo lo dividió entre 5

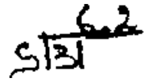


4. Una alumna multiplicó 31 por 5 dándole como resultado 155, pero encima de este escribe 124. Ya había escrito 155 entre 4, pero cambia los números por 124 y 5 respectivamente.

3 t
A-5



5. Hubo diez alumnos (un 40% del total) que sólo dividieron 31 entre 5



6. Cinco alumnos (20 % del total) dividieron 31 entre 5 y 31 entre 4, aunque dos de ellos no hicieron la última división correctamente.

la primer tienda?

6.20
5 | 31
10
0

d V o \ 7.75
4 | 31
30
KO 0

7. Otro alumno da como resultado 52, pero no sabemos como procedió para obtener ese resultado ya que no presenta operaciones.

|3-A$5^ ,c>40 **P/n-tC'ro**

Cabe mencionar que nadie resolvió el problema satisfactoriamente y que cinco estudiantes lo dejaron sin contestar lo que equivale al 20% del total. Esto nos muestra que los alumnos no entendieron el problema; no lograron obtener el valor de la incógnita; procedieron a su resolución aritméticamente y no plantearon ninguna ecuación.

En este tipo de respuestas que los alumnos dan podemos ver que nadie comprendió el problema. Manipulan todos o algunos de los datos que se le dieron (31, 4 y 5) pero sin respetar las condiciones del problema.

Talvez si los alumnos hubiesen tenido la oportunidad de desarrollar diferentes actividades dónde pudieran pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y operar con ella —como lo marca el programa— les hubiese sido fácil darse cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación.

Si queremos lograr un aprendizaje significativo del álgebra es necesario que los símbolos y operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares.

En la resolución de este problema vemos como los alumnos se encuentran aún en el estadio de las operaciones concretas ya que tienen dificultades para enfrentarse a relaciones de segundo orden y a relaciones existentes entre relaciones.

Problema 5) En una tlapalería me venden la lata de pintura $31 más barata que en otra, de tal manera que con la misma cantidad de dinero, en la primer tlapalería puedo comprar cinco latas mientras que en la otra sólo puedo comprar cuatro. ¿A cuánto me dan la lata de pintura en la primer tienda?

Nombre del alumno	Entendió el proble-ma	Lo resolvió	Procedió a su solución aritméticamente 0 algebraicamente	Planteó una ecuación lineal (cuál)	Despejó la incóg-nita	Usa correcta m en te las operaciones inversas	Encontró el valor de la incógnita	Qué operaciones hizo	Que da como resultado	Observaciones
Liz	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	31-5 = 6.2	A 6.2	
Ala	-	-	-	-	-	-	-	••	-	-
Cri	no	no	aritméticamente	-	-	-		31 -5 = 6.2 31 - 4 = 7.75	Resultado 6.2	Escribe operación y abajo hace las operaciones. Escribe resultado y ahajo lo coloca.
Mar	-	no	-	-	-	-	-	-	R = A $52 la lata de pintura	Ignoro de donde sacó este resultado. Sabe que se trata de pesos (.$)
Sam	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Se!	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	31 x 5 = 124 124 - 5 = 24.8	-	-
Rol									En la primer tlapalería lu latita de pintura cuesta $ 6.20	No presenta operaciones, posiblemente 6.20 lo obtuvo de dividir 3 1 - 5 = 6.2 o 6.20, sólo ve como datos 31 y 5, y aunque sabe qee se trata de pesos, no ve la relación que hay entre ellos (condiciones del problema)
Ber	no	no	aritméticamente					Hizo tanteos, 4+4+4+4+4 =; 6 + 6 + 6 + 6 + 6=; 6.2+6.2+6.2+6.2+6.2 — 31.0; 7+7=14, 7+7=14, 14+14=28; 8+8=16, 8+8=16, 16+16=32; 7.30 + 7.30 + 7.30;	En la primer tienda la lata la dan a $6.20 centavos. En la segunda tienda la dan a $7.20 centavos.	Turna la cantidad de $31 como el total de la compra de las latas, no como que cada lata cuesta treinta y un pesos más barata en una tienda que en la otra.

								7.20+7.20+7.20+7.20 =14+14 y -20+.20+.20+.20 - 28.80		
Moi	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-
Sha	no	no	aritméticamente		■			31-5 = 6.2 6.2+6.2+6.2+Ó.2+6.2 = 31.0	R = $ 6.2 pesos cada una	Primero da como resultado $3 1, lo tacha; luego R = 6.2 tacha ci 6.2; finalmente escribe R = $ 6.2 pesos cada una
Jor	no	no	aritméticamente		-	-	-	3! = 5 = 6.20 31 -4 = 7.75	R = $ 6.20	Entre las dos operaciones que hizo escribió: “y después dividí”
hne	no	no	aritméticamente	-	-		-	31 = 4 = 7.75 31-5 = 6.2 6.2 x 5 = 31.0	R = 6.2 pesos cada una	Primero escribe R = 6.2 cada uno, después tacha ”cadu uno” y escribe” pesos cada una”
Ada	-	-	-	-	-	-	-			*
Eiv	no	no	aritméticamente					31 =5 =6.2 31 -4 = 7.75	R = 7.75	Toma la cantidad de $31 como el total de la compra de las latas, Olvida que cada lata cuesta treinta y un pesos más barata en una tienda que en la otra.
Agu	no	no	aritméticamente	-	-	-		31=5 = 6.0 y sobra 1.0. 31=4 = 7. 31=2 = 15.1	R = $ 6.0 pesos	Coloca el signo de dólares y enfrente escribe pesos.
Pat	no	no	aritméticamente					31 - 5 __ 4 __ 30	Resultado en 30 pesos	En 5 problemas, de los 6 que contesto, escribe: datos operación y resultado. En éste, escribe tlapalería, pintura y latas como datos.
Rey	-	-	-	-	-	-	-	*	$ 6.00	Ignoro de donde saeó este resultado.
Jav	-	no	-	-	-		-	-	*»	-
Víc	no	no	aritméticamente					6.2x5=31.0 7.50 x 4 = 30	Lo máximo te la darían a 6 pesos que seria multiplicado	Como se les indicó que no borraran nada la alumno colocó entre paréntesis lo que no pudo borrar e indicó: “No 'vale lo que esta entre paréntesis”, quedando su respuesta de la siguiente forma: “Lo máximo te la darían a 6 pesos que sería multiplicado 6.2 x 5 =3 1.0 (y te sobraría un peso y en la segunda lo máximo es que cueste

										7.5Ü siete con cincuenta centavos 7.50 x4 = 30)
Har	no	no	-	-	-	-		-	$ 31 y $62	Sólo tomo el $3 1 y lo multiplicó por 2, $62
San	no	no	aritméticamente	-		-	-	31 = 5 = 6.2	En la primer tienda cuesta $6.2	
Yes	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	31 = 5=6.2	A $ 6.2	
Kar	no	no	aritméticamente	*	-	-	-	31 = 5 = 6.2 6.2 x 5 =31	En la primer tienda se la dan a $6.2	
Gui	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	31 x 4 = 124 124 = 5 = 24 y sobran 4		
Emi	no	no	aritméticamente		-	-	-	62x5=310	En la primer tienda se la dan a $62	

Al analizar los diferentes tipos de las respuestas que dieron ¡os estudiantes en la resolución de estos dos ejercicios y de estos dos problemas relacionados con el tema de ecuaciones lineales, nos percatamos que no han aprendido las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra. Y que durante todo el ciclo escolar, y tal vez, durante toda la educación secundaria los alumnos no tuvieron la oportunidad de desarrollar actividades que los fueran adentrando al uso de ecuaciones lineales en diferentes contextos, ni mucho menos el contacto con problemas relacionados con las ecuaciones lineales. Tampoco exploraron como las condiciones de un problema podrían traducirse en una ecuación. Vemos con gran desilusión que la mayoría no comprende ni ha aprendido la noción de ecuación lineal.

A pesar de que tanto el estudio de las ecuaciones lineales, como sus métodos de solución y su uso en la resolución de problemas se introduce en segundo grado y conocimientos se amplían y complementan en tercer grado, los alumnos no han logrado consolidar dichos conocimientos y mucho menos los aplican en la resolución de problemas. Esto nos permite ver que los alumnos no son capaces de aplicar los conocimientos adquiridos en aquellos contextos que no le son habituales.

Estas características corresponden a un pensador concreto, ya que éste tiene una capacidad de aprendizaje generalizado limitada, es decir, lo que aprende en un contexto no lo transmite fácilmente a otros contextos. Muy diferente a lo que puede hacer un pensador formal: aplicar las habilidades de razonamiento y solución de problemas a contextos diferentes de aquellos en los que los ha adquirido.

Sistema de ecuaciones lineales

El tema de sistema de ecuaciones lineales se introduce en segundo grado de educación secundaria con el planteamiento de problemas que conduzcan a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución por el método de sustitución.

Es muy importante que la enseñaza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones se dé mediante el planteamiento y la resolución de problemas. Así, los alumnos podrán ver que en algunos problemas no hay sólo una, sino varias ecuaciones o condiciones. Para resolverlos se necesita encontrar los valores que satisfacen *simultáneamente* todas las ecuaciones. Sin la ayuda del planteamiento y la resolución de problemas es muy difícil que los alumnos comprendan por qué en un sistema de dos ecuaciones, las incógnitas x e y (o cuales quiera que sean éstas) representan los mismos valores en ambas ecuaciones y, por lo tanto, comprendan tanto el principio de sustitución como las otras nociones asociadas a la solución de sistemas de ecuaciones.

El principio de sustitución, ia exploración y la construcción de tablas es muy importante en la resolución de sistemas de ecuaciones (ecuaciones simultáneas). Para ello, el alumno deberá apropiarse gradualmente de las nociones de ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica.

En el tercer grado los alumnos seguirán practicando el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Pero además se introducirán los otros métodos de resolución de ecuaciones como son: el método de igualación, de suma y resta y el método gráfico. También se vera el número de soluciones de un sistema dos por dos, así como algunos ejemplos de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (sistemas 3 x 3) y su solución por el método de eliminaciones sucesivas.

Cabe señalar que aunque diversas investigaciones señalan que se ha observado que los alumnos tienden a preferir el método de suma y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es muy importante que tengan la oportunidad de practicar los otros métodos y muy particularmente el de sustitución. Ya que el despejar una de las incógnitas en uná ecuación y sustituirla en la otra es una de las nociones fundamentales no sólo del álgebra, sino de todas las matemáticas.[8]

El objetivo es observar si los alumnos:

a) Se han apropiado de la noción de ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica.

b) Si comprenden el principio de sustitución, la exploración y construcción ce tablas

c) Si conocen y manejan los diferentes métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

d) Ver si los alumnos resuelven el problema aritméticamente o algebraicamente.

e) A sí mismo ver si el alumno hace abstracciones y generalizaciones o se mueve en el plano concreto.

Para ello se les planteó a los estudiantes la resolución de un ejercicio y dos problemas.

[s] Cfr. SEP, 1995; p. 150

El ejercicio que se les planteó fue el siguiente:

Encuentra los valores de *x* e *y.*

$$2x - y = 3$$
$$x + y = 12$$

Respuesta: “x “ es igual a 5 yes igual a 7

1. Nueve alumnos dejaron sin contestar el ejercicio, equivale a lo que un 36 % del total de los alumnos en estudio.

2. Hubo quien sumó y restó los resultados de las ecuaciones que se le dieron.

$12 - 3 = 11$

$\boxed{y = 11}$

$2x + = 3$

$15 - 15$ $\boxed{y = 15}$

$\boxed{0 = 0}$

3. Un alumno da los valores de 4 y 3 a *"x"* e "y" respectivamente y hace algunas igualaciones incorrectas.

-3

3

'Rs’xb’»

1 Cíl

4. Siete alumnos únicamente dieron valores a las incógnitas tratando de cumplir la igualdad de cada una de las ecuaciones por separado. Es decir, no comprendieron que el valor de las incógnitas era el mismo en ambas ecuaciones. Dentro de estos siete alumnos, cuatro de ellos hicieron verdadera ambas ecuaciones; y tres sólo la segunda ecuación (x + *y* = 12). Hubo

quien no consideró las incógnitas o bien les da el valor de 1. Ejemplos:

^(S) - 5-5

Q 4 C ~ |2

5. Un alumno encuentra el valor de x pero de manera incorrecta. Lo mismo sucede con y. Escribió las operaciones y = 12 - 3 + 2, y = 12 -5, y = 7. No comprendió que se trataba de un sistema de ecuaciones lineales.

lx-x -3

> + y - 12.

y ; |% -3<2.

y = i?.-?

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}}$$

6. También una alumna presenta los valores correctos de x e *y*, pero cuando sustituye x cambia el valor de x que es 5 por 2^2

Acídenos 10-7 - 3

3 = 3

– *$ X-hf* a

7. Alguien se centra únicamente en resolver la primer ecuación, aunque lo hace de manera errónea: pasa el 3 al otro lado del signo igual y lo multiplica por 2, eliminando las incógnitas; no obstante al final escribe x = 2 y hace la comprobación también de manera incorrecta.

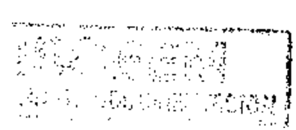
A/ - y - i

$$\boxed{3 = 3}$$

$$2(3) - (3) = 3$$

$$6 - 3 = 3$$

$$\boxed{3 = 3}$$



8. Una alumna, en la primera ecuación hace la conversión errónea de 2x por 2^2, *y* da el valor de 1 a "*y*" de tal manera que se cumpla la igualdad. En la segunda ecuación sustituye a la x por 2^z y a la y por 4^2. Todo esto no la llevó a resolver satisfactoriamente el ejercicio, pero a nosotros nos permitió ver que dicha estudiante no sabe lo que significa elevar un número a la 2da potencia. Se equivoca al obtener el valor de 4¿, en lugar de multiplicar 4x4 suma 4 + 4. Talvez lo mismo ocurrió con el 2^ ya que 2x2=4 y también 2+2=4

7.x c u
üf V -- 3
'1-1 = 3

O1O

5? <51 -12
'1+8 - >i

II 'II .*0
O f *o*

9. Dos alumnos trataron de resolver el sistema de ecuaciones a través del método de suma y resta, pero se equivocaron porque multiplicaron —innecesariamente— por otros números o signos las ecuaciones: uno de ellos multiplicó la primer ecuación por el signo más y la segunda ecuación por el signo menos, además de que se equivocó al hacer las operaciones; el otro alumno multiplicó por 1 la primer ecuación y por -2 la segunda ecuación y también se equivocó en la realización de las operaciones.

Primer alumno:

6h) 2x - y = 3
pjx + lzJ^2----------

$-2x + y = -3$
$x + y = 12$
$-x \; 2y = 12$

$2x - y = 3$

$(+)\,2x - y = 3$
$(+)\;\; x + y = 12$

$2x - y = 3$
$x + y = 12$
$3x = 12$
$x = 12 - 3$

Segundo alumno:

-G>)-3
\2-°\ = 3

t 2x-y = 3
. U xt y - 12

$2\cancel{x} - 1y = 3$
$-\cancel{2}x - 2y = -24$
$-3y = -27$
$y = \frac{-27}{-3}$
$y = 9$

$x = 6$

10. Sólo una alumna resolvió el sistema de ecuaciones, aunque lo resolvió por tanteo, buscó dos números que sumados dieran 12 (segunda ecuación) y luego los sustituyó en la primera ecuación y operó con ellos mentalmente.

/o 7
2x - y = 3
x + y = 12
5 7

R= x = 5
y = 7

2 y = 3
=3

/o - *7 - 3
<u>3 = 3</u>

X 4 y = ι¿
(5)+í7) = '*
12. - I S.

El análisis de las respuestas que dieron los estudiantes en relación con este ejercicio nos permitió ver aún no se han apropiado de la noción de ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica. Es decir, no comprendieron que se trataba de un sistema de ecuaciones lineales y que las incógnitas x e y representaban los mismos valores en ambas ecuaciones.

La única alumna que resolvió satisfactoriamente el problema lo hizo por tanteo y no empleó ningún método de resolución de un sistema de ecuaciones iineales. Con esio podemos decir que talvez los estudiantes en estudio sepan que existen diferentes métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales pero no los tienen bien aprendidos y por lo tanto no los manejan adecuadamente.

El que la mayoría de los alumnos no hayan comprendido que el valor de las incógnitas x e y era el mismo en ambas ecuaciones nos permite ver que los alumnos aún no logran hacer abstracciones y generalizaciones y que aún se mueven en el plano concreto.

Por otro lado, si únicamente nos fijáramos en el resultado sin tomar en cuenta el procedimiento diríamos que los alumnos que dieron las respuestas de los incisos 5 y 6 comprendieron el problema y que lo resolvieron satisfactoriamente, lo cual no es cierto. De ahí la importancia de ver qué procedimiento sigue el alumno para llegar a un resultado, el cual nos devela mucho más que los mismos resultados.

Ejercicio 7 Encuentra los valores de x ey.

Nombre dtrl alumno	Encontró los valores de ,r e >■	Comprendió que las incógnitas representaban Ins mismos valores en ambas ecuaciones	Procedió a encontrar los valores aritméticamente	Procedió a encontrar los valores algebraicamente	Comprendió que se trataba de un sistema de ecuaciones lineales	Que método utilizó en la resoluciún del sistema de ecuaciones	Observaciones
Liz	no	SÍ	no	sí	SÍ	suma y resta	Multiplicó innecesariamente por 1 la primera ecuación y por -2 la segunda, lo que hizo que le diera un resultado erróneo.
Ala	—	-	—		-	-	—
Cri	no	no	-	no	no	-	Sumó y restó los resultados de las ecuaciones que se le dieron: 12 - 3 = 11 *y* 12 + 3 = 15
Mar	Sí pero lo hace de manera incorrecta	sí	sí	no	no		Encuentra el valor correcto de x pero de manera incorrecta. Lo mismo sucede con *y*, escribió las operaciones y = 12 — 3 + 2, y = 12 ~5, y = 7, además no comprendió que se trataba de un sistema de ecuaciones lineales.
Sam	-	-	—	-	-	-	-
Sel	no	-	-	-	-	-	Unicamente presenta las operaciones: 2(3) - 3~3 y 6 + 6 = 12
Rol	—	-	-	-	-	-	—
Ber	-	-	-	-	-	-	-
Moi	no		sí	no	-	suma y resta	Multiplicó innecesariamente por 1 y -1 las ecuaciones respectivamente, no maneja adecuadamente las operaciones inversas al despejar la incógnita.
Sha	no	no		-			Únicamente da como los valores 1 y 6 a “x” y 18 y 6 a “y". No comprendió que el valor de las incógnitas tenía que satisfacer ambas ecuaciones.
Jor	no	-	-	-	-	-	Únicamente colocó con una flecha frente a cada ecuación las ecuaciones 2x - 5y = 3 y

								3, y ~ 5. Por el otro , escribe x + y = 12 y 6 + *6* = 12
San	-	—	-	-	-	-		
Yes	-	-	-	—	-			-
Kar	no	-	-		-			Escribe x = 5-7 = 3, x = 10, y ~ 2, y por último xO + 2 = 12
Gui	-	—	-	—	—			-
Emi	no	-	no		no	-		Únicamente da los valores de 1 y 5 a x y 16 y 7 para y sin ninguna otra operación o explicación.

El primer problema de este tema que se les planteó fue el siguiente:

Con $ 310 puedo comprar cuatro pantalones o bien tres pantalones y cinco pares de calcetines. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada par de calcetines.

Respuesta: cada pantalón cuesta $ 77.50 y cada par de calcetines $15.50

El propósito es identificar sí el alumno:

a) Entendió el problema.
b) Si lo resuelve aritméticamente o algebraicamente.
c) Y si lo resuelve algebraicamente ver si despeja correctamente la incógnita y si usa correctamente las operaciones inversas.
d) Si hace abstracciones y generalizaciones o se mueve en lo concreto.

Algunas de las respuestas que dieron fueron:

1. Alguien sólo dividió 310 entre 8 y da como resultado 35.

o

o

Al parecer, el alumno sólo sumó los 5 pares de calcetines y los 3 pantalones, lo que le da como resultado 8 y por eso divide 310 entre 8 Pero además de que no da solución ai problema, no realiza correctamente la división, ya que al dividir 310 entre 8, nos da como resultado 38.75

2. Hubo quien ajusto los 310 pesos a los cuatro o tres pantalones o bien a los cinco pares de calcetines, es decir, separó los productos y no respeto la condición del problema.

5'o ‘5* o 3 ov%ey O S y oY es á <r [
po^-\o.\ov.e3 0(ao

C.r.utn 03 P tíos m e r 6^.
4- ^eSo ro* va á ex ¡

\O3 62.

7'
_Z1_
SOS

5/0 1

3. Un alumno divide 310 entre varias cantidades. También deja indicadas dos divisiones: 310 entre 3 (esta la resuelve en una hoja aparte) y 62 entre 5. Da como resultado que cada pantalón cuesta 44 y cada par de calcetines 6.2, Si multiplicamos los resultado que dan por 4 o 3 que son los pantalones que compró nos da un total de 176 y 132 respectivamente y de los 5 pares de calcetines serían 31, que si los sumamos a 132 nos da un total de 163, muy por debajo de los 310 de los que nos hablan en el problema. Las operaciones que presenta son las siguientes[9]:

Operaciones: Respuesta

310 - 7 = 44
310 - 5 = 62
62-5 =
310 - 3 = 62 310-12 = 25.8

3 / 310.

