INSTITUTO SUPERIOR DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEL ESTADO DE MÉXICO

IDENTIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN LINEAL POR ALUMNOS DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE GEOGEBRA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN INVESTIGACIÓN DE LA EDUCACIÓN

PRESENTA

LILIANA MARÍN RODRÍGUEZ
LICENCIADA EN CONTADURÍA

COMITÉ TUTORAL

TUTOR: DR. FERNANDO MEJÍA RODRÍGUEZ
COTUTORES: M. en C. MA. DEL ROCÍO NAVA ÁLVAREZ
MTRA. ANA ROSA FLORES VALDEZ

TOLUCA, MÉX. ENERO, 2021

DEDICATORIAS

A mi mamá, que me ha enseñado a luchar, a mantenerme firme y nunca decaída. Soy lo que soy gracias a ti. Tu bendición a diario me protege. Te dedico con todo mi corazón esta tesis, te amo mamá.

A ti papá, sé que me miras y me cuidas desde el cielo. Siempre estuviste ahí, para amarme, protegerme y guiarme. Nos querías y te entregabas en cuerpo y alma por tu familia. Gracias por todo, vives en mí, te amo.

Tendrán nuevas fuerzas; levantarán alas como las águilas; correrán, y no se cansarán; caminarán, y no se fatigarán. A ti mi esposo, tu recuerdo está conmigo todos los días.

A mi familia, por quien siento un profundo cariño y una gran admiración. Gracias por mostrarme el camino de la superación. Gracias por su apoyo y por ser mis guías.

AGRADECIMIENTOS

Gracias Dios, por todo lo que me das, por cada meta alcanzada y por cada sueño hecho realidad. Segura estoy que nunca me olvidas.

Agradezco al Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México, por darme la oportunidad de formar parte de su comunidad educativa. Por su invaluable e incansable labor, en cuanto a la generación y difusión del conocimiento en el ámbito educativo.

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Fernando Mejía Rodríguez, por su excelente asesoría, por su disposición, por su paciencia y constante apoyo. Gracias por compartir su tiempo y conocimiento para la realización de esta tesis.

A la M. en C. Ma. del Rocío Nava Álvarez, de quien he aprendido mucho, no solo en lo profesional, sino también en lo personal. Gracias por compartir conmigo su conocimiento. Sobre todo, gracias por su apoyo y por su amistad.

A la Mtra. Ana Rosa Flores Valdez. Gracias por sus aportaciones, sus comentarios y sugerencias fueron pieza clave para el logro del presente trabajo de investigación.

Agradezco a mis compañeros de maestría, por su apoyo y constante motivación. Los llevó en el corazón. Sin duda, amistades que se quedan para toda la vida.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado sistemas educativos para que los niños y jóvenes, futuros ciudadanos, lleguen a ser adultos exitosos, preocupándose constantemente del *qué* y el *cómo* aprenden (Trahtemberg, 2000). Situación que actualmente cobra especial trascendencia, pues tener determinados conocimientos y habilidades que puedan ser accionados en la vida cotidiana, no solo permite a los individuos acceder a mejores espacios laborales, sino que les concede la oportunidad de participar en la sociedad como ciudadanos crítico-reflexivos que toman decisiones consciente y autónomas en pro del progreso social y económico (Hopenhayn, 2003).

Desde hace algunas décadas, la sociedad internacional ha observado la influencia del conocimiento científico y tecnológico; no solo en el progreso económico, sino también en la calidad del espacio público, por lo que su difusión y desarrollo se han tornado como un asunto de gran importancia para las naciones. En particular, el conocimiento matemático, que en su calidad de ciencia refleja los intereses y preocupaciones de una colectividad; pues su lenguaje lógicamente estructurado permite la comprensión de fenómenos, la optimización de tiempo y recursos, y la minimización de errores, entre otras cosas. En general, dicha ciencia es sumamente útil para la resolución de distintas problemáticas presentes en la vida cotidiana (Marcellán, 2012).

A partir del siglo XX, distintos organismos internacionales de cooperación y mediación tomaron relevancia dentro de temas de política pública en el mundo, brindando asesoría en cuanto a estándares y sugiriendo normas a nivel mundial para la mejora del desempeño económico, la creación de empleo y el fomento de una educación eficaz. Una de las principales sugerencias de estos organismos en el ámbito educativo es la evaluación de los resultados de aprendizajes. Dicha evaluación mide la capacidad de los jóvenes estudiantes de distintos países al usar sus conocimientos y habilidades en lectura, matemáticas y ciencias, para enfrentar desafíos de la vida diaria (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) 2018).

Lo anterior ha dado lugar a la aplicación de pruebas estandarizadas de corte masivo, cuyos resultados permiten a los usuarios, encargados de políticas públicas, autoridades educativas, investigadores y docentes, entre otros, sustentar decisiones y acciones relevantes en sus contextos particulares de actuación (Hildehza, Valdés, & Cabrera, 2018). En cuanto a los resultados de la intervención de los países latinoamericanos en dichas pruebas, estos han sido poco alentadores, México no ha sido la excepción (OCDE, 2019). Así mismo, en el plano nacional, también existen mecanismos para evaluar los conocimientos y habilidades de los estudiantes del sistema educativo nacional, donde las tendencias se han mantenido de forma similar a las internacionales (Secretaría de Educación Pública (SEP), 2018b).

Así pues, la problemática que da origen a la presente investigación se visualizó desde la perspectiva del panorama general de la participación de los estudiantes mexicanos en las pruebas estandarizadas, tanto nacionales como internacionales. Teniendo como antecedente principal mi experiencia como profesora de Matemáticas en el Nivel Medio Superior (NMS), detectando en el desempeño de mi labor docente, que los alumnos de Bachillerato manifestaban dificultades para identificar los elementos de la función lineal, lo cual también pude corroborar en el análisis específico de los resultados de PLANEA 2017 derivados de la participación de la institución educativa en donde tuvo lugar la presente investigación.

Si bien, el hecho antes mencionado podría resultar evidente en diferentes asignaturas presentes en los distintos grados del currículum señalado por la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). Decidí concretar en la asignatura de Pensamiento Algebraico (PA), ya que dicha asignatura pudiese considerarse como el primer acercamiento que tiene el alumno con el estudio de la función lineal dentro de su trayectoria escolar preparatoriana, además de ser la que programáticamente designaba mayor tiempo al estudio minucioso de dicho objeto matemático. En consecuencia, el escenario de la problemática en cuestión tuvo lugar en la asignatura de PA, perteneciente al campo disciplinar de las Matemáticas y Razonamiento complejo, dentro del marco de la RIEMS (SEP, 2009).

Asimismo, el contexto de esta investigación ocurrió en el turno vespertino del segundo semestre del primer grado de Bachillerato Estatal (BE), en la modalidad de Bachillerato General (BG), en una Escuela Preparatoria Oficial del Estado de México (EPOEM), ubicada en el municipio de Toluca, dentro de una zona urbana. Donde los actores fueron 47 alumnos que cursaban el segundo semestre del primer grado de preparatoria, cuyas edades oscilaban entre 14 y 17 años; y una profesora que contaba con 5 años de experiencia impartiendo asignaturas relativas a las matemáticas.

De tal modo, que el presente trabajo se centra en el estudio de la función lineal, la cual es un objeto matemático de gran aplicación en distintas ciencias, debido a su gran potencialidad para modelizar diversas situaciones o fenómenos presentes en el día a día de los seres humanos, tal es el caso del análisis de ventas o costos, el suministro de medicamentos, el análisis químico de una sustancia, el consumo calórico diario de una persona o el desplazamiento de un móvil, solo por mencionar algunos ejemplos. No obstante su vasto uso, dicho objeto matemático es considerado como algo complejo, debido a que, existen distintas acepciones de él, además de que está integrado por diversos elementos que tienen su propia definición y particulares características (Janvier, 1987).

Otro aspecto que atribuye especial complejidad a la función lineal es que este, como muchos otros objetos matemáticos, puede ser representado en distintos modos, de acuerdo a las necesidades del usuario, hecho que también sucede con cada uno sus elementos. Entre sus posibles representaciones, se encuentra la representación verbal, la tabular, la algebraica y la gráfica. En resumen, tenemos un objeto matemático al que se le atribuyen distintos sentidos, integrado por diversos elementos definidos por sus propias particularidades, susceptibles de ser representados en distintas formas y que solo al engranarse dan a lugar a la función lineal como un todo (Riviere, 1990).