Nos damos cuenta que el alumno al dividir 310 entre varias cantidades no comprendió el problema. Además el resultado de la cuarta operación es incorrecto. Obsérvese también el punto después del 2

4. Cuatro alumnos sólo tomaron en cuenta los tres pantalones y los cinco pares de calcetines, es decir, no tomaron las dos condiciones del problema, dando como respuesta: $100 cada pantalón y $2 cada par de calcetines.

f.- Ma QanW WcAa 100 Ac\a\ ^cn 350 (toes
k- *e** **t**¹ 10 foseo**

5. Una alumna presenta como resultado: cada pantalón cuesta $52.5 y cada par de calcetines $ 20. No presenta operaciones, únicamente resultado. Pero si multiplicamos 20 por 5 nos da 100 y si a 310 le restamos estos 100 nos quedan 210, que divididos entre cuatro nos dan 52.5

Cada pantalón cuesta $52.5

Cada par de calcetina cuesta $20

[9] Dichas operaciones se trascribieron debido a que el alumno encima unas operaciones con otras y revuelve operaciones de diferentes problemas y ejercicios. (Todo esto en una hoja a parte de su examen, lo que fue posible escanear es la respuesta que presenta en su examen).

6. Otros cinco alumnos- hicieren algo semejante a lo que hizo la alumna anterior, pero ellos si presentan operaciones. Aunque no resolvieron satisfactoriamente el problema.

Ala hizo lo siguiente:

JO CQ Ja panltfldn cada po de *wleeimej $*

50
x4
200

%Do
\> 110
^To

Mar y Emi lo resolvieron de esta manera:

Codo ídA-talph

Codo Por da Cc/ICíUnsí- c^sU>h e/ por-

65
x4
260

10
x5
50

1
260
+ 50
310

Vic y Elv presentan las siguientes operaciones:

c>aVcA^iV^

6
*3
30

Total
1
280
+ 30
310

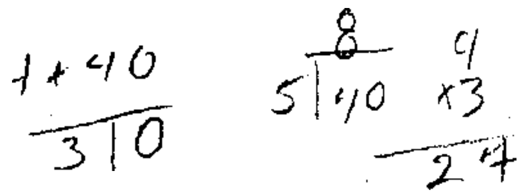
po>n\o\e¥X

pesce»

Tanto en la respuesta que se presenta en el inciso 6 como las respuestas que se presentan en el inciso 7, nos damos cuenta que los alumnos consideraron únicamente los cuatro pantalones junto con los cinco pares de calcetines. Separaron las dos condiciones del problema: comprar cuatro pantalones o bien tres pantalones y cinco pares de calcetines.

7. Dos alumnas consideraron únicamente la segunda condición del problema, es decir, la compra de tres pantalones y los cinco pares de calcetines Y presentan los • siguientes procedimientos:

Crujo



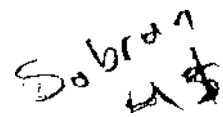
8. Un alumno sumó[10] 4 veces: 77.50 lo que le da 310.00 También sumo 5 veces 16, dando como resultado 75 (lo cual es incorrecto[11]). Da como resultados: 77.50 por un lado y sobran 4$ por el otro, pero no especifica cuánto cuesta cada pantalón ni cada par de calcetines. Además, obsérvese el signo de pesos después del 4

11-^0

\ ó

í v>

(



Vs 0,o o ó-

9. Alguien dividen 310 entre cuatro (procedimiento acertado), después al resultado que obtiene lo divide nuevamente entre 4 (procedimiento erróneo). Luego resta 77.5 a 310 (procedimiento acertado) y al resultado que obtiene lo divide entre 5 (procedimiento erróneo y al igual que la operación, ya que el resultado de dividir 232.2 es 46.5 y no 46.45). Finalmente escribe como respuesta: "cada pantalón cuesta $19.375 y cada par de calcetines cuesta $46.45) La alumna en

[10] Muy probablemente antes dividió 310 entre 4

[11] Sí sumamos 6 veces 16 nos da como resultado 80 o bien si sumamos 4 veces 16 + 10, sería 74

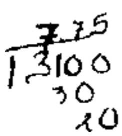
dicha respuesta da un costo menor a cada pantalón que a cada par de calcetines.

cada par de calcetines?- i **. 3 ló** **taAa fAhloXcM fe**
M<x t>av CÚCJÍJQ

3? **26**

10. Una alumna divide 310 entre cuatro pero se equivoca al colocar el punto del resultado de la división. Después suma dos veces este resultado y da como respuesta "cada pantalón cuesta $7.75 y cada par de calcetín $15.5" lo cual es incorrecto. E igual que la alumna anterior da un costo menor al pantalón que a los calcetines.

Coi.



cU» POY de cokd'n£15 *0* |

7- 75

---

5 *6*

11. Cinco alumnos resolvieron satisfactoriamente el problema, aunque lo hicieron aritméticamente.

X i 310
V'
2.0 0

R= Cada pantolón vale : $ 77.50
Cada par de calcetines vale : $15.50

3p. ,2.3 2. A

5 |77.5 = 15.50

Estos cinco alumnos tuvieron presente las dos condiciones del problema, las cuales satisficieron correctamente, aunque aún no lo hacen algebraicamente, vemos que tienen estructuras de pensamiento más desarrolladas que los anteriores, aunque aún se mueven en el campo de lo concreto,

Lo que podemos ver a partir del análisis de la resolución de dicho problema fue que:

1) Dos aluminas dejaron sin contestar el problema (un 8% del total).

2) Cinco alumnos resolvieron satisfactoriamente el problema, lo que equivale a un 20 % del total de los alumnos a los que se les aplicó dicho examen.

3) La mayoría no comprendió el problema. No identificaron que en dicho problema había dos condiciones. Una que era que con $ 310 se podían comprar cuatro pantalones o bien (la otra condición) tres pantalones y cinco pares de calcetines. A excepción de una alumna, los alumnos tuvieron dificultad de encontrar el valor de los pantalones y los calcetines en dicho problema. Talvez si únicamente se les hubiera dado la primera condición y no la segunda; la gran mayoría hubiera dividido 310 entre cuatro para obtener el costo de cada pantalón sin ningún problema. Esto nos muestra que los estudiantes no son capaces de cumplir todas las condiciones de un problema,

Problema 2 Con $ 310 puedo comprar cuatro pantalones o bien tres pantalones y cinco pares de calcetines. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada par de calcetines?

Nombre del alumno	Entendió el proble-ma	Lo resol-vió	Procedió a su solución aritméticamente o algebraicamente	Planteó una ecuación lineal (cuál)	Despejó la incóg-nita	Usa correctamente las operaciones inversas	Encontró el valor de la incógnita	Qué operaciones hizo	Qué da como resultado	Observaciones
Liz	SÍ	SÍ	aritméticamente	-	-	-	-	310 + 4 = 77.5 77.5+5 = 15.5	Pantalones $77.5 Calcetines $15.5	
Ala	no	no	aritméticamente			-	-	22 x 5 = 110 50 x 4 = 200 200 +110 = 310	4 pantalones 50 cada pantalón, 22 cada par de calcetines 5 pares	
Cri	no	no	aritméticamente					77 x 4 = 308 103x3 = 309 62x5 = 310	**Si compro: 4 pantalones cada uno me cuesta $77 y sobran $2. 3 pantalones cada uno cuesta $103 y sobra $1, 5 pares de calcetines cada par me cuesta $62 y no sobra nada**	
Mar	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	-	Cada pantalón cuesta $65 y cada par de calcetines cuestan $10 el par	
Sam	no	-	-		-	-	-	58 +78= 136		
Sel	sí	sí	aritméticamente		-	-	-	310+ 4 = 77.5 77.5+ 5 = 15.5	Cada uno de los pantalones costaron $ 77.5 y los calcetines $15.5	
Rol	no	no	aritméticamente						Cada pantalón cuesta $100, entonces de los tres pantalones sen $300 y tos calcetines $2 cada uno y de 5 son $10, en total ya son $310	
Ber	no	no	aritméticamente				*		Cada pantalón cuesta $100, en total son $300 y cada par de calcetines cuesta $2 en total son $10	
Moi	si	sí	aritméticamente			-	-	310 + 4 = 39.99 (tacha toda la operación) 310 + 2=155	77.50 cada pantalón y 15.5 cada calcetín Al parecer en un inicio, al	

								155 - 2 = 77.5 77. 5 - 5 = 15.5 310 + 4 = 77.5	alumno se le dificultó dividir 310 entre 4, por lo que procedió a dividirlo entre 2 y nuevamente el resultado entre 2. Al final dividió 310 + 4 = 77.5	
Sha	no	no	aritméticamente						Comprando 3 pantalones son 270 y cada uno cuesta 90 pesos y los calcetines 8 pesos el par. Al parecer la alumna hizo mentalmente los cálculos.	
Jor	sí	sí	aritméticamente	-	-	-	-	310 + 4 = 77.5 77.5+5 = 15.5	$77.50 pantalones $15.50 par de calcetines	
Ime	P	no	aritméticamente					310 + 4 = 7.75 7.75+7.75=15.50	Cada pantalón cuesta $7.75 Cada par de calcetín $15.50	**Dio un resultado conecto, pero por casualidad. En lugar de sumar 2 veces el valor de cada pantalón, debió dividirlo entre 5 (que representa los pares de calcetines). Dio como resultado un valor menor a los pantalones que a ios calcetines.**
Ada	sí	sí	aritméticamente					310 + 4 = 77.5 3p. 232.5 77.5 + 5 = 15.50	Cada pantalón vale $ 77.50 Cada par de calcetines vale $15.50	**Observemos la expresión 3p. 232.5, seguramente la alumna se refiere al costo de 3 pantalones Como podemos ver la alumna empieza a utilizar un lenguaje simbólico.**
Elv	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	70 x 3 = 280 6 x 5 = 30 280 +30 = 310	Pantalón $70.00 El par de calcetines $6.00	El resultado de ¡a primera operación es incorrecto
Agu	no	no	aritméticamente					310+ 7 = 44 310+ 5 = 32 62 + 5 = 310+ 3=62 310+12 = 25.8	Cada pantalón 44.0 Los calcetines cuestan 6.2.	Vemos que el alumno no comprendió el problema. Divide 310 entre varias cantidades. Sí multiplicamos los resultado que dan por 4 o 3 que son los pantalones que compró nos da un total de 176 y 132 respectivamente y de los 5 pares de calcetines

										serían 31, que si los sumamos a 132 nos da un total de 163, muy por debajo de los 310 de los que nos hablan en el problema. Además, el resultado de la cuarta operación es incorrecto. Obsérvese también el punto después del 2
Pat	-	-	-	*•		-	-	-	-	-
Rey	no	no	aritméticamente	-	-		-	10x5 = 50	Pantalón = $100 Calcetín = $ 2.00	
Jav	P	no	aritméticamente					Sumó 4 veces: 77.50 = 310.00, también sumo 5 veces 16 = 75 (resultado incorrecto de la suma)	Da como resultados: 77.50, sobran 4$ pero no especifica cuánto cuesta cada pantalón ni cada par de calcetines.	Obsérvese el signo de pesos después del 4
Vic	no	no	aritméticamente		-	-	-	70x4 = 280 6x5 = 30 280+30 = 310	Cada pantaión cuesta 70 pesos y cada par de calcetines cuesta 6 pesos	
Har	no	no	aritméticamente	-	-	-	*	-	Calcetines 2$ cada par Pantalones $100 cada uno	Obsérvese el signo de pesos después del 2
San	P	no	aritméticamente					310 + 4 = 77.5 77.5+4 = 19.375 310.0-77.5=232.5 232.2 + 5 = 46.45	Cada pantalón cuesta $19.375 Cada par de calcetines cuesta $46.45	
Yes	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	-	Cada pantalón cuesta $ 52.5, cada par de calcetines cuesta $20	
Kar	no	no	aritméticamente	-	*			270+40 = 310 40 + 5 = 8 9X7 = 27	Cada pantalón cuesta $ 90 Cada par de calcetines cuesta $8.00	
Gui	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	310 + 8 = 35	35	
Emi	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	65x4 = 260 10x5 = 50 260+50 = 310	$65 c/a pantalón $ 10 c/a calcetín	

El segundo problema de este tema que se les planteó fue el siguiente:

En una función de teatro, los boletos de adulto se vendieron a $ 30 y los de niño a $ 25. Si se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto y en total se recaudaron $ 4 700. ¿Cuántos de niño y cuántos de adulto se vendieron?

A continuación se muestran algunas de las respuestas que dieron los alumnos. Recordemos que éstas están ordenadas de un menor a un mayor grado de desarrollo del pensamiento (desarrollo cognitivo en términos de Piaget).

1. Una alumna coloca como datos teatro y boletos; las operaciones que hace son: 4700 -? 30 = 157 y 4700 25 = 188. Al final presenta como resultado "de niños fueron en total 157 niños, de adultos fueron 188"

0pc

tur.

157
30|4700

15 F niños
de *ado/fo?*

Al parecer la alumna tiene muy arraigado lo de "datos, operación y resultado", pero veamos que presenta cómo datos: dos palabras del problema que no le ayudan a la resolución del problema. Olvida las condiciones del problema, pero además, veamos que sólo tiene presentes 3 cantidades del problema (4700, 30 y 25) con las cuales opera. La estudiante procede de manera intuitiva sin tener plena conciencia del procedimiento empleado. Con todo esto podemos decir que la escolar ni siquiera se encuentra en las operaciones concretas si no que esta aún en el estadio preoperatorio.

2. Un alumno multiplica 200 por 25, al resultado le resta 300 dándole como resultado 4700 y da como respuesta 200 y 300

Este alumno olvida las condiciones del problema y sólo tiene presentes dos cantidades del planteamiento (25 y 4700).

3. Una alumna multiplicó incorrectamente 4700 por 30 y por 25. También divide incorrectamente 4700 entre 100. Aquí la alumna

da como resultado dos cantidades que al sumarlas nos da los 4700 que se recaudaron y se olvida de las operaciones que llevó a cabo y de las condiciones del problema.

bt **urdieran** *S3$aio* **«iño3** (

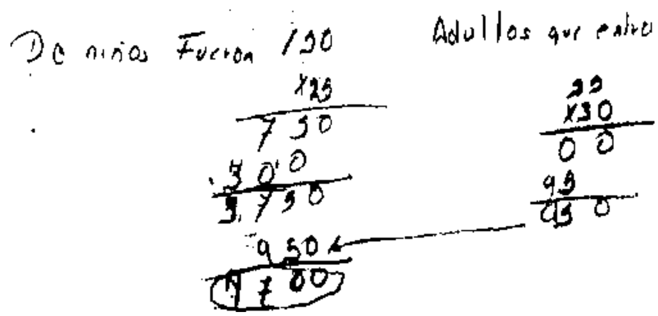
ÜfiráiOfoA 232odc ad'ilioj

En este caso la alumna tiene presentes las cuatro cantidades que se presentan en el problema, desafortunadamente al emitir su respuesta, no consideró las operaciones que hizo por que únicamente opera con dichas cantidades porque tiene que operar, pero sin tener presentes las condiciones de! problema, No razonó plenamente el procedimiento que debía seguir para resolver dicho planteamiento.

4. Un alumno contesta que se vendieron 150 boletos de niño y 35 de adulto.

n *1* n to

35 oíu //cts



Aunque la manera de proceder del alumno no le llevó a contestar satisfactoriamente el planteamiento, vemos que las operaciones que éste hace ya tienen más sentido que las anteriores, pero igual olvidó que se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto En este caso y en el siguiente, vemos que los alumnos quisieron obtener el número de boletos vendidos por tanteo,

5. Un alumno contestó que se vendieron 116 boletos de niño y 60 de adulto. Sólo cumple con una de las condiciones del problema, que es lo recaudado y olvida las demás.

¿pe UG áe

y GO de Aclu Hos

o o XVoo

2 2^2-—

6. Tres alumnos contestaron que se vendieron 100 boletos de niño y 73 de adulto. Dos de ellos no presentan ninguna operación y escriben además que sobran $10. El otro presenta las siguientes operaciones:

«5 fe «feA'o I» de-'"»

Ae [1]

/O ó

L * |

ofendí ***¿joC***

VICO

920o

Aquí cabe hacer la observación de que si multiplicamos 73 por 30 nos da un total de 2190 y no de 2200 como lo presenta este alumno, Lo más seguro es que esos "10" que los otros dos estudiantes dicen que sobran tengan alguna relación con esto,

7. Tres alumnos contestaron el problema sin presentar operaciones. Las respuestas que dieron son: 200 de adulto y 150 de niño; 66 de adulto y 100 de niño; y por último 35 de adulto y 150 de niño. Si multiplicamos dichas cantidades por el costo de los boletos tenemos que:

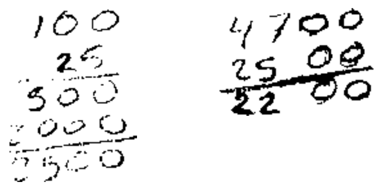
Adultos Niños	200 150	66 100	35 150
o p E R A C (O N ' E S	200 x 30 = 6000 150 x 25 = 3750 6000 + 3750	66 x 30 = 1980 100x25 =2500 1980 + 2500	35 x 30 = 1050 150 x 25 = 3750 1050 + 3750
	9750	”4480	4800'

Probablemente estos tres estudiantes consideran el costo de los boletos, pero en el segundo caso el alumno procede adecuadamente cuando multiplica 100 x 25 = 2500, pero olvida las demás condiciones del problema, En el tercer caso el alumno se aproxima a la cantidad total recaudada, pero igual, no tiene presente todas las condiciones del problema.

8. Un alumno multiplica 100 por 25 dándole como resultado 2500 y que corresponde a los 100 de boletos más de niño que se vendieron en comparación con los de adulto. Después resta 2500 a 4700 obteniendo como resultado 2200. Hasta ahí el alumno procede correctamente, pero olvidó las otras condiciones del problema. Da como respuesta que se vendieron 2200. Si

multiplicamos 2200 por 25 (que es el costo menor de los es
boletos) nos da como resultado 55000, que una cantidad mucho
mayor a los 4700 que se recaudaron.

A partir de esta respuesta vemos que los alumnos parten del costo de los boletos de niño y de los 100 boletos más



que se vendieron de niño.

9. Una alumna hizo las mismas operaciones que el alumno anterior, pero además multiplicó 100 por 22 para justificar los 2200 que le dieron al restar 2500 a 4700. No cumplió las condiciones del problema, además de que los boletos de adulto no cuestan $22

\ Se yerxVó' \ i º 1c o Y'
o\ t -V c?

M.70Ü

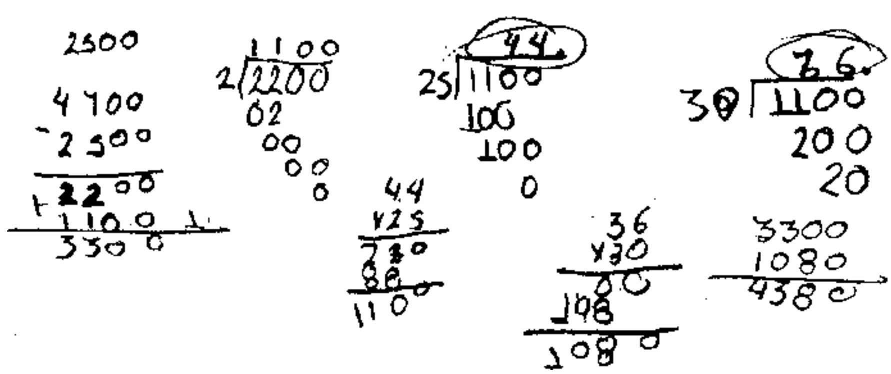
x 2 3 _ iSoo \ t? o 2 2.

6^' 2 O'6

2 0 º

2.S — ¿ 2.0^

10. Un alumno resta 2500 a 4700, al resultado lo divide entre dos obteniendo la cantidad de 1100 que divide entre 25 y 30 y le da como resultado 44 y 36, respectivamente. Después multiplica 44 x 25 — 1100 y 36 x 30 = 1080. Suma 1100 a 2200 lo que le da 3300 y luego suma 1080 a esta cantidad obteniendo la cantidad de 4380 4700. Encierra el 44 y 36 de las divisiones que hizo como si indicará asi ia respuesta al planteamiento. Al final olvidó que se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto.



11. Podríamos decir que otro alumro' procedió de la misma manera que el alumno anterior, al menos hasta la división de 1100 entre 30 y 25, aunque en la primera división el resultado es incorrecto. También olvidó que se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto.

/OD H 7cc> 30li¿c>o

c^r nbO ÍUL

¿¿L-

06 1 I /&o loo 'Tío JO b ti ó o'

y bo? oh Ciro

12. Tres alumnas fueron las que contestaron satisfactoriamente el problema[12].

1*0 belfl-et: ~ KhnO = ► ¿300 'í?- Je ni n

^0 q Q 34 06 O

100 ni . uoa

3.1 OO *Tp 1

Afganos posibles procedimientos para llegar a la solución del problema, podrían ser:

1) Por tanteo:

Calculando algunas cantidades cualquiera, pero sería muy tardado y poco efectivo.

2) Aritméticamente:

100	**4700**	1100	36.6 30)1100	44	44	40x30 = 1200
X25	-_250Q_	2)2200	200	25)1100	+36	140x25 = 3500
500	2200	02	200 20	1ÓÓ 0	80	
200		00			40	1200 + 3500 = 4700
2500		00			2)80	
		0			0	

[12] Procedieron a su resolución aritméticamente, de manera semejante como se muestra en el procedimiento aritmético que los alumnos podrían seguir para llegar a la solución del problema. Sólo que las tres hicieron las operaciones en una hoja aparte, que no escaneamos aquí porque no tenían orden y porque Ja hoja estaba arrugada. Y cuando las escaneamos nos percatamos que no se apreciaba bien dicho procedimiento y más si en cambio se veían los dobleces de las hojas. Tampoco las transcribimos porque consideramos que iba hacer repetitivo, En e] examen sólo presentan la comprobación y la respuesta a la que les llevó dicho procedimiento.

3) Algebraicamente:

$30x + 25x + 25(100) = 4700$
$55x + 2500 = 4700$
$55x = 4700 - 2500$
$55x = 4700 - 2500$
$55x = 2200$
$x = \frac{2200}{55}$
$x = 40$

Comprobación:

$30x + 25x + 25(100) = 4700$
$30(40) + 25(40) + 25(100) = 4700$
$1200 + 1000 + 2500 = 4700$

La respuesta es: se vendieron 140 boletos de niño y 40 de adulto.

El análisis de los procedimientos que llevaron a cabo los alumnos para dar solución al problema nos permite decir que:

Seis alumnos dejaron sin contestar el problema, lo que equivale a un 24 % del total de los alumnos en estudio. Dieciséis lo contestaron mal (64%). Y tres lo contestaron satisfactoriamente (12%).

Todos los alumnos resolvieron (bien o mal) el problema aritméticamente, es decir, no plantearon ninguna ecuación lineal para llegar a la resolución de dicho planteamiento. Por lo tanto, no pudimos ver —en este problema— si despejaban correctamente la incógnita y si hacían el uso correcto de las operaciones inversas,

Los alumnos no emplean el lenguaje algebraico en la resolución de problemas, a pesar de resolver varios ejercicios de ecuaciones lineales y sistema de ecuaciones lineales en el salón de clases, no lograron aplicar dichos conocimientos en un contexto diferente, lo que les hubiese permitido moverse en el campo de la formulación,

También se les dificultó tener presentes todas las condiciones del problema e identificar la relación que había entre éstas,

Cabe señalar que el resolver un problema por tanteo implica más trabajo y conlleva un porcentaje mayor de error que si se resuelve algebraicamente.

El manejar adecuadamente expresiones algebraicas permite al sujeto elaborar, poco a poco, situaciones abstractas hasta llegar a la obtención de una formula que le permita resolver un cierto tipo de problemas.

Problema 6 En una función de teatro, los boletos de adulto se vendieron a $ 30 y los de niño a S 25. Si se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto y en total se recaudaron $ 4 700. ¿Cuántos de niño y cuántos de adulto se vendieron?

Nombre del alumno	Entendió el proble-ma	Lo resolvió satisfacto-riamente	Procedió a su solución aritméticamente o algebraicamente	Planteó una ecuación lineal (cuál)	Despejo la incóg-nita	Usa correctamente las operaciones inversas	Encontró el valor de la incógnita	Qué da como resultado	Observaciones
Liz	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	2500 2640	Hace varios tanteos, da varias cantidades a los boletos y los multiplica por 30 y 25
Ala	-	*-		-	—		-		-
Cri	no	no	aritméticamente					Resultado Se vendieron 116 de niños y 60 de adultos	La alumna hace tanteos, da cantidades a los boletos, los multiplica por el costo de los boletos y suma ambos resultados. Y así sucesivamente hasta que cree obtener el resultado, donde olvida que se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto.
Mar	no	no	aritméticamente					R = Se vendieron 39 boletos de adulto y 144 boletos de adulto	En un inicio el alumno tenía presente que se vendieron 100 boletos más de niño, multiplica 100 x 25 = 2500, resta: 4700 - 2500 = 2200, luego divide: 2200 2 = 1100, 1100¿-30“39 (resultado incorrecto) y 11004-25-44, pero al final lo olvida. El error en el procedimiento de resolución se presenta en las tres últimas operaciones. Además al dividir 1100 4- 30 da como resultado 36 y no 39.
Sam	no	no	aritméticamente					Se vendieron 2380 de niños Se vendieron 2320 de adultos	La alumna hace muchas operaciones con los números que aparecen en el problema y con los resultados que obtiene, los cuales no son todos correctos.
Sel	no	no	aritméticamente	-		-	-	Se vendió la misma cantidad de boletos	-
Rol	-	-		-	-	-		—	
Ber	no	no	ari miélicamente			—	-	Boletos de niño	

								fueron 100 boletos los que se vendieron Boletos de adultos fueron 66 boletos fueron los que se vendieron	-
Moi	no	no	aritméticamente					44. 36.	El alumno resta 2500 a 4700, al resultado lo divide entre dos obteniendo la cantidad de 1100 que divide entre 25 y 30 y le da como resultado 44 y 36, respectivamente. Después multiplica 44 x 25 = 1100 y 36 x 30 = 1080. Suma 1100 a 2200 lo que le da 3300 y luego suma 1080 a esta cantidad obteniendo la cantidad de 4380 *t* 4700. Encierra el 44 y 36 de las divisiones que hizo como si indicará así la respuesta al planteamiento. Al final olvidó que se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto.
Sha		sí	aritméticamente					R = se vendieron 140 boletos niños y 40 de adultos	Hace la comprobación, pero no la forma de cómo obtuvo los resultados.
Jor	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	R = 150 niños R = 35 adultos	
Ime	-	sí	aritméticamente		-	-	-	140 boletos de niños y 40 de adultos	Hace la comprobación, pero no presenta los procedimientos que le llevaron a resolver el problema
Ada	sí	sí	aritméticamente	-		-	-	Pv = 140 boletos de niño y 40 de adulto	Borra el procedimiento que la llevo a obtener el resultado, pero todavía se ve, y deja únicamente la comprobación que hizo de sus respuestas.
Elv	-	-	-	-	-	-	-	-	*
Agu	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	150 niños 35 adultos	
Pat	no	no	aritméticamente				-	Resultado de niños fueron en total 157 niños	La alumna coloca como datos teatro y boletos, las operaciones que hace son: 4700 30 = 157 y 4700 4-25= 188

								de adultos fueron 188	-
Rey	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Jav	no	no	aritméticamente					73 adultos, 100 niños, sobran 10 $	El alumno no presenta operaciones. Al parecer, la expresión “sobran IOS”, fue dada de multiplicar 73 x 30- 2190 y 100x25 = 2500, sumo las dos cantidades resultantes y le dio 4690, para 4700.
Vic	no	no	aritméticamente				-	R = 200 de adultos R = 150 de niños	Ignoro de donde sacó este resultado. No presenta ninguna operación.
Har	no	no	aritméticamente		-	-	-	R-200y 100	El alumno multiplicó 200 x 25 - 5000 y restó a este resultado 300 para obtener 4700
San	-	—	-	-	-	—	—	-	—
Yes	no	no	aritméticamente					De niños se vendieron 100 boletos De adultos de vendieron 73 boletos Sobraron $10	La alumna no presenta operaciones. Al parecer, la expresión “sobran $10” , fue dada de multiplicar 73 x 30 - 2190 y 100 x 25 - 2500, sumo las dos cantidades resultantes y le dio 4690, y los resto a 4700
Kar	no	no	aritméticamente					Se vendieron 73 de adulto y 100 de niño haciendo un total de 173	La alumna presenta lo siguiente: 73 sena 2200, 100 seria 2500, total 2500 + 2200 - 4700, como una forma de corroborar que tiene razón, pero olvida la condición del problema. Además 73 x 30 no es igual a 2200
Gui	no	no	aritméticamente		-	-	-	Se vendieron 2200	El alumno multiplica 100 x 25 = 2500 y suma 4700 + 2500 = 2200 (resultado incorrecto)
Emi	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Como ya sabemos, la curricula de matemáticas de educación secundaria contempla el tema de sistema de ecuaciones lineales desde el segundo grado con el planteamiento y la resolución de problemas que conduzcan a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución por el método de sustitución. Nos percatamos con gran desilusión, tanto en la resolución de este ejercicio y estos dos problemas como en el cuaderno de apuntes de los alumnos, que el tema de sistema de ecuaciones no fue presentado a los alumnos mediante el-planteamiento y la resolución de problemas aunque así lo marque el programa y su enfoque y que los estudiantes:

a) No se han apropiado de las nociones de ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica.

b) No han aprendido los métodos de resolución de ecuaciones como son: el método de igualación, de suma y resta y el método gráfico.

c) No comprenden el principio de sustitución, la exploración y la construcción de tablas.

d) No saben resolver problemas algebraicamente.

e) No plantearon una ecuación lineal, lo que no nos permitió darnos cuenta si despejaban correctamente la incógnita y si hacían el uso correcto de ias operaciones inversas.

Recordemos que la importancia que tiene relacionar este tema[13] con el planteamiento y la resolución de problemas radica en que por medio de esto a los alumnos les sea más fácil percatarse de que en algunos problemas no hay sólo una, sino varias ecuaciones (condiciones) que tienen que satisfacer simultáneamente.

Los estudiantes aún no logran hacer abstracciones y generalizaciones todavía se mueven en el plano concreto. No son capaces de cumplir todas las condiciones de un problema porque sólo ven relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones. Lo que tes ocasionó grandes dificultades al enfrentarse a relaciones de segundo orden y a relaciones existentes entre relaciones (características todas éstas de un pensador concreto).

Cabe mencionar que las diferentes respuestas que dieron los alumnos están en orden ascendente y obedecen a estadios cada vez más avanzados en el escolar. Recordemos que un estadio es un mecanismo de regulación encargado de mantener un cierto estado de equilibrio en los intercambios funcionales que se producen entre la persona y su medio físico y social.

También podemos destacar que el orden en que se presentan dichas respuestas va de una equilibración menor a otra más progresiva. Dicho con otras palabras: el orden de estas respuestas nos permite ver un desarrollo cognitivo más completo e integrador y con mayor flexibilidad.

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En segundo año de educación secundaria los alumnos tuvieron la oportunidad de hacer operaciones con monomios y polinomios. En tercer grado el plan de estudios contempla operaciones con expresiones algebraicas y productos notables y factorización.

En dicho plan se señala la importancia de que el alumno aprenda hacer la extracción de un factor común,

[13] Y todos ios demás temas del Plan de Estudios de Matemáticas y las demás asignaturas conforme al enfoque construtivista.

así como la obtención de productos notables y sus aplicaciones al cálculo numérico y la factorización de polinomios de segundo grado.

Los productos notables que se estudiaran son:

a) $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

b) $(x-a)^2 - x^2 - 2ax + a^2$

c) $(x + a)(x-a) \sim x^2 - a^2$

d) $(x + a)(x + bj - x^2 + (a + b)x + ab$

También se recomienda que el cálculo de productos notables y la factorización de polinomios no se traten por separados, el propósito es que los alumnos comprendan que se trata de procesos inversos y utilicen desde el inicio los productos notables para factorizar polinomios.[14]

El objetivo es observar si los alumnos:

a) Saben hacer operaciones con polinomios.

b) Han aprendido a extraer el factor común de un polinomio.

c) Cuentan con la noción de productos notables y factorización.

d) Logran la obtención de productos notables.

e) Aplican los productos notables a! cálculo numérico y los utilizan en la resolución de problemas.

f) Saben hacer la factorización de polinomios de segundo grado.

g) Conocen y aplican la regla o fórmula de cada uno de los productos notables o llevan a cabo el algoritmo.

h) Realizan correctamente la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis.

i) Efectúan correctamente la simplificación de términos.

Para el tema de productos notables y factorización se les pidió a los alumnos que resolvieran un problema y seis ejercicios.

El primer ejercicio de este tema que se les plateó fue:

[14] Cfr. **SEP,** 1995. p. 199

Realiza la siguiente operación y simplifica el resultado: $2x^2 + (3x+ 1)^2 =$

El resultado es $11x^2 + 6x + 1$

1. Hubo quien sólo igualó la expresión a 2

2. Alguien la igualó a $10x^3$

3. Una alumna da como resultado $4x^2 + (9x3)$

4. Hubo quien eliminó el paréntesis, después sustituyó al $2x^2$ por 8, al 3x por 3 y al l^2 por 4. Posteriormente sumó estos números. Coloca el dividendo tres a la suma y presenta como resultado x^2 igual a 5

VH r 15
3

5. Alguien al parecer obtuvo el cuadrado de los números que se le dieron (2, 3 y 1); no desarrolla el binomio y al final da como resultado 14x = 7, lo cuál seria correcto si x es igual a

6. Un alumno sumó los coeficientes sin considerar la x. Da como resultado $6^2 = 3^2$ lo cuál es incorrecto.

$$2x^2 + (3x + l)^1 = 6 - i$$

Al

7. Otra alumna suma $2x^2 + 3x + 1$ dando como resultado $6x^2$

eliminando el paréntesis no y el exponente 2 del binomio, aunque hizo bien la suma.

2x« + (3x + lyñts *II A*^{3,} *4* 3X* +■ *}*

2V ±

3A V I *3** -M

V+ *3A* f_3_A

+ t3x ī Ī

43A *VI ¿A**

f3* -V I

//x$^{£}$ V3*

Al hacer el análisis del ejercicio nos percatamos que:

Once alumnos dejaron sin contestar el ejercicio, lo que equivale a un 44% del total. Trece (un 52%) lo contestó mal y únicamente una alumna (4% del total) lo contestó parcialmente correcto.

Salvo la alumna de la que hablamos en el inciso catorce, todos los demás alumnos en estudio no realizaron correctamente la jerarquía de las operaciones, el uso del paréntesis y las leyes de los exponentes. Esto nos deja claro que los alumnos no se han apropiado de estos conocimientos, Tampoco cuentan con la noción de productos notables y factorización. Nadie desarrolló correctamente la expresión algebraica $(3x +1)^2$ ni mucho menos manejan eficazmente la regla $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ninguno llevó a cabo correctamente la simplificación de términos.

8. Alguien cambia a la x por el exponente 2 y se olvida de los exponentes y de desarrollar el binomio al cuadrado.

i v «t u - m

9. Una alumna sustituyó el binomio al cuadrado por $6x^2$ en lugar de desarrollarlo. Además al sumarlo al *2.*x^2 presenta como resultado $8x^4$ lo cuál es incorrecto y lo iguala a 4x¿ y a $2x_f$ al parecer fue obteniendo la mitad tanto del coeficiente como del exponente.

2x’ + (3x+l)’ = 8x'1' Hx1 2*

10. Alguien duplicó el 2 y el 3 y tampoco desarrolla el binomio al cuadrado.

11. Un alumno eliminó el paréntesis y el 1, además pasa el 2 del binomio coeficiente al cuadrado a uno solo de sus 3x). Suma $2x^2 + 3x^2$ y da términos (al como resultado $5x^2$

12. Un alumno lo igualó a $5x^4 + 1$, al parecer sumó exponentes las y los sin desarrollar el binomio al cuadrado.

13. Otro más sumó por separado los términos que tenían *x* como si fueran términos semejantes y coloca a la *x* el exponente 2. Tampoco desarrolló el binomio al cuadrado.

Sxbr

14. Únicamente una alumna desarrolló el binomio al cuadrado, aunque se equivocó al hacer la suma de los términos semejantes y al sumarlo al $2x^2$; indica la suma de toda la expresión pero

Ejercicio 8a Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado a) $2x^2 + (3x + 1)^2$ -

Nombre del alumno	Obtuvo ni res Hitado correcto	Realizó correcta men te las operaciones	Cnenia con la noción de productos notables y factorización	Desarrolló correctamente la expresión algebraica (3x- ¡>	Reaiiza el algoritmo o maneja eficazmente la regla *ia* * b)ː = + 2ab - bː	Realizó correctamente' la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis	Simplificó el resultado	Qué da como resultado	Observaciones
Liz	no	no	no	no. sólo pasa el exponente dos como exponento de la x		no		5x" + ¡	Seguramente, el exponento 2 que afectaba a la expresión 3x + 1 lo tomó como exponente de la x. sin elevar al cuadrado toda la expresión, y de ahí obtuvo 5x"
Ala	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Cri	no	no	no	no. sólo pasa el exponente dos como exponente del I				x- = 5	El exponente 2 que afectaba a la expresión 3x т 1 lo paso como exponente del l. sin elevar al cuadrado toda la expresión
Mar	no	no	no	no	-	-	-	$5x^2$ + l	
Sam	-	-	-	-	-	-	-		
Sel	no	no	no	no. sólo obtuvo el cuadrado del 3 y el I. y se olvidó de lax, y de la regla $(a -i- b)^2 = a^2$ -i- 2ab + b				7	Las operaciones que escribe son: 4x ± ¡ (a¿- 1) = I4x = ? i
Rol		-	-	-	-	-	-	-	
Ber	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Moi	no	no	no	no. solo posa el exponente dos como exponente de la x				2x:+3x²=?x²	Sólo pasa el exponente dos como exponento de la x y se olvida completamente del uno, y de la regla $(a + b)^2 = a^2$ 4- 2ab + b^3
Sha		-	-		-	-	-	-	-
Jor	-	-	-	-	-	-	-	-	-
[me	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Ada	pe	no	no	se equivoca al sumar los términos	Lo realiza	no. al resultado que obtuvo de elevar el binomio al cuadrado suma $2x^z + 3x + 1$	si. pero incorrecta mente	11 $x^2 + 3x + 1$	Primero procedió a desarrollar el binomio al cuadrado (pero se equivocó al hacer la suma). Posteriormente suma este resultado a $2x^2$ 3x + 1. lo que nos muestra que no hizo el uso correcto de los paréntesis
Elv	no	no	no					$8x^4$	Escribe, en frente de operación. $8x^4 = 4.x^2 = 2x$ (es decir, va sacando la mitad, tanta del exponente como del coeficiente); por otro lado escribe: $6x^2 + 2x^3$ ~ 8x" y da como resultado $8x^4$
Agil	no	no	no	DO	-	no	-	$4x^2 + 6x$ - l	Seguramente, sólo multiplicó por 2 a 2x:. 3x. 1, sin considerar los

									paréntesis ni el ex ponente 2
Plit	nn	no	no	no	-	no	-	$6x^2$	Suma $2x^2$ +• 3x + ! = $6x^2$
Rey	no	no	ncf	no		no		$4.x^2 + (9x\ 3)$	Suma $2x^z + (3x + 1)^2$ 4x.+ 6 2 $6x^2 + (9x\ 3)$ Aquí nos podemos percatar que no tiene el concepto de términos semejantes, simplificación de ténninos, factorización, un número al cuadrado, binomio al cuadrado, ni el uso adecuado de ios paréntesis
Jav	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Vic	no	no	no	no		no		14	Las operaciones que hace son: $(2^2) + ((3)^{2} + I) =$]4, 4 + 9 +], olvidó por completo la x. Tiene el concepto de un número al cuadrado, pero no tiene el concepto de ténninos semejantes, simplificación de ténninos, factorización, un número a! cuadrado, binomio a! cuadrado, ni el uso adecuado de los paréntesis
Har	no	no	no	no		no		6^2	Las operaciones que hace son: $2x^2 + 3x + I = ó^2$, es decir, no tiene el concepto de ténninos semejantes, simplificación de ténninos, factorización, un número al cuadrado, binomio a! cuadrado, ni el uso adecuado ríe los paréntesis
San	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Yes	-	-	-	-	-	*	-	*	-
Kar	no	no	no	no		no		lOx^1	Sólo escribe $10.x^1$ como resultado. No tiene el concepto de ténninos semejantes, simplificación de términos, factorización, un número al cuadrado, binomio al cuadrado, ni el uso adecuado de los paréntesis
Gui	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Emi	no	no	no	no		no		2	Sólo escribe 2 como resultado. No tiene el concepto de términos semejantes, simplificación de ténninos, factorización, un número al cuadrado, binomio al cuadrado, ni el uso adecuado de los paréntesis

El segundo ejercicio es:

Realiza la siguiente operación y simplifica el resultado: $(5x - 3)^2 - (2x + 1)(2x-l) =$

El resultado es $21x^2 - 30x + 8$

Estas son algunas respuestas y procedimientos que dan los alumnos:

1. Algunos alumnos dieron como resultado un número natural/ un monomio ' o un binomio, sin presentar ninguna operación o procedimiento. Los resultados que dieron son: 6, 22x, 2x, $2x^2$ y $9x^4 + 5$

2. .Un alumno creyó desarrollar el binomio al cuadrado escribiendo el cuadrado de cada uno de los términos del binomio y olvidando el exponente 2 de la x. También cambia los paréntesis de la multiplicación de binomios con un término común pon el signo de la multiplicación. Por último hace—incorrectamente— ' la simplificación de términos.

$(5x - 3)^2 - (2x$ t $1) (2x -1) = 2$ *o** - 9

Cbx’-^ -(ixt-l)

25_x-q -9UH XZx-1

3. Un alumno eliminó los paréntesis. Quitó el exponente 2 a la x. Colocó el exponente 2 al 3. Y finalmente hizo —incorrectamente— la simplificación de términos.

4. Una alumna eliminó por completo las x. Además, al parecer, en lugar de desarrollar el binomio al cuadrado únicamente multiplicó 5 por 3 y elevó al cuadrado el resultado. Con los otros dos binomios restantes suma, en el primero, 2 más 1 y el resultado lo eleva al cuadrado; y en el segundo, escribe el 2 elevado a la segunda potencia. Después indica la resta de estos tres números al cuadrado y procede a obtener dichos cuadrados y a restarlos, pero lo hace erróneamente, ya que 15 al cuadrado es igual a 225. Además

de tener este resultado mal, al restar lo hace erróneamente, ya que si restamos 825 menos 9 es igual a 816 menos 4 es igual a 812

855-7 - 8?, v

a Zl

5. Una alumna eleva tanto el 5x como el 3 al cuadrado y al parecer suma el 2 y el 1 de los siguientes binomios y todo indica que procedió a restar 25 menos 9 y tres menos tres y por último restó ambos resultados (16- 0). Al final igualó 16 a 4, lo cuál es incorrecto.

6. Otra alumna elimina los paréntesis. Luego obtiene el cuadrado de 5x, 3, 2x, 1, 2x y 1 ($25x^2$, 9 *y* 4x, 2, 4x y 2; aunque estos cuatro últimos son incorrectos). Después escribe 46x" ° + 2x" ° = $\frac{IS4}{o}$, probablemente el 46 lo obtuvo de sumar todos los coeficientes, el 184 de multiplicar 46 por 4, pero no logramos comprender de dónde obtuvo la x^2 del 46 y mucho menos el $2x^2$ y el 8 . Al final da como resultado $x^2 = 23$ (el 23 lo obtuvo de dividir 184 entre 8).