De tal modo, no es de sorprender que para algunos alumnos el estudio de este objeto matemático resulte complejo. Por su parte, autores como Duval (2006), Hitt (2003) y Zenteno & Mortera (2011), han expresado haber encontrado en las herramientas tecnológicas medios novedosos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en donde la modelación la simulación e interacción promueven la reflexión en el estudiantes, ampliando así la posibilidad de construir su propio conocimiento. Tomando en consideración esta posible potencialidad de las herramientas tecnológicas se decidió incorporar al presente trabajo un software matemático-educativo como medio alternativo para que el alumno de bachillerato identificara los elementos que integran la función lineal.

En la búsqueda de dicho software se estimó que este debía ser una herramienta que promoviera la reflexión en el estudiante y ampliara sus procesos cognitivos. De igual forma, el uso del mismo no debía representar un obstáculo para el alumno, por el contrario, era necesario facilitara y optimizara su trabajo físico y mental, de tal manera que la interfaz debía ser amigable y de fácil comprensión.

Además era necesario no implicara un gasto para ninguno de los actores del hecho educativo que se describe en el presente trabajo. De acuerdo a lo anterior se establecieron 6 criterios de selección de software, los cuales atendían a la gratuidad, compatibilidad, amigabilidad, flexibilidad, idioma e interfaz.

Derivado de esta primera selección, Geogebra junto con otro software resultaron elegidos para una siguiente fase, en donde ambos fueron revisados en cuanto a los requerimientos específicos necesarios para el estudio de la función lineal, sus elementos y formas de representación. Por lo que se examinó si dichos softwares permitían representar a dicha función y sus elementos en sus distintas representaciones y si posibilitaban la observación y modificación de parámetros. También se examinó si resultaría para el estudiante sencillo operar sus herramientas de trabajo y formas de guardado. Finalmente, Geogebra resultó ser el software seleccionado.

Las razones que sustentaron dicha decisión fueron las siguientes: se trataba de un software gratuito, diseñado exclusivamente para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de fácil implementación, compatible con casi todos los sistemas operativos, existente en idioma español, así como de uso flexible. Su ambiente de trabajo es amigable, posibilita le representación gráfica, tabular y algebraica de la función lineal, en donde es posible realizar y visualizar cambios en los parámetros de los elementos de la función, además ofrece la oportunidad de tener distintas opciones de guardado. Así, se plantea la siguiente interrogante, ¿cómo identifica el alumno de Bachillerato los elementos que integran la función lineal a través del uso de GeoGebra?

Con el propósito de dar respuesta a dicha interrogante, se desarrolló el presente trabajo, el cual se compone de 4 capítulos. En el primero de ellos, el capítulo 1, titulado *Aproximación al trabajo de investigación*, el lector puede encontrar las causas que dieron origen al presente análisis, partiendo del reconocimiento de las matemáticas como un asunto social, seguido de la trascendencia de las pruebas estandarizadas de corte masivo nacionales e internacionales en la medición de las habilidades matemáticas logradas por los estudiantes mexicanos. Más adelante, como precedente se ubicó al NMS dentro de la estructura de la educación obligatoria en México. Posteriormente, se describió al contexto que dio lugar a esta investigación.

Expuesto lo anterior, se expuso la complejidad de la función lineal y se presentó la propuesta del uso del software matemático-educativo Geogebra, como una herramienta alternativa para que los estudiantes identificar los elementos que integran a la función lineal. Posteriormente, se enunciaron los objetivos de la investigación y a través de la elaboración del estado del arte, tuvo lugar el primer acercamiento al conocimiento de las categorías de estudio: función lineal, software Geogebra y la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS). Como último punto del capítulo 1, en la justificación, se expresaron las razones por las cuales tomó pertinencia el presente trabajo.

Avanzando en el desarrollo de la investigación, en el capítulo 2, denominado *Referentes teóricos* y tecnológicos, se adentró al lector al conocimiento de las categorías de estudio. Iniciando por el análisis de la función lineal, donde como primer punto se estableció un bosquejo histórico-epistemológico de la misma. Después, se dilucidó el concepto de dicha función, sus modos de representación y su ubicación dentro de la clasificación de las funciones. Subsecuentemente, se abordaron las características de la función lineal en cuanto a su carácter de objeto matemático, describiendo cada uno de los elementos que la integran; entre los cuales podemos citar a la pendiente, la ordena al origen, la variable independiente y la variable dependiente.