$\boxed{x^2 = 23}$ $\overline{\quad}$ 8

7. .Un alumno da como resultado cero y presenta el siguiente procedimiento.

?rV-3xM

8. Una alumna olvida que elevar un binomio al cuadrado significa multiplicarlo por si mismo. Y que el resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio cuadrado perfecto, cuyos términos son: a) El cuadrado del primer término del binomio. b) El doble producto del primer término del binomio por el segundo, c) El cuadrado del segundo término del binomio. Únicamente eleva los dos términos del binomio al cuadrado. Luego indica una resta con el resultado que obtuvo y con el segundo binomio que se le dio: (25x -9)-(2x + 1), pero procede a hacer una multiplicación de manera incorrecta (sólo multiplica 25x por 2x y -9 por 1). Luego multiplica su resultado por el tercer binomio que se le dio con los mismos errores anteriores, es decir, multiplicó $50x^2$ por 2x y -9 por -1. Todo esto lo iguala a $100x^2 + 9$ y finalmente da como resultado 109

> hl) q) (i 5- IOO)? V*

- 10a

9. Sólo una alumna obtuvo el resultado correcto. Desarrolló el binomio al cuadrado y obtuvo la multiplicación de binomios con un término común.

(5x - 3)² - (2x + l)(2x-l) =

5* - 3
5A * 3

(¿A

2 í) - 30 x 4-

$\boxed{21x^2 - 30x + 8}$

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2x-1 \\ \hline 4x^2+\cancel{2x} \\ -\cancel{2x}-1 \\ \hline 4x^2-1 \end{array}$$

25A ² **- 30 A +-** 9
—_² - /

¿I x ¹ - **3ÓA** 2

Doce alumnos dejaron sin contestar el ejercicio lo que equivale a un 48% del total de los alumnos en estudio. Otros doce lo contestaron mal y sólo una alumna lo contestó correctamente.

El análisis de este ejercicio nos permitió ver que a excepción de la alumna que obtuvo el resultado correcto, todos los demás estudiantes no desarrollaron correctamente el binomio al cuadrado: $(5x - 3)^2$, ni el producto de dos binomios con un término común: (2x + 1) (2x -1). Es decir, no cuentan con ia noción de productos notables y factorización.

La alumna de la que hablamos en el inciso 9, desarrolla el binomio al cuadrado realizando el algoritmo. Esto nos demuestra que la adolescente no maneja eficazmente la regla $(a + b)(a - b) = a^2 - b^1$. En este ejercicio, a diferencia del anterior, la colegiala llevó a cabo correctamente la simplificación de términos.

Ejercicio VIII b) Realiza ías siguientes operaciones y simplifica el resultado: $(5x — 3)^2 - (2x +1) (2x —1) =$

Noin bre del alumno	Obtuvo el resultado correcto	Realizó correctamente las operaciones	Cuenia con la noción de producios notables y factorización	Desarrolló correctamente la expresión algebraica $(5x - 3)^2$	Desarrolló correctamente el producto de dos binomios eun un término común	Al obtener el producto de 2x f l por 2x - 1 el alumno realiza el algoritmo o maneja eficazmente la regla $(a t b)(a - b) = a^! - b^1$	Realizó correctamente la jerarquía de las operaciones y ei uso del paréntesis	Simplificó ei resultado	Observaciones
Liz	- no	no	no	no	no	-	**no**	-	Sólo da como resultado $9x^4+ 5$
Ala		-	-	-	-	•	-	-	-
Cri	no	no	no	no	no		no		Escribe: $(5x - 3)^2 - (2x + 1) (2x -1) = 5x - 3^2 - 2x + l 2x - l = 25x^2 + 9 + 4x + 2 2x -1-2 46x^2+ 2x^2=$ 184/8 $x^2 = 23$
Mar	no	no	no	no	no	-	no	-	Escribe: $25x -9 -2x + 1 x 2x -1 = 20x - 9$
Sam	-	«•	-	-	-		-	*	-
Sel	no	no	no	no	no	-	-	-	Escribe: $(25x -9) (3 - 3) - 16-0= 16 = 4$
Rol	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Ber	-	-	-	-	-	-		-	-
Mol	no	no	no	no	no	-	-	-	Escribe: $2x^2 + 3x^2 + x^2 = 3x^2 - 3x^2 = 0$
Sha	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Jor	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Ime		-	-	-		-	-	-	-
Ada	sí	sí	sí	sí	sí	Maneja eficazmente la regla	**si**	**si**	Resolvió correctamente la operación y todo lo maneja muy bien, aunque hace el algoritmo de la multiplicación del binomio en lugar de aplicar directamente la regla.
Elv	no	no	no	no	no	-	-	-	Escribe: $(25x -9) - (2x + 1) = (50x^2 -9) (2x - 1)=$ $!00x^2 + 9 = 109$
Agu				-	-	-	-	-	-
Pat	-	-	-	-	-	-	-		Escribe: $5x - 3x = 2x$, $2x + 1 = 3x$, luego lo tacha y da como resultado 2x
Rey	-	-	-	-	-	•	-	-	Sólo da como resultado 22x
Jav	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Vic	no	no	no	no	no	-	-	-	Escribe; $(15)^2-(3)^2 - (2)^2 = 825 -9 -4 = 821$
Har	no	no	no	no	no	-	-	-	Escribe: $5x -3^2 -2x + 1 + 2x - 1 = 2x^2 + 1 x + 1 x = 5x = Ix$
San	*	-	-	-	-	-	-	-	-
Yes	-	-	*	-	-	-	-	-	-
Kar	-	-		-	-	-	-	-	Sólo da como resultado $2x^2$
Gui	-		-	-	-	-	-	-	-
Emi	-	__	-	-	-	-	-	-	Sólo da como resultado 6

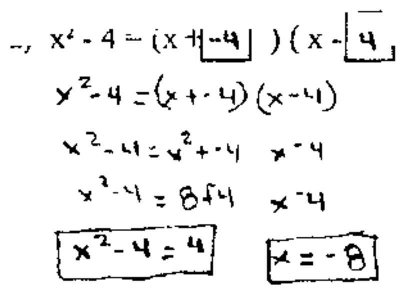
El tercer ejercicio de este tema es:

Completar de manera que se cumpla la identidad x^2 - 4 - (x +   ) (x -   )

La identidad se cumple colocando el número dos en ambos espacios.

Algunas de las respuestas que dieron los estudiantes son:

1. Una alumna coloca -4 *y 4* respectivamente en los espacios en blanco. Después quita los paréntesis y deja los binomios por separado. Además a uno de ellos le deja ambos signos (+ y -) , Eleva la *x* a la segunda potencia; luego sustituye a la x^2 por 8. Por último hace dos igualaciones: *x^2~4 = 4 y* x=~8



2. Ocho alumnos llenaron los espacios con números naturales: el 6 y 2; el 8 y 2; el 8 y 4; el 4 y 8; el 2 y 1; el 2 y 0; el 4 y 4 y el 2 y 4

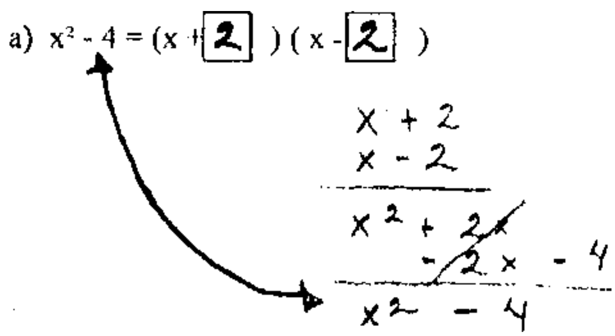
3. Un alumno escribió el número dos en ambos espacios, pero además A'^{2} 4 escribe — = x + *x* , y —-2 + 2, lo cuál es incorrecto .

4. Una alumna escribe el número 2 en ambos espacios y escribe nuevamente la expresión x^2 - 4 que es parte de la identidad.

$$X^2 - 4 = (x + í) (x - -2)$$

5. Cinco alumnos llenaron ambos espacios vacíos con el número 2

6. Una alumna escribe el número dos en ambos espacios, pero además hace la comprobación muítiplicando ros dos binomios.



Siete alumnos dejaron sin contestar el ejercicio (un 28%). Ocho lo contestaron mal (un 32%). Tres lo contestaron parcialmente correcto (un 12%). Y 7 dieron números que cumplen la identidad.

La mayoría de los alumnos que contestaron el ejercicio no presentan operaciones lo que nos dificulta saber como procedieron para obtener el resultado. Algunos alumnos escribieron el número dos en ambos espacios haciendo verdadera la identidad pero no sabemos si lo hicieron de manera correcta o por casualidad o coincidencia, ya que también existe la posibilidad de que así haya sido. Recordemos que en el ejercicio anterior la mayoría de los estudiantes no desarrollaron correctamente la expresión algebraica $(5x - 3)^2$, ni la multiplicación de los binomios 2x + 1 por 2x -1, lo que nos hace pensar que pudo suceder lo mismo en este ejercicio y que no saben que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Todo lo anterior nos indica que no cuentan con la noción de productos notables y factorización.

x^2-4 = (x + ☐)(X- ☐) Completar de manera que se cumpla la identidad

Nombre del alumno	Completó correctamente la identidad	Cuenta con la noción de identidad	Realiza el algoritmo o maneja correctamente la regla a^2 - ir = (a+b) (a-b)	Supo lo que indicaban los paréntesis	Observaciones
Liz	sí	sí	Maneja correctamente la regla	sí	
Ala	-	-		-	-
Cri	No	no	-	no	Escribe dos resultados incorrectos en donde nos podemos dar cuenta que no cuenta con la noción de identidad: x^3 - 4 = 4. x = -8
Mar	sí	no		no	Completa correctamente la identidad, pero lo hace procediendo de manera incorrecta. No sabe que es una identidad. Escribe $\frac{X^2}{} = X + X \quad \frac{4}{} = 2 + 2$
Sam	no	no	-	no	Sólo da como resultado 8 y 2
Sel	sí	sí	no se sabe	no lo se	Podría escribir que maneja correctamente la regla, y que sabe que indican los paréntesis, pero también existe la posibilidad que haya completado la identidad por casualidad o coincidencia.
Rol	-	-	-	-	-
Ber	-	-	-	-	-
Moi	no	no	-	no	Sólo da como resultado 8 y 4
Sha	-	-	-	-	-
JOT	sí	-	-	-	-
Ime	sí	no	*	no	Completa correctamente la identidad (por casualidad o coincidencia), pero no sabe que es una identidad. Escribe: x+z x + 2 x = 4
Ada	sí	sí	Realiza el algoritmo	sí	
Elv	no	no	-	no	Sólo da como resultado 4 y 8
Agu	no	no	-	no	Sólo da como resultado 2 y 1
Pat	-	-	*	-	-
Rey	sí	si	no se sabe	no lo se	En ejercicios anteriores ha dejado ver que no sabe lo que es una identidad Podría escribir que maneja correctamente la regla, y que sabe que indican los paréntesis, pero también existe la posibilidad que haya completado la identidad correctamente por casualidad o coincidencia.
Jav	no	no	-	no	Sólo da como resultado 4 y 4
Víc	sí	sí	no se sabe	no lo se	Podría escribir que maneja'correctamente la regla, y que sabe que indican los paréntesis, pero también existe la posibilidad que haya completado la identidad correctamente por casualidad o
Har	sí	no	no se sabe	no lo se	En ejercicios anteriores ha dejado ver que no sabe lo que es una identidad. Podría escribir que maneja correctamente la regla, y que sabe que indican los paréntesis, pero también existe la posibilidad que haya completado la identidad correctamente por casualidad o coincidencia.
San	no	no	-	no	Sólo da como resultado 6 y 2
Yes	-	-	-	-	-
Kar	no	no	-	no	Sólo da como resultado 2 y 7
Gui		-		•	-

Emi	-	-	1	1

Completar de manera que se cumpla la identidad

Cuarto
ejercicio:

Completar de manera que se cumpla la identidad (3a + $\quad$ ^{2}= r $\quad$ + b^2

Las expresiones que completan la identidad son *b, 9a²* y *6ab* respectivamente.

Algunas respuestas de los estudiantes son:

1. Tres alumnos escriben números naturales en los espacios en blanco: 9, 3 y 15; 1, 1 y 1 o 6, 2 y 3

2. Un alumno llena los espacios en blanco con x^2, 4.5a y x^2. Al parecer el 4.5a lo obtuvo de dividir *9a* entre 2 y la x^2 de dividir entre 2. Lo que no nos explicamos es como obtuvo el *9a* y la x[12] [13]

b) (3a + zp'ta+sa$^{+b!}$

5. Una alumna trata de desarrollar el binomio al cuadrado, pero se equivoca al multiplicar 3a por 3a y al hacer la suma de *3ab* más *3ab*

$$(3a + \boxed{x})^2 = \boxed{3a^2} + \boxed{x^2}$$
$$3a + x^2 = 3a^2 + x^2 + $$
$$b + x^2 + 3a^2 = 3a + x^2$$
$$\boxed{3a + x^2 = 3abx^2}$$

12 Una alumna coloca en los espacios en blanco una *x, 3a²* y x^2 respectivamente. Además cambia los elementos de la igualdad de un lado a otro y finalmente escribe como resultado $3a + x^2 = 3abx^2$

13 Seis alumnos emplean las literales *a y b* para llenar los espacios en blanco, ejemplo: 2b, 3a y 3b; 2b, 6a y 4b; b, 1 y 2; a, b y b; b, 3 y a; o bien 4b, 2a y 3b

$<^{3a\ +}CS\ )^{2=}ra\ ^{+}[s\#B^{+b2}$ 3 o + *b*

3 q 4- 1> £. q ^{3} 4

+ 3<i b »• b

---

k + 3_{a}b f b ^{1}

Nadie completó correctamente la identidad. Trece alumnos lo dejaron sin contestar lo que equivale a un 52% del total de los alumnos en estudio. Nueve lo contestaron mal (un 36%). Y tres lo contestaron parcialmente correctamente.

Esto nos muestra nuevamente que los alumnos no cuentan con la noción de productos notables y factorización y que por lo tanto no manejan correctamente la regla $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Con este ejercicio vemos que los estudiantes están aún en la etapa de lo concreto, de lo presente, de lo real, del aquí y ahora. Y que aún tiene dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas.

Quinto ejercicio:

Completar de manera que se cumpla la identidad (3a + + b^2

Nombre del alumno	Completó correctamente la identidad	Cuenta con la noción de un binomio, del tipo $(a + b)^2$, elevado al cuadrado	Realiza el algoritmo o maneja correctamente la regla $(a\text{-}b)^2 = a^2+2ab+b^2$	Observaciones
LÍZ	no	no	-	Sólo da corno resultados b. 3 y a. Talvez sepa que b x b = b^2, y por eso dio como primer resultado l
Ala	-	-	-	-
Cri	no	no	-	Xo ha aprendido el concepto de identidad. Da como resultado 3a - x^z ~ $3abx^z$
Mar	no	no	-	Da como resultados: x^z, 4.5^3 y x^z, además escribe 91'2 =4.5^a, x''/2 =x^z Aunque no son las operaci que debió haber hecho, la primera identidad o igualdad es correcta, pero la segunda no
Sam	no	no	-	Sólo da como resultados: 9, 3 y 1 5
Sel	no	no	-	Sólo da corno resultados: b. 1 y 2 Quizá sepa que b x b = b^2, y por eso dio como primer resultado la
Rol	-	-	-	
Ber		-	-	-
Moí	-	-	-	-
Sha		-	-	-
Jor	no	no	-	Sólo da como resultados: 2b, 3a y 3b
Ime		-	-	-
Ada	pe	no		En lugar de multiplicar suma 2 veces 3a; da corno resultados; b, $6ab^2$ y 3ab; también, se equi cuando suma ténninos semejantes del mismo signo, por ejemplo —como es el caso— al sumar 3 3ab da como resultado 3ab; no le sucede lo mismo cuando los términos semejantes son de si diferentes, pues cancela uno con otro. El mismo error lo comete en el ejercicio 8 inciso a, no pa, mismo con el ejercicio 8 inciso b. donde los términos tienen signos diferentes
Elv	-	•w	-	-
Agu		-	-	-
Pat	-	-	-	-
Rey	no	no	-	Sólo da como resultados: 1. 1 y 1
Jav	no	no	-	Unicamente da como resultados: 6. 2 y 3
Víc	no	no	-	Sólo da como resultados: a. b y b
Har	no	no		Unicamente da como resultados: 2b, 6a y 4b
San	-	-	-	-
Yes		-	-	-
Kar	no	no	-	Sólo da como resultados: 4 b, 2a y 3b
Gui	-	-	-	-
Emi		-	-	-

Completar de manera que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab$

Si sumamos “b^2" obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

1. Una alumna no considera las literales a y *b*. Escribe $(1)^2 = 1$, $2\ (1)\ (1) = 2$

u)^1-. I - X

2. Hubo quienes dieron como respuesta dos términos perdidos como *a* y b; $2^2 + 2ab$; $a^2 + 2\ (2)\ (4)$; o bien $3a^2 + ab$

3. Una alumna da como términos perdidos $a^2 + 2ab$. Después escribe $ab = 2a^2$, $2a^2 - 2a^2$, $0 = 0$

4. Dos alumnos dieron un sólo término perdido: $2a^{<}b$ o bien $2a^3b$

5. Un alumno escribe "b" como término perdido.

6. Solamente una alumna escribe "b^2 y logra completar el trinomio cuadrado perfecto.

Quince estudiantes dejaron sin contestar el ejercicio, lo que equivale a un 60% del total de los alumnos en estudio. Ocho lo contestaron mal (un 32%). Uno lo contesta parcialmente bien y una alumna da como resultado el término que completa el trinomio cuadrado perfecto.

Lo anterior nos deja al descubierto que sólo una alumna encontró el término perdido. Los demás no saben lo que es un trinomio cuadrado perfecto y por lo tanto no pudieron identificar de qué trinomio cuadrado perfecta se trataba.

La mayoría de los estudiantes na exigieron una explicación de las posibilidades fuera de los datos expuestos. Su pensamiento se ocupa de lo real, de lo concreto, de la diferenciación de la forma y el contenido.

Quinto ejercicio:

Ejercicio X a) Completar de manera que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab$*

Nombre del alumno	Dio el término que faltaba para completar el trinomio cuadrado perfecto	Sabe lo que es un trinomio cuadrado perfecto	Identificó de qué trinomio cuadrado perfecto se trataba	Observaciones
Liz	no	no	no -	Sólo da como resultado $2a^3b$
Ala	-	-	-	-
Cri	no	no	no	Escribe: $ab = 2a^2, 2a^2 - 2a^3, 0 = 0$; no cuenta con la noción e igualdad
Mar	no	no	no	Sólo da como resultado $2a^3b$
Sam	-	-	-	-
Sel	no	no	no	Escribe: $a^2 + 2\ (2)\ (4)$
Rol			-	-
Ber	-	-	-	-
Moi	pe	-	-	Sólo escribe b
Sha		-	-	-
Jor	-	-		-
Ime	-			-
Ada	sí	si	sí	
Elv	no	no	no	Sólo escribe: $(l)^2 = 1,\ 2\ (1)\ (1) = 2$
Agu	no	no	no	Sólo escribe: $R = 3a^2 + ab$
Pat	-	-	-	-
Rey	-	-		-
Jav	no	-	-	Sólo escribe: a y b
Vic	-	*	-	-
Har	no	no	no	Sólo escribe: $2^2 + 2ab$
San	-	-	-	-
Yes	-	-	-	-
Kar	-	-	*	-
Gui	-	-	-	•*
Emi	-	-	-	-

Sexto y último ejercicio del tema de productos notables y factorización.

Completar de manera que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto: $25x^2 - 40y$

Si sumamos la expresión 16— obtenemos un trinomio cuadrado perfecto, *xz*

1. Dos alumnos únicamente volvieron a escribir $25x^2$ - *40y sin* hacer ninguna otra operación o anotación.

2. Un alumno sólo escribió 835

3. Alguien eliminó las literales *x e* y. Además escribe 1375-1335 y lo iguala a cero.

Cis] -
i jh,-
o xO

4. Una alumna cambió al 25 por 50 y a la y por *x.* Además igualó el binomio a 102

5. Alguien escribió $50x^2 - 40y = 10x^2y$

6. Una alumna sustituyó a la x por 5 y a la y por 8 y no hizo ninguna otra operación.

Cabe mencionar que éste fue el ejercicio que más se les dificultó resolver a los alumnos y a nosotros, en un principio, también. En un primer momento pensamos que se trataba de un error de dedo que habían pasado por alto todos los que colaboraron en la elaboración del Libro para el maestro de matemáticas de Educación secundaria, editado por la SEP. Según nosotras ningún término completaba el trinomio cuadrado perfecto. Únicamente se podría completar si a la expresión dada en un principio ($25x^2$~ 40y) la cambiáramos por $25x^2$- 40xy. En este caso, el término que completa el trinomio cuadrado perfecto es $16y^2$ Después consideramos las características de un trinomio cuadrado perfecto: tiene dos términos cuadrados y otro que es el doble producto de las raíces'de estos dos. Entonces, nos dimos a la tarea de buscar que término multiplicado por la raíz cuadrada de $25x^2$ nos daba como resultado 40y, que es el doble producto de las raíces del trinomio cuadrado perfecto que buscamos. Las operaciones que efectuamos fueron:

2(^25A²)(Vl) = 40 y 2(5.v)(V?) = 40_y

(iO.vXVT) = 40_y

En este caso, llamamos al término que buscamos pero recordemos que lo podemos representar con cualquier otra literal.

10A

■ft =4 —
-V

t = (4—)²
x

Al tener presentes las características de lo que es un trinomio cuadrado perfecto pudimos encontrar el término que nos faltaba en este ejercicio y descartamos que no se tratara de un error de dedo. Entonces nos pareció un buen ejercicio para aplicárselo a los estudiantes.