En el segundo apartado de este capítulo, se estudió a la TRS y su vínculo con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que condujo al estudio del signo y de las representaciones, así como la relación de estas abstracciones con los objetos matemáticos y el pensamiento humano. Continuando, se transportó el tema de la representación al plano tecnológico, donde se planteó la conexión de dicho tópico con herramientas sensoriales que permitieran al estudiante la visualización y manipulación de los objetos matemáticos. En el tercer y último apartado del capítulo 2, se abordó al software matemático-educativo llamado Geogebra, describiendo sus generalidades, su ambiente de trabajo, así como sus vistas y herramientas básicas.

En el capítulo 3, se especificaron los *ejes articuladores de la investigación*. La cual adoptó un enfoque cualitativo-descriptivo, debido a que se pretendía conocer y comprender la conducta humana, a través de la descripción de los procesos cognitivos de los estudiantes en la ejecución de las tareas matemáticas asignadas. Esto, con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. De tal forma, que alineándose a tal pretensión se empleó como método de análisis, al estudio de casos. Dicho estudio permitió analizar profunda y exhaustivamente los casos que resultaron de interés para el presente trabajo. Entendiéndose, como casos de interés a la selección de las tareas matemáticas asignadas, ejecutadas por aquellos alumnos que mostraron procesos cognitivos relevantes, con apego a los objetivos de investigación.

Así mismo, como técnica se eligió a la entrevista estructurada basada en tareas, donde una vez seleccionados los casos particulares relevantes, se estructuró una secuencia de preguntas, la cual se pretendía permitiera realizar registros de observación y análisis. Subsecuentemente, se detalló el proceso metodológico llevado a cabo durante la labor investigativa, así como la descripción de las características más relevantes de la población objeto de estudio. Al cierre de este capítulo se dieron a conocer los instrumentos que permitieron la recolección de la información necesaria para cumplir con los objetivos de investigación y dar respuesta a la pregunta planteada.

El primer instrumento fue creado bajo el formato de formulario Google en línea. En donde se propuso una secuencia de actividades a desarrollar utilizando como herramienta al software matemático-educativo Geogebra. Procurando, que permitiera al estudiante explorar y analizar los elementos de la función lineal a través de la percepción, visualización y manipulación de objetos matemáticos dentro de la interfaz de dicho software. No obstante, durante el desarrollo del presente trabajo se tuvo en cuenta que el conocimiento y dominio del software Geogebra no era en sí uno de los objetivos principales de esta investigación, sino más bien una herramienta para facilitar el análisis por parte de los alumnos acerca de los elementos de la función lineal.

En consecuencia, se generó un segundo instrumento, esta vez diseñado exclusivamente en papel para revolver a lápiz por los estudiantes, por supuesto sin el empleo del software Geogebra. Dicho instrumento, fue estructurado como un cuestionario que comprendía 6 ejercicios de complementación, 5 de ellos elaborados con el propósito de que el estudiante pudiera analizar a cada uno de los elementos de la función lineal de forma particular y solo en el último de ellos se presentaban a dichos elementos trabajando en conjunto como parte de un todo.

Posteriormente, en el capítulo 4, se muestra el análisis de la información recabada tras la aplicación de los instrumentos de recolección de datos señalados en los referentes metodológicos del presente trabajo. En donde se analiza, describe y entrama en sentido amplio el trabajo empírico realizado por los estudiantes al desarrollar con ayuda de la herramienta Geogebra, las tareas que conformaban la secuencia didáctica del primer instrumento. Así mismo, a través de algunas imágenes de las tareas matemáticas ejecutadas por los estudiantes seleccionados como casos particulares y entrevistas realizadas a los mismos, se expone el proceso cognitivo seguido por ellos en cuanto a la resolución del segundo instrumento, el cual fue elaborado físicamente en papel y a resolver a lápiz por los estudiantes.

Con respecto a la estructura del análisis de la información, este se conformó de 3 apartados. El primero de ellos dirigido a identificar las variables dependientes e independientes que utilizó el alumno de Bachillerato en una función lineal. Así mismo, en el segundo apartado, se describió cómo dicho estudiante determinó la pendiente y la ordenada al origen en la misma función. Con respecto, al tercer y último apartado, este muestra datos relativos al análisis de los elementos que identificó el alumno en una función lineal a través del uso de GeoGebra.