Ninguno de los alumnos contestó correctamente el ejercicio. Dieciocho lo dejaron sin contestar (un 72% del total). Siete intentaron contestarlo, pero no lo hicieron satisfactoriamente.

Ejercicio X b) Completar de manera que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto: $25x^2 - 40y$

Nombre del alumno	Dio el término que faltaba para completar el trinomio cuadrado perfecto	Sabe lo que es un trinomio cuadrado perfecto	Identificó de que trinomio cuadrado perfecto se trataba	Observaciones
Liz	no	no	-	Sólo da como resultado: 25x? - 40y
Ala	-	-	-	-
Cri	-	-	-	-
Mar	no	no	-	Sólo da como resultado: $25x^2 - 40y$
Sam	-	-	-	-
Sel	no	no	no	Sólo escribe: $25\ (5)^2 - 40\ (8)$
Rol	■»	-	-	-
Ber	-		-	-
Moi	-	-	-	-
Sha	-	-	-	-
Jor	-	-	-	-
íme	-	-	*	-
Ada	-	-	-	-
Elv	-	-	-	-
Agu	-	-	-	-
Pat	-	-	-	-
Rey	▶	-	-	-
Jav	-	-	-	■»
Vic	no	no	no	Escribe: $(25)^2$-40, 1375- 1335, 0 = 0
Har	no	no	no	Sólo escribe - 835
San	-		-	-
Yes	-	-	-	-
Kar	no	no	no	Escribe: $50x^2 - 40y = 10\ x^2y$
Gui	-	-	-	-
Emi	no	no	no	Escribe: $50x^2 - 40y = 102$

El problema que se les planteó fue:

Mostrar que si se resta 1 al cuadrado de todo número impar se obtiene un número divisible entre 4 y 8

Se demuestra obteniendo la formula 8m + 1, donde "m" es cualquier número natural.

1. Una alumna escribe únicamente "es el 4"

2. Un alumno escribe 1 ' = 4 (lo cual es incorrecto).

3. Un alumno eleva, por un lado, al uno a la segunda potencia dando como resultado 16 y lo divide entre 8; y por el otro, elevó el uno a la octava potencia y da como resultado 8 y lo divide entre 4

aAtf A- *

t 2. *i*

Los resultados de elevar el 1 a la segunda y octava potencia son incorrectos.

4. Una alumna escribe $1^2 = 1$, además divide 10 entre 4 y 10 entre 8

5. Alguien eleva 1 a la segunda potencia entre y divide al 4 y al 8 1

6. Alguien sólo resta 1^2 al 9 y lo iguala con 8, luego con — último y por con 2

f - 8 2 4 E 1

£

7. Una alumna restó un número entero a *x* (del 1 al 7) y lo igualó a *2,* 3, *4,* 5, 6, 7 y 8 respectivamente. Además encierra al 4 y al 8 como indicando que con eso está haciendo la demostración.

i -= 2 A- ‘P5

X1-! -- 3

X2-- ©

$x^2-5=6$

$x^2-6=7$

Parece ser que la alumna representa ese número impar con x^2. Pero en el resultado que da ese x^2 vale uno y en lugar de llevar a cabo una resta hace una suma. 0 bien que la x^2 vale el doble del número que esta restando más uno, Esta última conclusión la descartamos ya que la alumna no ha resuelto satisfactoriamente los demás ejercicios y problemas.

8. Una alumna restó uno a algunos números impares desde el 3 hasta el 17 y señaló aquellos que, según ella, son divisibles entre 4 y 8. De todos esos que señaló, el 12 no es divisible entre 8

_1

K) omtro s Jjv'f

3-L- *2*

$»L1 H TJiViSiMé' tn

V -JL < *C*

q enU* y ?

ll *-L - »o*

***3 -1. x**

15 -JL **H**

• £* **Ijí**

9. Otra alumna resta 1^2 al 5 impar y luego resta 1^2" y al 9 y escribe: "buscando números

b>

^5CO(\¿0

iM

im por ***y \uojo rotrla*** **J,4**

10. Otra alumna multiplica 3 x 3 y 7 x 7. También resta 1 a 23 y escribe que todos los resultados de estas operaciones son divisibles entre 4 y 8. Lo cual no es cierto porque el 22 no es divisible entre estos dos números.

3 A 3 r °l - I o 8 **23-1 -¿2-7 eo cUujdíe ^7^**

X í 1 ***'i tliot ovE I e” CA*** **0**

En el inciso 1 la respuesta que da la alumna nos permite ver que ésta no comprendió el problema, En el inciso 2, pareciera que el alumno únicamente tiene presente “restar 1” pero no comprendió a qué, ni para qué. Dicho con otras palabras, no entendió las condiciones del problema.

En los incisos 3, 4, 5 y 6 parece ser que los alumnos tienen presente “el cuadrado de”, en este caso es de uno y no de todo número como lo plantea el problema. También tienen presentes el 4 y el 8, pero no conforme a! problema, No saben que hacer con estos datos que ellos resaltan para dar solución al problema y cumplir con todas las condiciones que éste plantea.

En el inciso 7, al parecer la alumna esta representando al cuadrado de todo número impar con x^2, a éste le resta un número entero (del 1 al 7) y encierra el 4 y el 8 de los resultados (incorrectos) que obtuvo,

En los incisos 8 y 9 los alumnos entendieron el problema “al revés", es decir, mostrar que si se resta 1^2 (1 al cuadrado), a todo número impar se obtiene un número divisible entre 4 y 8, Aquí la diferencia está en la coma, en cambiar “de" por “a" y en entender que se iba a restar 1^2 a todo número impar, en lugar de restar 1 al cuadrado de todo número impar $(2a-1)^2-1$

En el inciso 10 la alumna multiplica números impares por ellos mismos. Es decir, opera con un número impar al cuadrado. También resta 1 a dicho cuadrado, Desafortunadamente, tampoco logra hacer la demostración.

Con este problema nos podemos dar cuenta de que los alumnos no han logrado acceder a las operaciones formales.

Recordemos que lo que permite al niño llegar a formar operaciones formales es la posibilidad de moverse en el campo de la formulación, de los grandes ideales, del comienzo de nuevas teorías, de la realización de grandes abstracciones, de la introducción en el mundo de la ciencia, del espíritu experimental, de los dobles sistemas de referencia.

Una persona que se encuentra en el estadio de las operaciones formales tiene la capacidad de utilizar supuestos, cavilar en posibilidades, crear teorías, deducir y elaborar hipótesis. Logrando poco a poco la obtención de una fórmula algebraica para resolver un conjunto de problemas, Problema 3 Mostrar que sí se resta 1 al cuadrado de todo número impar se obtiene un número divisible entre 4 y 8

Nombre del alumno	Logró la demostra-ción	Cuenta con la noción de divisibilidad	Comprendió que todo número divisible entre 8 es divisible entre 4	Comprendió que no todo número dívisible entre 4 es divisibie entre 8	Intentó resolver el problema aritméticamente o algebraicamente	Identificó que se trataba de productos notables	Observaciones
LÍZ	no	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe: l^2 = 1,4 = 1 = 4, 8 = I = 8; no comprendió que se trataba de una generalidad
Ala	-	-	-	-	-	-	-
Cri	no	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe; $x^2 - 1 = 2$, $x^2 - 2 = 3$, $x^2 - 3 = 4$ (encierra el cuatro), x^2-4 = 5,x^2-5 = 6,x^2- 6 = 7 x^2 - 7 = 8 (encierra el ocho)
Mar	no	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe 9- 1^2 = 8 - 4/8 = 2
Saín	no	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe "a) 5 - l^2 = 4, b) 9-1^1 = 8, buscando números impar y luego resta l^2"
Sel	-	-	-	-	-	-	-
Rol	-	-	-	-	-	-	-
Ber	*	-	-	-	-	-	-
Moi	-		-	-	-	-	-
Sha	-	*	-	-	-	-	-
Jor	no	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe: $(I)^2$. 16= 16 = 2=2, R= 2: $(l)^2$. 8 =8=4=2
lime	-	-		-	-	-	-
Ada	no	sí	sí	no	aritméticamente	no	A los números impares del 3 al 17 les resto 1, luego señalo aquellos que, según ella, eran divisibles entre 4 y 8, pero señala al 12 como divisible entre 4y 8, lo cuál no es cierto. Olvidó que se trataba de una generalización.
EIv	-	-	-	-	-	-	-
Agu	-	-	-	-	-	-	-
Pat	-		-		-	-	-
Rey	no	-	-	-	-	-	Sólo escribe: es el 4
Jav	-	-	-	-	-	-	-
Vic	*•	-	-	-	-	-	-
Har	no	-	-	-	-	-	Sólo eleva el 1 a la menos dos y lo iguala a 4, lo cual es incorrecto
San	no	no	no	DO	aritméticamente	no	Escribe: 1^2= 1, I 0 = 4 = 0.25, 10 = 8 = 0.125; en la primera operación el resultado es correcto, en las dos últimas no
Yes	-	-	-	-	-	-	-
Kar	P	no	no	no	aritméticamente	no	Escribe: "Ejemplo, 3 x 3 = 9 - I = 8, 8 es divisible entre cuatro y 8; 23 - 1 = 22 y es

							divisible entre 4 y 8; 7 x 7 = 49 -1 = 48 y es divisible en 4 y 8”; Además, 22 no es divisible entre 8
Gui	-	-	-	-	-		-
Emi	-	-	-	-	-	-	-

Podemos concluir que el planteamiento de este problema y estos seis ejercicios relacionados con el tema de productos notables y factorización nos permitió ver que:

a) La mayoría de los alumnos no saben hacer operaciones con polinomios. Entre otras cosas no han aprendido a extraer el factor común de un polinomio; no efectúan correctamente la simplificación de términos; no realizan correctamente la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis. Todo esto ha dificultado que los estudiantes logren aprender la noción de productos notables y factorización.

b) Ninguno de los alumnos aplica los productos notables al cálculo numérico. Ni tampoco los utiliza en la resolución de problemas. Cabe hacer mención que en toda la educación secundaria no tuvieron la oportunidad de hacerlo.

Todo esto dificulta que los alumnos logren hacer abstracciones y generalizaciones.

Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

En la educación secundaria cuando se inicia el estudio de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, los alumnos ya están familiarizados con las operaciones que sirven para resolver ecuaciones lineales, como son operar con ambos miembros o transponer términos de un lado a otro de la ecuación.

Una ecuación de segundo grado o cuadrática es aquella que puede reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde no se anula **a.** Si observamos los coeficientes *b* y *c,* las podemos clasificar en incompletas si se anula *b* o **c,** o completas si no se anula ninguno de los coeficientes.

Los métodos para resolverla consisten en llevarla a una de las formas:

$$(ax + b)^2 = d \text{ o } (ax + b)\ (ex + d) = 0$$

Luego se despeja x o se aplica el hecho de que un producto es cero si alguno de sus factores lo es.

Solucionar una ecuación de segundo grado consiste en averiguar qué valor o valores al ser sustituidos por la indeterminada convierten la ecuación en una identidad. Llamamos discriminante $A = b^2 \sim 4ac$, en función del signo del discriminante conoceremos el número de soluciones de la ecuación, así:

a) Si el discriminante es menor que 0 la ecuación no tiene solución,

b) Si el discriminante es 0 hay una solución,

c) Si el discriminante es mayor que 0 hay dos soluciones.

El álgebra de la secundaria culmina con el estudio de las ecuaciones de segundo grado, o cuadráticas y los métodos que sirven para resolverlas, incluida la fórmula general.

El programa contempla los siguientes temas:

a) Solución de ecuaciones incompletas ($ax^2 + c = 0$, $ax^2 - bx = 0$); de ecuaciones completas por factorización y completando cuadrados.

b) Fórmula general; discriminante y número de soluciones de una ecuación cuadrática.

"Los alumnos deberán tener numerosas oportunidades de plantear y resolver problemas que los conduzcan a ecuaciones cuadráticas. Para esto no es necesario, ni recomendable, esperar a que dominen los procedimientos algebraicos de resolución, sino que se les pueden proponer desde antes y permitir que los resuelvan por medios numéricos y gráficos". **(SEP,** 1995; **p.** 147)

Por otro lado, a manera de confrontación de la teoría con la práctica, se les plantearon a los alumnos tres problemas. El objetivo es identificar si éstos:

a) Lo resuelve algebraicamente o aritméticamente.

b) Hicieron uso de un lenguaje algebraico.

c) Resolvieron el problema por medio de una ecuación cuadrática; si es el caso, analizar como planteó la ecuación de segundo grado, que método utilizó para resolverla, si la resolvió satisfactoriamente y si encontró el valor de *x.*

d) Hacen el uso correcto de las leyes de los signos y las operaciones inversas.

e) Y, en el primer problema, ver si saben y tienen presente lo que es un número al cuadrado y números consecutivos.

El primer problema que se les planteó es el siguiente:

Encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77|

Los números son 4, 5 y 6

Algunas de las respuestas que dan los alumnos son:

1. Una alumna escribió únicamente 25.6

2. Tres alumnos buscaron un par de números cuya suma era igual a 77

Emi	Sam	Agu
33	38-5	
		77'

3. Un alumno buscó dos pares de números que sumados daban 77

4. Cuatro alumnas buscaron tres pares de números que sumados daban 77

Cri	Pat
3*i SS>. 5" n-	*MU $5 ¿6* **-155 T** *66jl¿ ' // ~7? 1?-*
Vic	Sel
51 VIS -11 H5Í 3H -71 *b* 1 * it *-11*	**3S11 “ + HI 77 í).**

5. Un alumno buscó tres números que sumados le dieran 77

6. Una alumna buscó cuatro grupos de tres números que sumados le dieran 77

24
12
41
77

Cada grupo de tres números suma 77

7. Otro alumno buscó tres números que sumados dieran 77 y los utilizó como exponente de tres números consecutivos.

8. Cuatro alumnos encontraron los tres suman números cuyos cuadrados 77

Kar

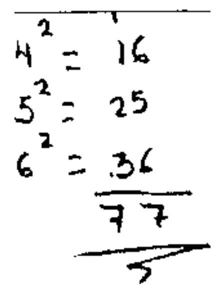
^{k}\ *t H z* I k 5'^5
Cx C z 3^

<Jo 4o-í«l de 'í'í

16 +Z6*36= v*

Ada

Elv



I (. 15 3c

El problema era encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77. Todas las respuestas que dieron los estudiantes nos permitieron percatarnos que:

a) Sólo cuatro alumnos encontraron dichos números, lo que equivale a un 16 % del total de los alumnos en estudio.

b) Ningún alumno intentó resolver el problema algebraicamente. Todos lo hicieron aritméticamente. Por lo tanto, no pudimos observar si conoce y pone en práctica los métodos para resolver una ecuación de segundo grado,

c) Los alumnos que contestaron correctamente el problema fue porque lo comprendieron en su totalidad y han aprendido qué se entiende por el cuadrado de un número y por números consecutivos.

d) El problema no condujo a los estudiantes a plantear una ecuación de segundo grado. Los alumnos no están acostumbrados a resolver problemas algebraicamente. Además, en este problema, no era difícil encontrar dichos números. Quizá era más fácil resolverlo por tanteo que por medio del planteamiento y la resolución de una ecuación de segundo grado, Pero, ¿qué pasaría si se tratara de una cantidad mayor, dónde nos fuera muy complicado y nos llevara mucho tiempo encontrar dichos números por ensayo y error" El plan y programa de estudio plantea la resolución de problemas utilizando los conocimientos adquiridos en relación al álgebra para que se logre poco a poco la obtención de una fórmula algebraica para resolver un conjunto de problemas.

En la respuesta del inciso 1 muy probablemente la alumna dividió 77 entre 3. Podemos decir que esta estudiante sólo retuvo en la mente dos datos: 77 y 3, pero no comprendió la relación que había entre dichos datos.

Los alumnos de los incisos 2 y 3 buscaron un par de números que sumados dan 77. Aquí podemos ver que ellos sólo tuvieron presente que se trataba de números que sumaran 77, pero no comprendieron de cuántos números se trataba y que otras condiciones debían de cumplir dichos números.

En las respuestas del inciso 4 cada una de las atumnas buscó tres pares de números que sumados daban 77 Lo que podemos observar aquí es que dichas estudiantes tuvieron presente que se trataba de números que sumados dieran 77, pero cambian las condición del problema (muy probablemente porque así lo entendieron) "tres números consecutivos cuyos cuadrados" por "encontrar tres pares de números que sumen 77"

Al parecer, en el inciso 5 el alumno sólo tuvo presente que se trataba de 3 números que sumados dieran 77

En el inciso 6 seguramente pasó lo mismo, nada más que aquí la alumna buscó más de un grupo de tres números que sumados dan 77

El alumno del que hablamos en el inciso 7, tampoco comprendió el problema. Aquí el alumno cambio "cuyos cuadrados" por "exponentes". Talvez entendió el problema de la siguiente manera: "Escribe tres números consecutivos y a cada uno colócale un exponente de tal manera que dichos exponentes sumen 77"

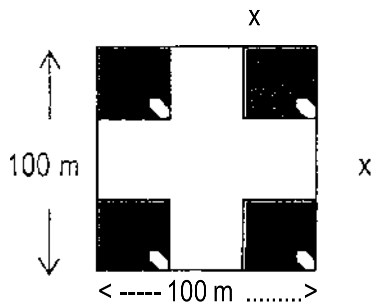
Los alumnos se encuentran aún en el estadio de las operaciones concretas ya que aún tienen dificultades para enfrentarse a relaciones de segundo orden y no fueron capaces de ver todas las relaciones existentes que había en el problema.

Problema 7) Encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77

Nombre dei alumno	Encontró dichos números	Respetó la condición; números al cuadrado	Respetó la condición: números consecutivos	Procedió a su solución aritméticamente o algebraicamente	El problema lo condujo a una ecuación de segundo grado	Con que método resolvió la ecuación de segundo grado	L'sa correc- tamente las' operaciones inversas	Resolvió satisfactoriamente la ecuación	Observaciones
Liz	**	-	-		-	-	-	-	-
Ala	**	-	-	-		-	-	-	-
Cri	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Hace tres operaciones: 34 + 43 = 77, 38.5 ■+• 38.5 = 77.0 y, 38+39 = 77
Mar	no	no	no	aritméticamente	-				Escribió tres números que sumados dan 77 y los coloco como exponentos de tres números consecutivos. Las operaciones que presentan son: 7*° + 8'° + 6''= y 2Ü = 30 + 27 = 77
Sam	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Sólo suma 38.5 + 38.5 =77
Sel	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Hace las siguientes operaciones: 38.5 + 38.5 = 77.0, 11 x 7 = 77 y 41 + 36 = 77
Rol	-		-	-	-	-	-	-	-
Ber	-		-	-	-	-	-	-	
Moí	sí	sí	sí	aritméticamente	-	-	-	-	Coloca el exponente 2 al los números 4, 5 y 6 e indica su suma, después suma 16 + 25 + 36 = 77
Sha	-	*»	-	-	-	-	-	-	-
Jor	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Ime	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Presenta tres grupos integrados por 3 números, cada uno, que sumados dan 77 respectivamente.
Ada	sí	sí	sí	aritméticamente	-	-	-	-	Obtiene el cuadrado de el 4, el 5 y el 6, después suma 16 + *25* + 36 = 77
Elv	sí	sí	sí	aritméticamente	-		-	-	Obtiene el cuadrado del 4, el 5 y el 6 y después los suma.
Asa	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Sólo suma 25 + 52 = 77
Pat	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Hace lo siguiente; 44 + 55 = 77, 55 + 56 = 77 y 66 + 77 (el resultado de las sumas es incorrecto)
Rey	-	-	-	-		-	-	-	-
Jav	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Sólo indica las sumas: 66 + 11 y 65 + 12
Vie	no	no	no	aritméticamente		-	-		Suma 52 + 25 = 77, 43 + 34 = 77 y 61 + 16 = 77
Har	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Suma 24+ 12+41 =77
San	-	-		-	-	-	-	-	-
Yes	no	-	-	-	-	-	-	-	Sólo escribe; 25.6
Kar	sí	sí	sí	aritméticamente	-	-	-	-	Hace las operaciones: 4x4 = 16, 5x5 = 25 y 6x6, y escribe "da un total de 77''
Gui	-	*»		-	-	-	-	-	-
Emi	no	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Sólo deja indicad la suma de 33 + 44

Ef segundo problema relacionado con el tema de ecuaciones de segundo grado que se les presentó a los alumnos para su solución fue:

En un parque cuadrado que mide 100 m de cada lado se van a construir dos andadores, tal y como se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la superficie de ios andadores sea igual a la parte jardinada?



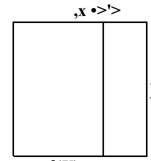
Respuesta: x debe valer 29.3

1. Una alumna igualó x a lOOm, después presenta x + lOOm = 100 y por último agregó e1 exponente 2 a la x

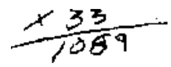
O vo C I

72 I CO rv'1 y, A⁻ \ OOfiA ~ i DO y^5-l lOO^slOO

2. Seis alumnos dan como resultado 25m, algunos procedimientos que llevaron a cabo son los siguientes:

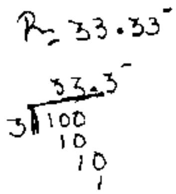
Kar	Harold	Vic
2 5m	A)	seno. Ae o 15 4 ¿r±> 5 o i a o ■
Sel	Agustin	Jor
Jo 0	*A* *4~'/ /QQ* 20 X 25» o	,x •>'> i 00 ni  x rico *D* l(X) m

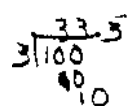
3. Cinco alumnos dividieron 100 entre tres. El resultado que obtuvieron fue 33.3 Algunas de las respuestas son las siguientes y se presentan de menor a mayor grado-de desarrollo cogni tivo:



/d£9 4 *H* -

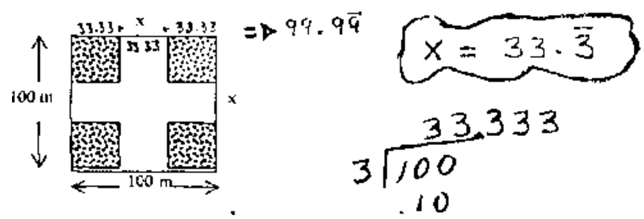
b)





61 deXes id.Svn,

d)



4. Un alumno escribe área igual a 100000^2, lo cuál es incorrecto. Por otro lado divide 10000 entre 9 dando como resultado 1111.1

OKQ x lOoeoo^2

SjlOOoo x: un,*i*

Ningún alumno resolvió correctamente el problema. Nueve alumnos lo dejaron sin contestar (un 36%) y dieciséis lo contestaron mal (64%).

Claro que no podemos olvidar lo que Parra, Blanca M. (1996) nos dice en relación a la resolución de problemas:

> *"puede considerarse que un problema ha sido resuelto por un individuo cuando éste cree, explícita o implícitamente, que ha obtenido la 'verdadera' solución"*

Tampoco podemos dejar de lado la motivación del alumno para resolver dicho planteamiento.

El análisis de dicho problema nos permitió darnos cuenta que a la mayoría de los alumnos la figura presentada los llevó a dar una respuesta errónea. Aquí podemos ver cómo se dan los intercambios entre el sujeto y los objetos, es decir, como percibe su entorno (esto depende de las estructuras cognitivas generales del sujeto). Es decir, integraron los objetos a esquemas de acción (adaptaron el ambiente o la situación problemática a sí mismos) y fue esto lo que los llevó a buscar y dar una respuesta (utilizaron lo adaptado según como lo concibieron). Para ello primeramente se presenta un desequilibrio que el alumno resuelve haciendo una adaptación entre (a asimilación y la acomodación para lograr nuevamente el equilibrio. Por ejemplo:

a) Para la colegiala de la que hablamos en el inciso 1 el valor de x esta representado por la cantidad escrita enfrente. Esta alumna no comprendió que los 100m representan todo el lado del cuadrado y no sólo lo parte que esta en blanco y que se encuentra exactamente enfrente de lax.

b) En las respuestas del inciso 2 los alumnos dividen 100 entre 4. Talvez el cuatro represente para ellos las cuatro partes jardinadas que vemos en la figura.

c) Para los alumnos que dieron las respuestas de los incisos 3 y 4 el parque estaba formado por 9 cuadrados del mismo tamaño, ya que así parece a simple vista. Los alumnos que así comprendieron el problema siguieron uno de los siguientes procedimientos y creyeron encontrar la respuesta correcta.

Por un lado tenemos el procedimiento que siguieron los cinco alumnos del inciso 3

Y por e! otro el procedimiento que siguió el alumno del inciso 4

33.3	100	1111.1
30)100	x100	■ 9)10000
010	10000	010
001		0010
		OOOIO
		000010

Problema 8) En un parque cuadrado que mide 100 m de cada lado se van a construir dos andadores, tal y como se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el valor de v para que la superficie de los andadores sea igual a la parte jardinada?

<■ 100 m >

Sombre del alumno	Dio el valor de x	Comprendió e! problema	Resolvió el problema por medio de una ecuación cuadráiica	Con que método resolvió la ecuación de segundo grado	Usa correctamente las operaciones inversas	Resolvió satisfactoriamente la ecuación	Observaciones
Liz	no	no	no	-	-	-	Da como resultado *33.3*
Ala	-	-	-	-	-	-	-
Cri	no	no	no	-	-	-	Escribe x = 1 OOm, x + 1 OOm = 100, x^2 + 1 OOm = 100
Mar		-	-	-	-	-	-
Sam	no	no	no	-	-	-	Hace las operaciones *33* x 33 = 1089, 1089-4 = 272, 272 - 4 = 68, 68 x 2=136, R = 68
Sel	no	no	no	-	-	-	Sólo divide i 00 entre 4 y da como respuesta 25
Rol	-	-	-	-	-	-	-
Ber	no	-	-		-	-	Sólo coloca 1 OOm en cada uno de los dos lados del cuadrado donde no aparece este dato.
Moi	no	no	no	-	-		Escribió área = 100000^2 (lo cuál es incorrecto, tanto por el exponente 2, como por la cantidad,, porque 1 00 x 100 son diez mil), dividió 10000 entre 9, y dio como resultado x = 1111.1
Sha	-	»*	-	-	-	-	-
Jor	no	no	no	-	-	-	Dividió 100 entre 4 = 25. y colocó 25m en las orillas de cada uno de los andadores.
Ime	-	-	-	-	-	-	-
Ada	no	no	no	-	-	-	Divide 100 entre 3 = 33.333 y da como resultado X = 33.3 y coloca una línea amiba del último tres indicando que se trata de un resultado periódico.
Elv	no	no	no	■*	-		Divide 100 entre 3 = 33.3 (periódico) y da corno resultado x = 33.33 y coloca una linca al lado del último tres indicando que se trata de un resultado periódica (lo mismo hace en el resultado de la división).
Agu	no	no	no	-	-	-	Divide 100 entre 4 = 25 y da como resultado R = 25m
Pat	-	-	-	-	-	-	-
Rey	-	-	-	-	-		-
Jav	no	-	-	-	-	-	Únicamente escribe: x = 33.3
Vie	no	-	-	-	-	-	Suma 25 - 25 = 50, 50x 2= 100, y escribe R = seria de a 25
Har	no	-	-		-	-	Sólo escribe x = 25m
San	no	no	no	-	-	-	Divide 100 entre 3 = 33.333, y escribe: el valor de x es 33.3m. Coloca una línea arriba del último tres indicando que se trata de un resultado periódico
Yes	no	**	-	-	-	-	Sólo escribe x = 33.3
Kar	no	-		-	-	-	Sólo escribe x = 25m
Gui	-	-	-	-	-	-	-
Emi	-	-	-	-	-	-	-

El tercer y último problema que se les planteó a los alumnos, relacionado con ecuaciones de segundo grado fue:

Varios amigos se ganan $ 90 en una rifa, pero deciden compartir el premio con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan $ 3 menos, ¿Cuántos amigos eran?

Respuesta: eran 5 amigos más 1, que fue con el que compartieron el premio.

1. Una alumna multiplica 10 x 9 = 90

lo

2. Otra alumna divide 90 entre 3. Luego divide el resultado de esta división entre 3 y da como respuesta eran 10 amigos.

¿Cuántos amigos eran?

3^ • *3pO* **pvcn lO**
OO o

3. Una alumna escribe "eran 3 amigos"

4. Otro alumno también da como respuesta 3 amigos. Divide 90 entre 3 dando como resultado *3,* lo cuál es incorrecto, ya que al efectuar dicha división da como resultado 30 y no 3

-- “3

3/qo
O

5. Alguien más escribió "eran 3 pero con el otro eran 4"

pero **cor o]** *YO* ᵉW

6. Un alumno escribe únicamente 4

7. Otra alumna escribe "4 amigos"
8. Un alumno solamente escribe 8, sin ninguna otra explicación.

9. Ocho alumnos dan como respuesta 30 amigos. Los procedimientos que hicieron son:

Pat Dolo 3 Opetocio» 3Oo<niJO3	Elv (aunque tachó todo)
Sha	Sel 3 Q 3 (To a. ’0 GO O
Vic C>ÍCXY\ ^Sc\v\\cx QVAxCjO^ Tjix ->0 ?> v 3 . 00 O cj Q	Cri Operación 50 evun 30 a1^03
Moi $0 5 ^70. ° ° 50 Z3 70	Ime P SÓ MV<0)0Z> 0 <0 i O

10. Dos estudiantes dan como respuesta seis amigos.

Jor R= 6 amigos 6⟌90 15 30 0	Liz 6⟌90 eran 6 amigos

11. Dos estudiantes dan como respuesta seis amigos.

Jor	Liz
R= 6 amigos 6/90 = 15 30 0	6:90 eran 6 amigos

12. Cuatro alumnos contestaron satisfactoriamente el problema, aunque lo resolvieron aritméticamente y no algebraicamente. Las respuestas que dieron son las siguientes:

<table>
<tr><td>Yes</td><td>Aon G d jja<inro
ko -U<xi <£>¿$18 *°</td></tr>
<tr><td>Mar</td><td>x'L
Jo 7°
n~Ztrqn 3 y o todo le. +otoiron//5 c¿>n el ok?</td></tr>
<tr><td>Kar</td><td>CÓ cual
corApaJMo Q* UCÍÚ *cAo f<n U |
(v(x\ (,O<^ tloUo €X*'^\O Avt>0^ 4^
pj^ ¿ 3 / S ■
¿IQ StrwJS _____i</td></tr>
<tr><td>Ada</td><td>6 ˢ—C"~o“"í Qˈ ˈc
)C«. í rS CWI’ C|0Í3 OTO S) <u>UjO0</u> ---- —. ----
OCN-liCrOO fucrorrGy
tí—^75-—- lí
tfao (> Mo
S. ³ 2</td></tr>
</table>

Dos alumnos dejaron sin contestar el problema (8%); diecisiete lo contestaron mal (68%); dos lo hicieron parcialmente correcto (8%); y cuatro lo contestaron correctamente (16%).

En las respuestas que dieron los estudiantes en los incisos 1 al 9, notamos que los alumnos no comprendieron el planteamiento. Ya, en los incisos posteriores, vemos un poco más de entendimiento del problema.

En el inciso 10, a simple vista la respuesta que dieron los alumnos es correcta, pero si supiéramos que procedimiento siguieron estos adolescentes sabríamos, a ciencia cierta, si el procedimiento que siguieron es correcto o no. Lo mismo podríamos decir de la respuesta. Cabe la posibilidad de que la respuesta que dieron haya sido por coincidencia. Desafortunadamente los estudiantes no presentan más operaciones o justificaciones de porque emitieron ese resultado.

Podemos decir entonces que los alumnos de los que hablamos en los incisos 1 al 9 integraron los objetos (planteamiento del problema) a esquemas de acción (dar solución a ese problema), pero esas acciones no los llevaron a dar una respuesta satisfactoria al problema. Los estudiantes del inciso 10 no sabemos a ciencia cierta como integraron dicho problema ni que acciones llevaron a cabo, ya que las operaciones y la respuesta que dan no nos permite saber si comprendieron dicho problema. Indudablemente, las respuestas que éstos dieron, al igual que las de los anteriores incisos, son validas para ellos. Sabemos que los estudiantes de los que hablamos en el inciso 11 comprendieron el planteamiento.

Por último, podemos destacar que todos los alumnos que resolvieron el problema (bien o mal) lo hicieron aritméticamente. Por lo tanto, nadie fue capaz de plantear y resolver una ecuación cuadrática. Esto nos revela que los estudiantes no emplean los conocimientos del álgebra para la resolución de problemas.

Problema 9) Varios amigos se ganan $ 90 en una rifa, pero deciden compartir el premio con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan $ 3 menos. ¿Cuántos amigos eran?

Nombre del alumno	Comprendió el problema	Dio la respuesta correcta	Procedió a su solución aritméticamente o algebraicamente	Planteó una ecuación cuadrática (cuál)	Con que método resolvió la ecuación de segundo grado	Usa correctamente las operaciones inversas	Resolvió satis-factoriamente la ecuación	Observaciones
Liz	-	pe	aritméticamente	-	-	-	-	Sólo indica la división 90 entre 6 y escribe “eran 6 amigos”
Ala	-	-	-	-	-	-	-	-
Cri	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Multiplica 30 x 3 = 90 y escribe “eran 30 amigos”
Mar	si	sí	aritméticamente	-		-	-	Hace las siguientes operaciones: 18x5 = 90, 90 -15 = 75, 15 x 6 = 90, y escribe: “R. = Eran 5 amigos y a cada uno le tocaron $15 junto con el otro”
Saín	-	no	-	-	-	-	-	Sólo escribe: "eran 4 amigos” y no presenta operaciones.
Sel	-	no	-	-	-	-	-	Sólo divide 90 entre 3 ~ 30 *y* da como resultado 30
Rol	-	no	-	-	-	-	-	Sólo escribe: ‘‘Eran 3 pero con el otro eran 4”
Ber	-	no	-	-	■*	-	-	Sólo escribe: "Eran 3 amigos”
Moí	no	no	aritméticamente		-	-		Multiplica 30 x 3 = 90 y escribe: "eran 30 amigos que tenían $90.00
Sha	-	no	-	-		-	-	Sólo escribe: “R = 30 amigos”
Jor	-	pe	aritméticamente	-	-	-	-	Divide 90 entre 6 = 15, y escribe: “R = 6 amigos”
Ime	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Divide 90 ente 3 = 30, multiplica 30 x 3 = 90, y escribe: “ R = 30 amigos”
Ada	-	sí	aritméticamente	-	-	-		Divide 90 entre 5 = 1 8 y 90 entre 6=15. Escribe: “Eran 5 amigos más uno, que fue al que le compartieron, fueron 6”
Elv	sí	no	aritméticamente	-	-	-	-	Hace la división de 90 entre 3 = 30 y luego la lacha.
A gU	no	no	aritméticamente		-	-		Divide 90 entre 3 = 3 (resultado incorrecto) y escribe: “R = 3 amigos”
Pat	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Escribe como datos: amigos y rifa; divide 9 l entre 3 =30 (seguramente sumó $90 del premio ganado + 1 que representa el amigo más). Escribe como resultado 30 amigos
Rey	-	-	-	-	-	-	-	-
Jav	' -	no	-	-	-	-	-	Sólo escribe un 8
Vic	no	**no**	aritméticamente	-	-	-	-	Divide 91 divide 91 'entre 3 =30

								(probablemente sumó $90 del premio ganado + i que representa el amigo más). Escribe, "eran treinta amigos”
Har	-	no	-	-	-	-	-	Sólo escribe un 4
San	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Divide 90 entre 3 — 30, 30 entre 3 = 10 y da como respuesta 10 amigos
Yes	sí	sí	aritméticamente	-	-	-		Escribe: Son 6 amigos les toca de $ 18, pero al último le toca $15
Kar	sí	sí	aritméticamente					Escribe y hace lo siguiente; "90 + 5 = 18 menos 3 sería 15, 15 x 6 = 90, Eran 5 amigos al cual)e tocaban $18.00 pero como decidieron compartirlo les bajaron 3 pesos menos y le toco de 15 por lo cual con el otro amigo fueron ya ó amigos.
Gui	no	no	aritméticamente	-	-	-	-	Divide 90 -s-3 = 30 y da como resultado 30 amigos
Emi	no	no	A ri tm ét i ca men te	-	-	-	-	Sólo multiplica 10x9= 90

Conclusión

"No se puede enseñar nada a un hombre; sólo sede puede ayudar a encontrar la respuesta dentro de sí mismo"

Galileo Galilei

El propósito principal de esta tesis fue conocer —por medio de un diagnóstico— el estadio de desarrollo cognitivo alcanzado por un grupo de estudiantes de secundaria en particular.

Todo lo recaudado y lo analizado en este trabajo de investigación nos hace coincidir con Nicherson (1987) cuando afirma que muchos estudiantes que han completado la escuela secundaria no han transitado al pensamiento abstracto o, hablando en términos piagetianos, al periodo de las operaciones formales.

Los estudiantes en estudio están en la etapa de las operaciones concretas. Su pensamiento se ocupa de lo concreto, de lo real, de lo presente, del aquí y ahora. No exigen una explicación de las posibilidades fuera de los datos expuestos. No han logrado desarrollar habilidades de generalización, deducción y abstracción.

Además de tener dificultades para enfrentarse a relaciones de segundo orden, no son capaces de cumplir todas las condiciones de un problema porque sólo ven relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones.

Los estudiantes no emplean los conocimientos del álgebra para la resolución de problemas. Todos los alumnos que intentaron resolver el problema lo hicieron aritméticamente por tanteo, y no algebraicamente. A pesar de que los educandos tuvieron la oportunidad de trabajar con expresiones algebraicas dentro del aula, en ia resolución de los problemas que se le plantearon no fueron capaces de representar una situación o enunciado con una expresión simbólica y operar con ella. Es decir, pasar las condiciones de un problema a una ecuación para su resolución —como lo marca el programa—y lograr poco a poco la obtención de una fórmula algebraica para resolver un conjunto de problemas.

Sabemos que la expresión simbólica y el pensamiento abstracto se desarrollan por medio del estudio del álgebra (base de las matemáticas de grados superiores) desafortunadamente los adolescentes en estudio no reconocen la utilidad del álgebra en la solución de problemas y mucho menos logran acceder al campo de la formulación, ni a la creación de nuevas teorías.

Los alumnos no han logrado aún el paso de las operaciones concretas a las operaciones formales. Aún así, es importante destacar que dentro de este periodo en el que están los estudiantes podemos señalar cinco subestadios que corresponden a diferentes grados de avance en el desarrollo intelectual de los sujetos en estudio.

En este trabajo de investigación hemos clasificado a nuestro grupo de alumnos en estudio dentro de cinco subestadios los cuales están resaltados con diferentes colores en la siguiente tabla. Además señalamos con color rojo a una alumna que por los procesos que siguió al tratar de resolver los problemas y ejercicios que se le plantearon, deducimos que aún no accede a las operaciones concretas, sino que se encuentra todavía dentro del estadio preoperatorio. Ya que ésta procede de manera intuitiva, sin tener plena conciencia en los procedimientos empleados. Muy probablemente dentro de poco pasará de la fase *instintiva* (periodo preoperatorio) al inicio del periodo de las operaciones concretas.

En el primer subestadio (que está representado con color amarillo) encontramos a los alumnos que no contestaron correctamente ningún planteamiento y que llevaron a cabo procesos de resolución que tenían muy poca o nada de relación con lo que se les estaba solicitando.

En el segundo subestadio (representado con azul) se encuentran los alumnos que fueron capaces de resolver parcial o totalmente un planteamiento o un ejercicio. Y que además, de los procedimientos que llevaron a cabo para la resolución de éstos, muy pocos eran los apropiados.

En el tercer subestadio (señalado con color gris) hallamos a los estudiantes que fueron capaces de responder parcial o totalmente más de un ejercicio o problema; y en los que los procedimientos que siguieron para su resolución encontramos más lógica.

En el cuarto subestadio (que no aparece resaltado con ningún color) están los escolares que fueron capaces de resolver parcial o totalmente más o alrededor de cuatro planteamientos entre ejercicios y problemas; y que tuvieron algún error en las operaciones que llevaron a cabo y no en el procedimiento.

En el quinto y último subestadio de las operaciones concretas (que está señalado de color verde) encontramos a una sola alumna que fue capaz de resolver satisfactoriamente ocho ejercicios y cinco problemas. También contesta parcialmente cuatro ejercicios. Pero lo más importante es que —aunque no resolvió ningún problema en una forma algebraica— Tiene más manejo de las situaciones y de todas las condiciones inmersas en cada uno de los planteamientos, Y muy rara vez se pierde en los procedimientos que emplea. Dichos procedimientos están pensados a conciencia. Además nos deja ver que es la alumna que tiene más conocimientos fundamentados, a diferencia de sus demás compañeros. También es ella la que hace más operaciones mentalmente y más *relaciones entre los* datos y el procedimiento que sigue en la resolución de los planteamientos. Asimismo presenta mejor orden en sus respuestas.

Si vemos detalladamente la tabla, podemos decir que la mayoría de los adolescentes se encuentran en el primer o segundo subestadios de los que hablamos en este trabajo: Un 28 % del total de los alumnos en estudio se encuentran en la fase inicial (primer subestadio) del periodo de las sXªt'dneS ?onc,retaS' y un 24 % se encuentra en el segundo subestadio. En el tercer y cuarto subestadios hay la misma cantidad de alumnos (5 que equivale a un 20% del total) Y sólo una es udiante está en la etapa final de las operaciones concretas con poca distancia parei acceder a periodo de las *operaciones formales.*

Por otro lado, si nos enfocamos de manera general a lo que los estudiantes fueron capaces o no de resolver, tenemos que:

El ejercicio que más alumnos dejaron sin contestar fue el 10b. El cual consistía en completar la expresión $25x^2 - 40y$ de manera que obtuvieran un trinomio cuadrado perfecto.

El ejercicio que más se les dificultó resolver a los escolares fue el segundo que consistía en bosquejar en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones: y = -3x, y = -2x, y = - x, y = x, y = 2x, y = 3x. Sólo dos estudiantes bosquejaron las gráficas.

Podemos decir que el ejercicio que menos se les dificultó a los alumnos fue el primero, que consistía en completar una tabla buscando ios valores faltantes de *x* e *y,* además de representarla en el plano cartesiano.

Siete alumnos (un 28 % del total de los alumnos) no contestaron ningún ejercicio correctamente. Estos siete estudiantes son: Cri, Rol, Ber, Agu, Jav, Yes y Gui. Quien resuelve más ejercicios correctamente es Ada. Luego le siguen Liz y Moy.

En lo que se refiere a la resolución de los problemas los alumnos presentan mayor dificultad en la resolución de los problemas 3, 5 y 8. En los cuales se les solicitó hacer una demostración, buscar un precio y una medida, respectivamente, En el problema 3 hubo una persona quien lo resolvió parcialmente. Pero en los ejercicios 5 y 8 nadie procedió acertadamente. Aunque también cabe mencionar que en la resolución del problema 8 hubo confusión entre la figura presentada y sus medidas.

' Los problemas 2 y 4 fueron los que más alumnos contestaron correctamente. Y el 3 el que más adolescentes dejaron sin contestar. Muy probablemente porque se trataba de hacer una demostración. Esto nos muestra que los alumnos no han accedido al estadio de las operaciones formales, ya que de ser así, hubieran hecho la demostración sin ningún problema.