En las conclusiones, se expone el producto derivado de la realización de la presente investigación. Identificando, que el estudiante de Bachillerato, utilizaba a la variable independiente y la variable dependiente como dos diferentes objetos referidos, cuyo significante virtual representaba la relación de las variables a través de una regla pormenorizada. Así mismo, se describe el proceso activo que el alumno llevó a cabo para determinar la pendiente y la ordena al origen, destacando dentro de dicho proceso, el transitar del estudiante entre las distintas representaciones de la función lineal, para lograr identificar a los parámetros que dan lugar a dichos elementos. Por otro lado, se mencionan algunas limitantes que tuvieron lugar durante el desarrollo del presente trabajo. Por un lado, las referentes a la ejecución y diseño del proceso e instrumentos de investigación y por otro lado, las relacionadas con la población y el contexto donde tuvo lugar el trabajo de campo.

En forma subsecuente, se reflexionó sobre las futuras investigaciones que podrían tener lugar a partir del presente trabajo, como son: el estudio de la función lineal dentro de contextos específicos, el estudio particular de algún elemento de la función en cuestión, así como el estudio de dicha función desde la visión de la Geometría o alguna otra referente a la introducción de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, se enunciaron algunas recomendaciones para los docentes e investigadores que estén interesados en el estudio de la función lineal o de Geogebra. Entre las que destacan, el uso del repositorio de actividades de Geogebra, la implementación en el trabajo del aula de las applets propias de dicho software. Así como también, la vinculación de Geogebra con otras herramientas digitales.

CAPÍTULO 1

APROXIMACIÓN AL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

1.1 Presentación

En este capítulo se abordan los acontecimientos que dieron cauce al presente trabajo. Se inicia por describir las dificultades que presentan estudiantes de primer grado de Bachillerato al identificar los elementos de la función lineal. Así mismo se pone énfasis en la necesidad de implementar escenarios alternativos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el mismo sentido, se establecen los objetivos de la investigación. Posteriormente, se hace mención de los antecedentes que sirvieron como base para fijar las categorías de investigación. Al cierre, se expresan los motivos por los cuales este trabajo cobra pertinencia.

1.2 El problema de la identificación de los elementos de la función lineal por el estudiante de Bachillerato

Dentro de este apartado se reconoce la trascendencia del conocimiento matemático en el avance científico, tecnológico y económico de la sociedad, lo que ha llevado a la trasmisión y difusión de esta ciencia como un asunto de política pública en el mundo. Organismos internacionales que fomentan y procuran el desarrollo socioeconómico en diversos países, sugieren acciones en distintos ámbitos para aminorar las brechas sociales y económicas de las regiones. En el campo de la educación, la evaluación de resultados de los aprendizajes es una de sus recomendaciones centrales. Dando lugar a la aplicación de pruebas estandarizadas de corte masivo en varias naciones. Los resultados de los estudiantes mexicanos en dichas pruebas no han sido del todo satisfactorios (OCDE, 2018).

Hecho que también se ha visto reflejado en las aulas. El escenario de la problemática que aquí se describe tiene lugar en la asignatura de PA, impartida en el segundo semestre del primer grado de BE en la modalidad de BG, en el municipio de Toluca en el Estado de México, dentro del currículum de la RIEMS. Los principales actores son estudiantes que cursaban el segundo semestre del primer grado de Bachillerato, los cuales presentaban dificultades para identificar los elementos de la función lineal; y una docente que propone el uso de software matemático-educativo como medio alternativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.2.1 El Carácter Social de las Matemáticas

La naturaleza abstracta de las matemáticas ofrece versátiles modos de pensamiento como la modelización, la inferenciación, el análisis y la síntesis (National Research Council (NRC), 1989; el cual puede ser traducido como Consejo nacional de investigación). Además facilita la identificación de falacias, el análisis crítico, la evaluación de riesgos y la sugerencia de alternativas (González, 1991). Invariablemente esta ciencia determina diversos asuntos, pues permite modelar la realidad y dar respuesta a distintas interrogantes. Su esencia fundamental son los cálculos matemáticos, los cuales hacen posible el conteo de objetos, realizar transacciones comerciales, medir tiempo, espacio, peso y moneda, ente otras tareas matemáticas presentes en la vida cotidiana (Álvarez, 2006).