Ala deja sin contestar siete problemas y los otros dos los intenta resolver, pero lo hace de manera incorrecta.

Cri y Har —cada uno por su parte— intentan resolver los nueve problemas pero ninguno de los dos lo hace satisfactoriamente.

Sam y Agu intentaron resolver ocho de los nueves problemas. Desafortunadamente ninguno resuelven correctamente.

Nuevamente Ada es quien presenta más respuestas correctas (5 de 9) a los problemas planteados.

Kar resuelve tres de los problemas y en otros dos estuvo cerca de llegar al resultado correcto.

Casi la mitad de los estudiantes (12) no contestaron ningún problema correctamente, lo que equivale a un 48 % del total de los alumnos en estudio. Estos doce estudiantes son Ala, Cri, Sam, Rol, Ber, Agu, Pat, Rey, Vic, Har, Gui y Emi.

A continuación se presentan las siguientes tablas con los datos recaudados del total de los ejercicios y los problemas que contestaron o dejaron sin contestar ios alumnos.

Tabla comparativa de la resolución de los ejercicios[15]

[15] **El orden, tanto en esta tabla como en la siguiente, está conforme al examen que les fue aplicado a los alumnos, mismo que se encuentra en la parte de anexos de este trabajo.**

Nombre del alumno	Ejercicios														
	1	2	3	4	5	6a	6b	1	8a	8b	9a	9b	10a	10b	Totales
Liz	V	x	x	x	x	Y		x	x	x	Y		x	x	se = 0, x = 9, . - . y Y = 3
Ala	V	x	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se = 12, x = 1, pe - 0 y Y = 1
Cri	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	se	se = 1, x = 13, pe = 0 y Y = 0
Mar	Y	x	se	se	se	i	se	x	x	x		x	x	x	se = 4, x = 7, t ■ • = y Y = 2
Sam		x	x	x	x	se	se	se	se	se	x	x	se	se	se = 7, x = 6, . - . y Y = 0
Sel		x	se	x		x	x	x	x	x	Y		x	x	sc= 1, x = 9, ■: . y Y = 1
Rol	I X	x	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se = 12, x = 1,pc = 0y Y = 0
Ber	X	se	se	se	x	se	se	se	se	se	x	se	se	se	se = 11, x = 3, pe = 0 y Y = 0
Moi	Y	x	x	x		Y	Y		x	x	x	se		se	se = 2, x = 6, pe = 2 y Y = 3
Sha		x	se	se	se	se	se	x	se	se	se	se	se	se	se -11, x = 2,:; = y Y = 0
Jor	X	x	x	x		x	x	x	se	se	A/	x	se	se	se = 4, x = 8, ' y Y = 1
¡me		x	se	se	se	x	se	x	se	se		se	se	se	sc = 9, n = 3,; y Y = 0
Ada	Y	V			se	Y	Y	Y		Y	Y		V	se	se = 2, x = 0, ¡ c -- y Y = 8|
Elv	y/	Y	x	x	se	x	x	x	x	x	x	se	x	se	sc = 3, x = 9, p = ' y Y = 2
Agu	x	x	x	se	x	x	x	x	x	se	x	se	x	se	sc = 4, x = 10, pc = 0 y Y = 0
Pat		x	se	se	x	se	se	se	x	x	se	se	se	se	se = 9, x = 4, k y Y = 0
Rey	x	x	x	x		se	se	se	x	x		x	se	se	SC = 5, x = 7, ;■ c = ' y Y - 1
Jav	x	x	x	x	x	se	se	se	se	se	X	x	x	se	se = 6, x = 8, pe = 0 y Y = 0
Vic		x	se	x	X	x	x	x	x	x		x	se	x	sc = 2, x = 10, y Y = 1
Har	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	Y	x	x	x	sc = 0, x = 13, pc = 0 y Y = 1
San			se	x	x	se	se	se	se	se	x	se	se	se	se = 9, x = 3, p: ~ 2 y Y = 0
Yes	x	x	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se = 12, x = 2, pc = 0 y Y = 0
Kar	Y		x	x	x	x	se	x	x	x		x	se	x	se = 2, x = 9, L C -• 2 y Y = 1
Gui	x	x	se	se	x	se	se	se	se	se	se	se	se	se	se -11, x = 3, pe = 0 y Y = 0
Emi		x	x	x	se	se	se	x	x	x	se	se	se	x	se - 6, x = 7,- y Y = 0
Totales	sc = 0 x = 9	sc = 1 pe = 2 i/ = 2	se =12 x = 13 pc = 0 •7 = 0	se =10 x = 14 pc = 1 Y = o	se = 9 x =12 pe = 4 •7=0	se =12 x = 9 pc = 0 Y = 4	[illegible]	se =10 x =13 pc = 1 Y= 1	se =11 x= 13 pc = 1 Y = 0	se =12 x = 12 pc = 0 Y = 1	se = 7 x = 8 pe = 3 Y=7	[illegible]	[illegible]	¡sc=18| x = 7 pc=0 Y = 0	Destacan sc = 10, x= 14 y Y= 1

se = sin contestar   x = mal contestado   -= parcialmente correcto   Y = contestado correctamente

Tabla comparativa de la resolución de problemas

Nombre del alumno	Problemas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Liz		Y'	X		X	X	sc	X		sc = 1, x = 4, : ::■ y x!! = 1
Ala	se	X	se	X	SC	SC	se	sc	SC	sc = 7, x-2,pc-0y^ = 0
Cri	X	X	X	X	x	X	X	X	X	sc = 0. x = 9, pc = OyY-0
Mar	se	X	X	V	X	X	X	sc	V	sc = 2, x ~5, pe - 0 y si = 2
Sam	X	X	X	X	SC	X	X	X	X	sc = 1, x = 8, pc = Oy A/ = 0
Sel	X	"V	se		X	X	X	X	X	sc = 1)x=:6Jpc = 0y^-2
Rol	X	X	se	X	SC	SC	SC	sc	X	sc = 5, x =■ 4, pe = 0 y J = 0
Ber	se	X	se	X	X	X	SC	X	X	[illegible]
Moi	se	x:	se	X	SC	X	V	X	X	sc = 3, x = 4, pe = 0 y Aí = 2
Sha	se	X	se	X	X	V	SC	sc	X	sc = 4, x = 4, pe = 0 y V = 1
Jor	X		X	X	X	X	SC	X		sc = 1, x = 6, pe - 1 y A/= 1
Ime	se		se	X	X	A/	X	sc	X	sc = 3, x = 4, x ■■■ '■ y - 1
Ada	se	A/	X	A/	SC	-'J	A/	X	A/	sc - 2, x = 2, pe = 0 y - 5
Elv		X	se	se	X	SC	A/	X	X	sc- 3, x = 4, ,x =' y A/= 1
Agu	X	X	se	X	X	X	X	X	X	[illegible]
Pat	X	so	se	X	X	x	X	sc	X	sc - 3, x = 6, pe - 0 y A/ - 0
Rey	X	X	X	SC	SC	SC	SC	sc	sc	sc = 6,x = 3] pc = 0y A/ = 0
Jav	X	c	se	X	X	X	X	X	X	[illegible]
Vic	so	X	se	X	X	X	X	X	X	sc - 2, x - 7: pe = 0 y V = 0
Har	X	X	X	X	X	X	X	X	X	[illegible]
San	se		X	X	X	SC	SC	X	X	SC - 3: x - 5, x y yJ = Q
Yes		X	se	V	X	X	X	X	V	sc = 1, x - 5, x •- y V = 2
Kar		X		V	X	X	V1	X	V	sc = 0, x = 4, x xy 3
Gui	se	X	se	X	X	X	SC	sc	X	sc = 4, x = 5, pe = 0 y A/ = 0
Emí	se	X	se	X	X	SC	X	sc	X	sc = 4, x - 5, pe = 0 y A/ = 0
Totales	sc = 11 x = 10 pc^l Xo	se = 1 K = 16)c = 3	SC - 15] x = 9 pc = 1 A/ = 0	sc - 2 x = 17 JC ~ 1 A/-5j	> TD X ; en 11 II II 3 o coi en	sc = 6 x = 16 pe = 0 A/ = 3	sc = 9 x= 12 pc = 0 A/ = 4	sc = 9 x = 16 pc = 0 A/ = 0	sc = 2 x = 17 pe - 2 A/ = 4	Destacan sc = 4, x = 21, V = 1

se =sin contestar x = mal contestado = parcialmente correcto x = contestado correctamente

En lo que respecta al análisis que se presenta al final de cada ejercicio o problema, el orden ascendente en que se presentan las respuestas que dieron los adolescentes va de un desarrollo intelectual menor a otro más progresivo. Es decir, en dichas respuestas hay una diferenciación gradual. Vemos poco a poco en los estudiantes estructuras de pensamiento más avanzadas, un desarrollo cognitivo más completo, superior e integrador y con mayor flexibilidad. Esto depende, en cierta medida, de los esquemas y de las estructuras cognitivas generales e internas de cada aprendiz; al igual que de su forma exploratoria, de su experiencia y de cómo utilice lo aprendido (conocimiento previo).

Recordemos que en todo este proceso de querer dar respuesta a los ejercicios, el alumno se enfrenta a un desequilibrio que resuelve haciendo un esfuerzo cognoscitivo para encontrar un equilibrio entre él mismo y su ambiente, como una integración de ideas de manera dinámica entre el sujeto y el objeto.

Las respuestas que dieron los alumnos a los diferentes ejercicios y problemas nos revelan que el pensamiento de la mayoría de estos estudiantes es lineal y concreto. Y que aún no desarrollan un pensamiento flexible que sea aplicable a todas las situaciones problemáticas que se les presenten. Su capacidad de aprendizaje generalizado es limitada. Lo que se aprende en un contexto no se transmite fácilmente a otros contextos. Por ejemplo, en la resolución de los problemas 1 y 3, los alumnos no utilizaron supuestos que los llevaran poco a poco a la obtención de la fórmula algebraica que se les solicitó. Lo que nos muestra que aún no han logrado acceder a las operaciones formales.

En lo referente al análisis hecho de los ejercicios relacionados con el tema de funciones y sus gráficas nos revela que los alumnos carecen de conocimientos fundamentales, como lo son la comprensión de expresiones algebraicas y la localización de una pareja de puntos en el plano cartesiano, para operar con funciones y poder aplicarlos a problemas. También tienen problema para comprender el comportamiento de la gráfica de una función y relacionarlo con su fórmula.

Por otro lado, la aplicación a los estudiantes de los tres ejercicios relacionados con el tema de operaciones con expresiones algebraicas, nos permitió descubrir que éstos aún no adquieren seguridad y destreza en el manejo de los procedimientos algebraicos, ni son capaces de utilizarlos para resolver problemas. Aún tienen dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas.

En lo que se refiere a la resolución de los ejercicios y los problemas relacionados con el tema de ecuaciones lineales, nos percatamos que en los diferentes tipos de las respuestas que dieron los estudiantes la gran mayoría no han aprendido las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra. Además tienen dificultades al enfrentarse a relaciones de segundo orden y a relaciones existentes entre relaciones. Únicamente ven relaciones limitadas e inmediatas con escasa conciencia de las interrelaciones, es decir, no son capaces de cumplir todas las condiciones de un problema (características de un pensador concreto). Muy pocos alumnos tienen un pensamiento reversible. Manejan y coordinan datos mentales interiorizados con datos reales simultáneamente.

En cuanto al tema de sistemas de ecuaciones lineales, los instrumentos del diagnóstico nos permitieron ver que su enseñaza-aprendizaje no se dio mediante el planteamiento y la resolución de problemas que condujeran a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución *por* el método de sustitución. Por lo tanto fue difícil para los estudiantes resolver problemas algebraicamente.

Pasando al tema de productos notables y factorización, el análisis de los instrumentos del diagnóstico nos permitió ver que la mayoría de los alumnos en estudio no han aprendido a extraer el factor común de un polinomio; no efectúan correctamente la simplificación de términos, la jerarquía de operaciones, las leyes de los exponentes y el uso de paréntesis; no aplican los productos notables al cálculo numérico; ni tampoco los utilizan en la resolución de problemas; no desarrollaron correctamente el binomio al cuadrado; ni el producto de dos binomios con un término común; no saben lo que es un trinomio cuadrado perfecto. Todo esto ha dificultado que los estudiantes logren aprender la noción de productos notables y factorización y que logren hacer abstracciones y generalizaciones.

En lo que respecta a la teoría que sustenta este trabajo de investigación podemos destacar que Jean Piaget determinó a la adolescencia como el inicio del pensamiento de las *operaciones formales.* Además, este autor señala diferentes periodos del desarrollo del pensamiento, ios cuales son intégrateos, su orden de sucesión es constante y aunque este autor haga mención de edades físicas vemos que más bien están características corresponden a edades mentales. Cada etapa subsiste en las siguientes como sub-estructura, sobre la cual las etapas anteriores desarrollan nuevas características.

La aportación principal de este trabajo es que dentro de cada etapa existen también diferentes subestatios en los que tienen lugar diferentes tipos de desarrollo cognitivo, cada vez más avanzados y que hacen posible que poco a poco se vaya llegando al siguiente periodo de desarrollo de los que nos habla este autor.

Finalmente podemos decir que los alumnos en estudio se encuentran dentro de las operaciones concretas.

Anexos

Cuestionario[16]

Secretaría de Educación
Departamento de Secundarias Generales
Departamento Regional Lerma Zona Escolar No. 08
Escuela Secundaria Oficial No. 710 "Miguel Hidalgo y Costilla"

Última evaluación de Matemáticas III

Nombre del alumno:____________________________, Fecha de nacimiento /________/
d m a

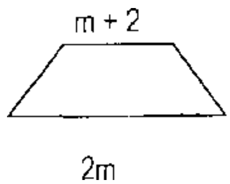
INSTRUCCIONES GENERALES: Realiza lo que en cada problema o ejercicio se te pide, NO borres nada y realiza aquí todas las operaciones necesarias.

I) Completa la siguiente tabla y represéntala en el plano cartesiano: (p. 158)

II) Bosqueja en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones: (p. 191) y = -3x, y = ~2x, y = -x, y = x, y - 2x, y = 3x

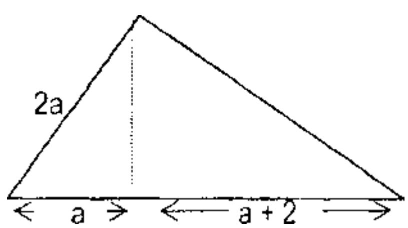
[16] Todos los ejercicios y problemas fueron tomados del **Libro para el maestro de matemáticas, SEP 1995.** Enfrente de cada uno sc escribe la página.

Indica el perímetro de la siguiente figura, (p.117)



Perímetro =

IV) Indica el área de la siguiente figura, (p. 194)



Área =

V) Encuentra los términos perdidos: (p.195)

$(x^2 +$ $\qquad\qquad\qquad$ $+ 3x - 2) = 3x^2 - 10x +$

VI) Encuentra el valor de x. (p.167)

$7x + 5 = 4x + 20'$

$2(4x + 7) - 3(x + 2) = 18$ (p. 169)

VII) Encuentra los valores de x e y. (p.174) $2x-y \sim 3$
$x + y = 12$

VIII) Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado, (p. 197) $2x^2+(3x+1)^2 =$

$(5x-3)^2-(2x + 1) (2x -1) =$

Completar de manera que se cumpla la identidad, (p.199)

a) $x^2 - 4 = (x +$

b) $(3a + O)^{2\,=}\,Q]^{+}\,O^{\,+b2}$

Completar de manera que, en cada caso, obtengamos un trinomio cuadrado perfecto, (p. 199)

a) $a^2 + 2ab$ b) $25x^2$-40y

XI) Resuelve los siguientes problemas:

1) Un agente de ventas recibe dos ofertas de empleo de una misma compañía: un salario base mensual de N$ 500 más un 8 % de comisión sobre las ventas, o bien un 15 % de comisión sobre las ventas, sin salario base: Escribe en cada caso una fórmula para indicar como dependen los ingresos del agente de las ventas que realiza. Construye una tabla para comparar los ingresos posibles en cada caso; por ejemplo, ¿cuánto recibe en cada caso si vende 1000, 2000, 3000,... pesos? ¿En qué casos le conviene aceptar una u otra oferta? (p. 179)

(

2) Con $ 310 puedo comprar cuatro pantalones o bien tres pantalones y cinco pares de calcetines. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada par de calcetines? (p. 150)

3) Mostrar que si se resta 1 al cuadrado de todo número impar se obtiene un número divisible entre 4 y 8. (p. 151)

4) Se reparten 133 chocolates entre dos grupos de alumnos. El segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. ¿Cuántos chocolates recibe cada grupo? (p. 165)

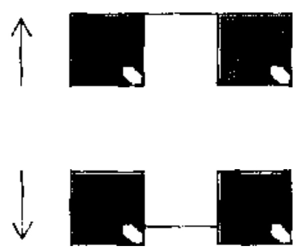
5) En una tlapalería me venden la lata de pintura \$31 más barata que en otra, de tal manera que con la misma cantidad de dinero, en la primer tlapalería puedo comprar cinco latas mientras que en la otra sólo puedo comprar cuatro. ¿A cuánto me dan la lata de pintura en la primer tienda? (p. 170)

6) En una función de teatro, los boletos de adulto se vendieron a \$ 30 y los de niño a \$ 25. Si se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto y en total se recaudaron \$ 4 700. ¿Cuántos de niño y cuántos de adulto se vendieron? (p. 173)

7) Encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77. (p. 207)

8) En un parque cuadrado que mide 100 m de cada lado se van a construir dos andadores, tal y como se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el valor de *x* para que la superficie de los andadores sea igual a la parte jardinada? (p. 207)

x



100 m

<—.100 m-------- >

9) Varios amigos se ganan $ 90 en una rifa, pero deciden compartir el premio con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan $ 3 menos. ¿Cuántos amigos eran? (p. 208)

La Concepción Coatipac, Calimaya Méx., a de del 2002

Resolución de ejercicios

En este apartado se presentan algunos procedimientos que los alumnos pudieron seguir para llegar a las soluciones de cada uno de los ejercicios, excepto aquellos que fueron mencionados en el capítulo 3 para llevar a cabo el análisis. Dicha numeración corresponde al examen que les fue aplicado.

Ejercicio 2 Bosqueja en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones:

y = -3x, y = -2x, y - - x, y = x, y - 2x, y - 3x

1) Elaborando tablas dando valores a x y sustituyendo dichos valores en cada una de las funciones dadas, localizando todos los pares de coordenadas que se obtienen en un solo plano cartesiano.

x	y = -3x
-3	(-3M-3) = 9
-2	(-3)(-2) = 6
-i	(-3)(-I) = 3
0	(-3)(0) = 0
1	(?3)(l)--3
2	(-3)(2) = -6
3	(-3)(3)=-9

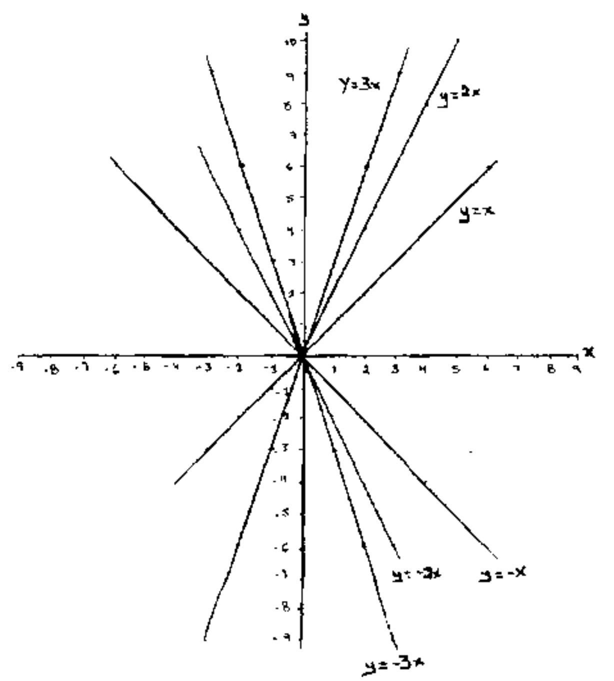
x	*y* - - 2x
-3	(-2)(-3) = 6
- 2	(-2)(-2) -4
-1	(-2)(-l) = 2
0	(-2)(0) = ü
1	(-2)(l) = -2
2	(-2)(2) = 4
3	(-2)<3) =

x	y = -x
-6	-(-6) = 6
-4	4
- 2	2
0	0
2	-2
4	-4
6	-6

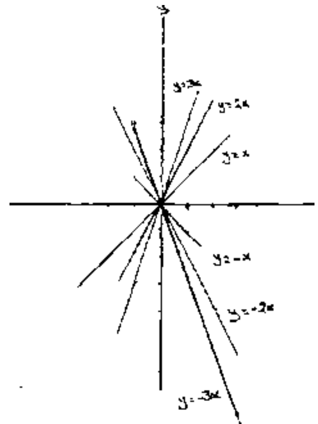
x	y - x
6	6
4	4
2	2
0	0
-1	-1
-2	-2
-3	-3

x	y = 2x
1	2(IW
2	4
3	6
4	8
5	10

x	y -■ 3x
-3	3(-3) - -9
- 2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6 '
3	9



2) Calculando mentalmente uno o dos valores de y , localizando el punto directamente en el plano cartesiano



Ejercicio 5 Encuentra los términos perdidos:

$(x^2 +$ $\quad$ $+ 8)-($ $\quad$ $+ 3x - 2) = 3x^2-10x +$

1) Colocando la resta de manera vertical:

Colocamos la resta de manera vertical		Consideramos el signo menos de la resta	Encontrando los términos desconocidos a partir de los términos conocidos
$(x^2 +$	$+ 8)$	$(x^2 +$ $\quad$ $+8)$	$(x^2 + -zx +8)$
(___	+ 3x - 2)	" (______l- 3x +2)	($\quad$ - 3x +2)
$3x^2$ -10x + ______		$3x^2$ - 10x+ ______	$3x^2$ - 10x+|

2) Obteniendo los términos perdidos por medio de las operaciones inversas:

Para obtener el tercer término perdido podemos hacer la resta de los terceros números de cada una de las partes de la resta. Es decir:

+ 8-(-2) =+8+ 2 =+10

Ahora para obtener el segundo término perdido primeramente consideramos el signo menos de la resta, de esa manera tendríamos un -3x, que al restarlo a cierto número nos de -lOx. Es decir, ( )-3x = -10x. En este caso tenemos una incógnita, que podemos obtener mediante las operaciones inversas:

⌊ -3x = ~10x

= —lOx + 3x

- -7x

Y por último para obtener el primer término perdido procedemos de la misma manera:

x^2 -3x^2 ~ ⌊

$- 2x^2 = \underline{|\quad\sim}$

— 2x^2 = —2x^2

3) Relacionando cada una de las partes de la resta para encontrar los términos perdidos: [x^2+(-7x) + 8] - [(-2x2) + 3x-2] = 3x^2 - 10x + (10)

+ - + * Haciendo la multiplicación de los signos

x^2 - 7x + 8 + 2x?-3x + 2 = 3x^2 - 10x + 10

3x^2 - 10x + 10 = 3x^2-10x + 10 > Reduciendo términos

4) Procediendo directamente: (x^2+ ||+ 8)-(|| + 3x- 2)
= 3x^2-10x+| x^2+ 2x^2 + 8)-(y_x _ 3x + 2) = 3x^2-10x+ 10 -

x^2+ 2x^2 + 8 - 7x - 3x + 2 =3x^2“10x+ 10 -

Este 10 resulta de sumar 8 + **2**

> Quitando los paréntesis y simplificando términos

Respuesta: Los términos "perdidos" son $-7x$, $-2x^2$ y 10 o bien $2x^2$, $7x$ y 10 en ese orden.

Comprobaciones:

1) Para los términos $-7x$, $\sim 2x^2$ y 10

$$x2 - 7x + 8$$
$$-(-2x2) + 3x - 2$$
$$3x2 \_ io_x + 10$$

2) Para los términos $2x^2$, $7x$ y 10

El signo menos de la resta + 2X¿ +8 afecta a todos los números

_ 4- ____ - 2) * **cambiándoles su signo.**

$- 7x -3x + x^2 +2x^2 + 10$

y **Simplificando términos**

$-10x + 3x^2 + 10$ *

Ejercicio 6 Encuentra el valor de x

a) $7x + 5 = 4x +20$

7x - 4x = 20 - 5

3x=15

x = ᵘx ₃

Comprobación:

7x + 5 = 4x+20

7(5) + 5 = 4(5) + 20 35+5 = 20 + 20

40 = 40

b) $2(4x + 7) - 3(x + 2) - 18$

8x + 14-3x-6 = 18

8x-3x +14-6 = 18----------------------------▶ o bien 8x-3x + 14-6- 18 = 0

5x + 8=18 5x—10-0

5x = 18 -8 5x = 10

5x = 10

Comprobación

2 (4x + 7) - 3 (x + 2) = 18 2[(4)(2) +7] - 3 (2 + 2) = 18 30-12= 18

18 = 18

Ejercicio 7 Encuentra los valores de x e y

2x-y = 3 x + y = 12

Soluciones posibles:

1) Resolución por el método de suma y resta:

2x-y^ 3 x +
^12

3x = 15
y =
x 3

y= 5

2(5)-y = 3
10-y = 3
- y = 3 - 10
- y = -7
7 = 7

Comprobación:
x + y = 12 5 + 7 = 12

2x - y = 3 2(5) - 7 = 3 10-7 = 3

2) Resolución por el método de sustitución

Ecuaciones

2x - y = 3

x + y - 12

Igualando x

x = 12 —y

Despejando x en la primera ecuación

2 (12-y)-y = 3
24-2y-y = 3
24- 3y =3
- 3y = 3 - 24
- 3y = -21

y~
Fy^]

Sustituyendo el valor de yen la 1ra ecuación

2x - y = 3
2x-7 = 3
2x = 3 + 7
2x = 10
V - JO
^ 2
F5|

Sustituyendo el valor de yen la 2a ecuación

x + y = 12
x + 7 = 12
x=_t2-7

Comprobación:

2x - y = 3
2(5) -7 = 3
10-7 = 3
3 = 3

x + y = 12
5 + 7= 12
12 = 12

Igualando y y = 12 - x

Despejando y en la primera ecuación

2x-y = 3
2x - (12 - x) = 3
2x - 12 + x = 3
3x-12 = 3
3x ~ 3 + 12
3x = 15

Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación

2x-y = 3
2(5) - y - 3
10-y = 3
- y = 3 - 10
-y-7

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación

x + y = 12
5 + y = 12 y_=
12-5 y = 7

Comprobación:

2x — y - 3
2(5) -7 = 3
10-7 = 3
3 = 3

x + y = 12
5 + 7 = 12
12=12

3) Resolución por el método de igualación

Despejamos y en ambas ecuaciones

$2x - y - 3$

$- y = 3 - 2x$

$y = - 3 + 2x$

$x + y = 12$

$y=12-x$

Igualamos las dos ecuaciones y

incógnita

$- 3 + 2x = 12 - x$

$2x + x = 12 + 3$

$3x = 15$

x=V

$x = 5$

Sustituimos el valor de x en una de las dos ecuaciones

En la primera ecuación

$2x — y = 3$

$2(5)-y = 3$

$10-y = 3$

$- y = 3 -10$

$\underline{- y -} \sim 7$

E3

En la segunda ecuación

$x + y = 12$

$5 + y=12$

$y = 12-5$

$|\underline{y = 7}|$

Comprobación:

$2x - y = 3$

$2(5)-7 = 3$

$10-7 = 3$

$3 = 3$

0 bien

$x + y = 12$

$5 + 7= 12$

$12=12$

O bien

$- 3 + 2x = 12 - x -3$

$+ 2(5) = 12-5 -3 +$

$10=12-5$

$7 = 7$

4) Resolución por el método gráfico

Despejamos *y* en ambas ecuaciones

$2x-y = 3$

$- y = 3 - 2x$

$x + y = 12$

$y = 12 - x$

$y = - 3 + 2x$

x	y = - 3 + 2x	(x.y)
-3	- 3 + 2(- 3) = - 9	(-3,-9)
-1	- 3 + 2(- 1) = - 5	(-1.-5)
0	- 3 + 2(0) = - 3	(0,-3)
1	- 3 + 2(1) = -1	(1,-1)
3	- 3 + 2(3) = 3	(3.3)

x	y = 12 -x	(x.y)
-3	12 - (- 3) = 15	(-3,15)
-1	12-(-1) = 13	(-1,13)
0	12 - (- 0) = 12	(0,12)
1	12-1 = 11	(1.11)
3	12-3 = 9	(3,9)

Ejercicio 8 **Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado**

a) $2x^2 + (3x + 1)^2 = 2x^2 + g_x2 + 6xj-1 - |11x^2+6x+1$

$3x + 1$
$3x + 1$
$3x + 1$
$9x^2$ t...3x_
$9x^2 + 6x + 1$

b) $(5x- 3)^2 - (2x + 1)(2x -1) - 25x^2-30x + gj-\wedge x^2- y21x^2-30x + 8$

$5x-3$
$5x-3$
$- 15x + 9$
$25x^2-15x$ $25x^2-$
$30x + 9$

$2x + 1$
$2x- 1$
$- 2x - 1$
_ $4x^2 + 2x$ $4x^2$
$- 1$ -i

$25x^2-30x+ 9$
$-4x^2$ $- 1$
$-21x^2-30x + 8$

Ejercicio 9 **Completar de manera que se cumpla la identidad**

a)) (x $x^2-4 = (x+2)\ (x-2)$

$\sqrt{4^2}$

2

x +

X-

$x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 4$

b) (3a + |)²=||+|| + b* > $(3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$

Como sabemos que el resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio cuadrado perfecto, cuyos términos son:

1) El cuadrado del primer término del binomio.
2) El doble producto del primer término del binomio por el segundo
3) El cuadrado del segundo término del binomio

En este caso sólo hay que elevar 3a al cuadrado para obtener el primer término del trinomio cuadrado perfecto, esto es $9a^2$, sacar la raíz cuadrada de b^2 y así obtenemos el término faltante del binomio que es y. Por último, obtenemos el doble producto del primer término del binomio por el segundo: 2 [(3a)(b)] = 2 (3ab) = 6ab

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 3a + b \\ 3a + b \\ \hline 3ab + b^2 \\ \underline{9a^2 + 3ab} \\ \hline 9a^2 + 6ab + b^2 \end{array}$$

Resolución de problemas

En este apartado se presentan algunos procedimientos que los alumnos pudieron seguir para llegar a las soluciones de cada uno de los problemas, excepto aquéllos que fueron mencionados en el capítulo 3 para llevar a cabo el análisis. Dicha numeración corresponde al examen que les fue aplicado.

Problema 2

Con $ 310 puedo comprar cuatro pantalones o bien tres pantalones y cinco pares de calcetines. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada par de calcetines?

1) Aritméticamente:

Operaciones		Respuesta:	Comprobación:		
77.5	I5.5				
4)310	5)77.5	Cada pantalón cuesta	77.50	15.50	77.50 x4
030	27	$77.50 y cada par de	x3 ____	x_5	310.00
0020	025	calcetines $15.50	232.50	77.50	

2) Algebraicamente:

Tenemos dos ecuaciones (un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:	Despejamos *p* en la 1er. ecuación:	Sustituimos el valor de *p* en la 2da. ecuación:	Respuesta:
4/7-310	4p = 310	*3p* + *5c* = 310	Cada pantalón cuesta $77.50 y cada par de calcetines $15.50
	310	3(77.5) +5c = 310	
3p + 5c-310	*P= ~V*	232.5 + 5c = 310	Comprobación:
	p=n.s	5c-310-232.5	1er. ecuación
		5c = 77.5	4(77.5) =310
		77.5	310 = 310
		c ——--------	
		5	2da. ecuación
		c = 15.5	

3(77.5)+ 5(15.5) = 310
231.5 + 77.5 = 310
310 = 310

Problema 3

Mostrar que si se resta 1 al cuadrado de todo número impar se obtiene un número divisible entre 4 y 8

1) Aritméticamente:

X^2	X^2- 1	x^1 -1 4	x^2-l 8
1^2	1-1=0	No M	No ee
3^2	9-1=8	2	1
5^2	25-1 =24	6	3
7^2	49-1=48	12	6
92	81 -1 = 80	20	10
11^2	121-1 = 120	30	15
55^2	3025-1 =3024	756	378
13472	1814409-1 = 1814408	453602	226801

Se cumple para todos los números impares excepto el uno.

2) Algebraicamente:

Primero habría que utilizar un lenguaje algebraico, así tenemos que:

Todo número impar podemos representarlo como (2a -1)² y de ahí representaríamos todo nuestro problema en una expresión algebraica.

(2a-1)² -1 _ 4ar²-4o +1 -1

4 ■ 4

_ $4a^2$ - $4a$

4

_ 4ט(ίכ-1)

4

= a(a-l)

4¿/(¿7~ 1)

"2 g **I**

I

4tf **fl -1**

T

a - $2m$ a - **+1**

Donde m es cualquier número natural

Problema 4

Se reparten 133 chocolates entre dos grupos de alumnos. El segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. ¿Cuántos chocolates recibe cada grupo?

1) Aritméticamente:

133
-19
114

057
2 JÍTÍ
14
0

57
+ 19
76

Respuesta:

El primer grupo recibe 57 chocolates y el segundo 76 chocolates

2) Algebraicamente:

x + x +19= 133

2x +19 = 133

2x = 133-19

2x=114

y - 114
^ 2

x=57

57
+ 19
76

Respuesta:

Un grupo recibe 57 chocolates y el otro recibe 76

Comprobación:

57
+ 76
133

Problema 5

En una tlapalería me venden la lata de pintura $31 más barata que en otra, de tal manera que con la misma cantidad de dinero, en la primer tlapalería puedo comprar cinco latas mientras que en la otra sólo puedo comprar cuatro. ¿A cuánto me dan la lata de pintura en la primer tienda?

5 (x —31) = 4x
5x-155 = 4x 5x-
4x=155
x = 155

155 Comprobación
- 31
124

155
x4
620

124
x5
620

Respuesta:
$124 Primer tienda

Problema 6

En una función de teatro, los boletos de adulto se vendieron a \$ 30 y los de niño a \$ 25. Si se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto y en total se recaudaron \$ 4 700. ¿Cuántos de niño y cuántos de adulto se vendieron?

1) Por tanteo:

2) Aritméticamente:

100	4700	1100	36.6 30)1100	44	J.3A 40x30 = 1200 gQ
X25	-_250Q—	2)2200	200	25)1100	140x25 = 3500
500	2200	02	200	100	40 1200 + 3500 = 4700
2QQ		00	20	0	2jÍó
2500		00			0
		0			

Respuesta: Se vendieron 140 boletos de niño y 40 de adulto.

3) Algebraicamente:

30x + 25x +25(100) = 4700
55x + 2500 = 4700
55x = 4700-2500
55x = 4700-2500
55x = 2200
Y - 2200/55
x = 40

Respuesta:

Se vendieron 140 boletos de niño y 40 de adulto.

Comprobación:

30x + 25x +25(100) = 4700 30(40) +25(40) + 25(100) = 4700 1200 + 1000 + 2500 = 4700

Problema 7

Encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77

Posibles soluciones:

1) Por tanteo o ensayo y error.

2) Algebraicamente con una ecuación de segundo grado y su resolución con la fórmula general:

x^2 + (x +1)* + (x + 2)» = 77

x^2 + x^2 + 2x +1 + x* +4x + 4 = 77

$3x^2$ + 6x+5 = 77

$3x^2$ + 6x + 5 - 77 = 0

$3x^2$ + 6x-72 = 0

a = 3, b = 6 y c = -72

,, _ -4ac

la

-6±^6^2-4(3X -72)

2(3)

-6±т/36+864

x~ 6

y- -6*^900

x " 6

w _ ~-6±30

6

¥4

A1* 6

X2 =

X1= -24-

6

$\boxed{\text{X1 =4}}$ X2=-6

Los números son: 4, 5 y 6

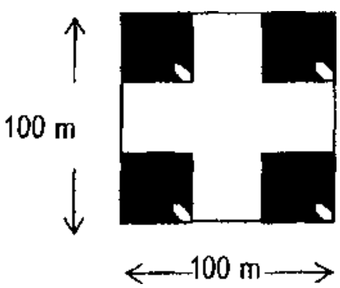
Comprobación

$4^2 + 5^2 + 6^2 = 77$

16 + 25 + 36 = 77

Problema 8

En un parque cuadrado que mide 100 m de cada lado se van a construir dos andadores, tal y como se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el valor de *x* para que la superficie de los andadores sea igual a la parte jardinada?



Posibles soluciones:

1. **Soluciones erróneas.**

   A la mayoría de los alumnos la figura presentada los llevó a dar una respuesta errónea.

   a) **Para alguien el valor de x puede estar representado por la cantidad escrita enfrente.**

   b) **Para otro, bastará dividir 100 entre 4 (las partes jardinadas),**

   c) **Por el otro, pareciera a simple vista que el parque estuviera formado por 9 cuadrados del mismo tamaño, lo cual no es cierto. Los alumnos que así comprendieron el problema siguieron uno de los siguientes procedimientos y creyeron encontrar la respuesta correcta.**[17]

Procedimiento 1	Procedimiento 2		Procedimiento 3
33.3	100	IIII.T	$9x^2 = 10000$
30)100	x100	9)10000	X^2 ~~~ Q 10000 v
010	10000	010	$x^2 = 1111.1$
001		0010	x = Vi 11 i.T
		00010	x = 33.3
		000010	

[17] El primer procedimiento lo llevaron a cabo cinco alumnos, y el segundo lo siguió un alumno.

2. **Algebraicamente con una ecuación de segundo grado y su resolución despejando la variable**

A = l²

A=100²

A = 10,000

Aj = 5,000

Aa = 5,000

(100-x)² = 5000

100-x = V5000

100- -x/5000 — x

100- 70.7 = x

29.3 = x

Respuesta:

x debe valer 29.3

Comprobación:

(H)O-.r)² =5000
(100-29.3)² -5000

(70.7)² = 5000
4998.49 = 5000

3. **Algebraicamente con una ecuación de segundo grado y su resolución con la fórmula general**

A = P

A ^IOO²

A = 10,000

Aj = 5,000

Aa = 5,000

(100-x) (100-x) = 5,000

10,000--200x + x^2 = 5,000

10,000-5,000 - 200x + x^2= 0

5,000 -200x + x^2=0

a = 1, b = 200yc = 5000

í — ~4ac
' 2a

x , -(-2OO)i7^2OO²-4(1X5000)
2(D

Y _ 2001/40000^20000
A 2

Y - 2001/20000
A “ 2

Y - 2001141.42
A ” 2

_ 200+141.42 X2 = 2Q0~14

X1= **X2=^l**

X1 = 170.52 $\boxed{\textbf{X2= 29.3}}$

Respuesta:

x debe valer 29.3

Comprobación:

10,000 -200x + x^2 = 5,000

10000 - 200(29.3) + 29.3^2 = 5000

10000 - 5860 + 858.49 = 5000 4140 +

858.49 = 5001.51

O bien

5,000-200x + x^2=0 5000-200(29.3) +

$(29.3)^2$= 0 5000-4140 + 858.49 = 0

5000 - 4998.49 = 0

Problema 9

Varios amigos se ganan $ 90 en una rifa, pero deciden compartir el premio con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan $ 3 menos. ¿Cuántos amigos eran?

1) Por ensayo y error.

2) Algebraicamente por medio de un sistema de ecuaciones lineales:

~~X

r>ll J A

^+3= 90
>1+1 n
ja..«u + J = U K n ' 1 n

90н-90/i(«+1) «(/>+!> « J

90n - 90n -90 = -3n(rrH)

•90 =-3n²--3n

$3n^2+3n-90 = 0$

3/?²+3/3-90 _ n
3 v

$n^2+n-30 = 0$

$(n + 6)(n-5) = 0$

n+6=0 n-5=0

n = - 6 |n ~ 5]

Respuesta:

Eran 5 amigos y les hubiera tocado de a $18, pero como decidieron compartir el premio con un amigo más les toco $15 a cada uno.

Comprobación: 18 15
5)90 6)90
0 0

Bibliografía

Alarcón Bortolussi, Jesús, et. al. Libro para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas, SEP, México, 1994

Alarcón Bortolussi, Jesús, et. al. Secuencia Y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria. Primera edición. SEP, México, D.F, 1994

Alarcón Bortolussi, Jesús y Barón Rodríguez, Higinio. Guía de estudio. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. SEP, México, D.F, 1995

Boletín ISCEEM. "Jean Piaget y la educación". Año VI, 3ª Época. Septiembre-octubre de 1987

Delahanty, Guillermo, et. al. Piaget y el psíconálisis. 1ª. ed., LIAM-Xochímilco, México, 1994

Delalain. Recueil des lois pendant le ministére de H. Fortoul du 2 décembre 1851 au 1er juillet 1856, t. II. 1, París, 1856

García Fernández, Antonio y Fabregat Deusdad, Artemio "La construcción humana a través de la equilibración de las estructuras cognitivas: Jean Piaget" en Constructivismo Y educación. Aznar, Pilar. Tirantto Blanch-pedagogía, Valencia. Coord. 1992

Gómez-Granell, C. y Coll, C. ¿De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo? Cuadernos de Pedagogía. I994

Gorman Richard M. Introducción a Piaget. Una guia para maestros. Ed. Paidós educador, España, 1986

Montes Heredia, María Delia, et al. Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria. Segunda edición. SEP, México, D.F, 2Ó00

Moreno Armella, Luis y Waldegg, Guillermina. "Constructivismo y educación matemática", en Lecturas. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. SEP, México, D.F, 1995

Nicherson, Raymond. Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. (Temas de Educación). 2ª. ed., Paidos, Barcelona, 1987

Nieto Herrera, Margarita E. Evolución del lenguaje. Porrúa, México, 1978

OCDE. Pour un enseignement rénové des Sciences, Mathématíques modemes, *Guide pour enseignement des mathématíques,* Athénes 17-23 novembre 1993

Ormrod, J. E., Educational Psychology: Developing Learners. Fourth Edition, 2003

Parra, Blanca M. "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas." en Lecturas. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. SEP, México, D.F, 1995

Paul Ernest, *"El uno* y *los muchos" en* Curso institucional de constructivismo. DECAD, México, 2003

Pérez Echeverría, María del Puy. et. al. La solución de problemas. Aula XXI. Edit. Santillana, Madrid 1994

Piaget, Jean e Inhelder Barbel. Psicología del niño. 14ª. ed. Morata, Madrid, 1969

Piaget, Jean. A dónde va la educación. México, Taide, I983

Piaget, Jean. Psicología de la Inteligencia. Psique, Buenos Aires, Argentina, 1977

Piaget, Jean. Seis estudios de psicología. Planeta, México, 1985

Revista Educación 2001. No. 27, agosto de 1997

Revista Foro de educación continua. Año 2. No. 8. CCECMEM. Diciembre-Enero-Febrero 1990

Revista La Mora. Pérez Ascué, Emma Irene. "Procesos de enseñanza-aprendizaje: teorías cognitivas". Año No. 28, Septiembre 1996

Revista Nexos No. 162, Junio de 1991

Revue de f enseígnement, des Sciences, No. 26, juin 1909

SEP. Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria, México, 1994

SEP. Planes y programas de estudio. Educación Secundaria. Matemáticas. México, 1993