No obstante, gran parte de la ciudadanía tiene poco claro el papel de las matemáticas dentro de su entorno (Niss, 1994), pues solo notan lo que se manifiesta mediante ellas, ignorando los cálculos matemáticos que hacen posible a determinados objetos o situaciones. Por ejemplo, desconocen que la búsqueda de información en navegadores de internet es factible gracias a los algoritmos; que la protección de los ecosistemas se diseña a partir de la teoría de matrices; que las pantallas de plasma de distintos dispositivos electrónicos son concebibles gracias a la mecánica de medios continuos o que en el estudio del funcionamiento de las células se usan ecuaciones diferenciales. En resumen, las matemáticas forman parte de diversas áreas del conocimiento, solo que se muestran disfrazadas como tecnología (Rius, 2012).

De modo que el conocimiento matemático resulta esencial para el desarrollo científico, tecnológico y económico de una sociedad, por lo que distintas naciones se han interesado en trasmitir y difundir esta ciencia a la ciudadanía (Niss, 1994). Al término de la segunda guerra mundial “los sociólogos y economistas centraron su interés en estudiar los sistemas educativos como eje de desarrollo económico” (Rodríguez, 2016, p. 42). Percatándose de lo evidente, no hay posibilidad de progreso en un país sin las matemáticas (Rodríguez, 2016). De esta forma, dicha ciencia adopta un carácter disciplinar, susceptible de ser enseñado y ser aprendido (Niss, 1994).

1.2.2 Evaluaciones de Resultados de los Aprendizajes

En las últimas décadas debido a la relación recíproca entre crecimiento económico, ciencia, tecnología y educación, es que esta última se ha tornado como una prioridad política a nivel mundial. Organismos internacionales como el Banco Mundial (BM), la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la OCDE, entre otras instituciones que tienen influencia en las políticas educativas de distintas regiones del mundo, han puesto un foco de atención en la educación en Latinoamérica, argumentando que aún falta mejorar (Maldonado, 2000). Por lo que han emitido una serie de recomendaciones para subsanar el rezago educativo de esta zona. La evaluación de resultados de los aprendizajes es una de sus recomendaciones centrales (Oreja & Vior, 2016).

1.2.2.1 Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA)

La OCDE, la cual agrupa 36 países entre los cuales se encuentra México (OCDE, 2018), promueve de manera trienal al proyecto PISA, el cual monitorea e identifica las tendencias en los conocimientos y habilidades de estudiantes de 15 años provenientes de varios países (OCDE, 2018). Dicho programa, cuya primera aplicación en nuestro país tuvo lugar en el año 2000, evalúa 3 áreas: lectura, matemáticas y ciencias. En cuanto a la emisión de resultados, estos se presentan en una escala global para cada una de dichas áreas. En cada ciclo de aplicación la prueba pone énfasis en una de ellas, mostrando los resultados en subescalas (OCDE, 2016).

La escala global de PISA establece 6 niveles. Los niveles 6 y 5, comprenden los puntajes más altos, donde se da muestra de la habilidad de algunos estudiantes para realizar actividades de alta complejidad cognitiva. Los niveles intermedios 4 y 3, incluyen puntajes buenos, pero no óptimos para la realización de actividades cognitivas más complejas. El nivel 2, agrupa a los puntajes con un desempeño mínimo. En el nivel 1a, se ubican puntajes que no alcanzan el mínimo necesario de desempeño. No obstante, existen puntaciones que quedan por debajo del umbral inferior del nivel 1a, por lo que se añade un nivel más, denominado 1b (OCDE, 2016).

1.2.2.1.1 México en PISA 2018- área de matemática

Para fines de esta investigación se consideraron los resultados de PISA en su versión más reciente, la cual tuvo lugar en el año 2018. Dicha prueba coloca la calidad educativa de México por debajo del promedio mundial. Con respecto al área de las matemáticas muestra que el 56% de los estudiantes mexicanos no alcanzaron el nivel básico de desempeño (Nivel 2), pues solo pueden realizar procedimientos rutinarios en situaciones familiares donde todas las instrucciones les son dadas. Generalmente contestan a preguntas asociadas a estímulos recién presentados, en cuanto las respuestas resulten obvias, así mismo tienen problemas para representar matemáticamente una situación de la vida cotidiana. En contraste, solo el 1% de los estudiantes de nuestro país logran niveles de desempeño de excelencia (Nivel 6 o 5) (OCDE, 2019).

La evaluación en el área de matemáticas en PISA se centra en medir la capacidad de los estudiantes para formular, usar e interpretar el lenguaje matemático en una variedad de contextos. Los alumnos deben ser capaces de razonar matemáticamente, así como de usar modelos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos de su entorno. El rendimiento en esta área descrito de esta manera, abarca más que la capacidad de reproducir conceptos y procedimientos adquiridos en la escuela, plantea la necesidad de utilizar a dicha ciencia como una herramienta que ayude a los ciudadanos a tomar decisiones adecuadas en beneficio de la sociedad (OCDE, 2017).

1.2.2.2 Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA)

En el plano nacional el examen PLANEA también evalúan los niveles de desempeño de los estudiantes mexicanos. Dicho instrumento abarca un conjunto de pruebas que la SEP y el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) desarrollaron a partir del ciclo escolar 2014-2015 (SEP, 2017). Su propósito es “conocer en qué medida los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en lenguaje y comunicación, y matemáticas en diferentes momentos de la educación obligatoria” (INEE, 2015, p. 11). La población objetivo son los alumnos que concluyen el preescolar, el sexto de primaria, el tercero de secundaria y el último grado de Educación Media Superior (EMS) (INEE, 2015).

1.2.2.2.1 EMS en PLANEA 2017- área de matemática

PLANEA en EMS consta de 4 aspectos a evaluar por cada área. En el caso del área de matemáticas estos aspectos son: sentido numérico y pensamiento algebraico; cambios y relaciones; forma, espacio y medida; y manejo de la información. La escala de resultados se divide en 4 niveles de logro, y da cuenta de la capacidad de los alumnos para emplear y transformar los aprendizajes matemáticos en herramientas que les permitan dar solución a diferentes problemas. El nivel IV de dicha escala, considerado el de más alto desempeño, concentra a los estudiantes con conocimientos valorados como excelentes, pues dominan eficientemente las reglas del lenguaje matemático, además de comprender la relación entre un fenómeno o situación y su modelado matemático (SEP, 2018a).

El nivel III incluye a los alumnos con conocimientos satisfactorios, que emplean el lenguaje matemático para resolver distintos problemas pero no pueden establecer la relación entre un fenómeno o situación y su modelado matemático. En el nivel II los estudiantes tienen un conocimiento elemental, pueden resolver problemas básicos, como expresar valores de incógnitas y resolver problemas de proporcionalidad. En el nivel I se encuentran todos aquellos bachilleres que presentan dificultades para operar las reglas del lenguaje algebraico, como las leyes de los signos, operaciones con fracciones, porcentajes, etc. (SEP, 2018a). Los resultados de PLANEA pueden ser consultados por entidad federativa, modalidad de subsistema, escuela y alumno (SEP, 2018a).

Para efecto de esta investigación se consideraron los datos de la versión más reciente de PLANEA, la cual tuvo lugar en el año 2017. En cuanto al área de matemáticas señala lo siguiente: el 66% de los estudiantes que cursaban el último grado de EMS en México en el periodo de aplicación de dicha prueba, se ubicaron en el nivel I, mostrando poco dominio de la aritmética, deficiencias en el uso del lenguaje algebraico, dificultades para reconocer y establecer, algebraica o gráficamente, la relación de dependencia de dos variables, así como conflictos para reflexionar sobre la naturaleza y aplicación del lenguaje matemático como una herramienta para dar solución a problemas de la vida diaria (SEP, 2018b).

1.2.3 La Ubicación de la EMS en la Educación Obligatoria en México

La educación obligatoria en México está conformada por 2 niveles educativos: Básico y Medio Superior (INEE, 2018). La educación básica se divide en 3 niveles, iniciando en la educación preescolar, la cual atiende a niños de 4 y 5 años de edad, su duración es de un 1 año para los niños de 5 años y de 2 para los de 4 años; seguida de la educación primaria, que se imparte a niños de entre 6 y hasta 14 años de edad, la duración de los estudios es de 6 años; posteriormente se cursa la educación secundaria, lo que en otros países es considera como secundaria baja, con duración de 3 años para quienes hayan concluido la educación primaria. Generalmente está dirigida a la población de 12 y hasta 16 años de edad (SEP, 2006).

La EMS, se integró a la educación obligatoria en el año 2012 (INEE, 2018). La mayoría de las escuelas de este nivel educativo siguen un plan de estudios de 3 años. La edad idónea de ingreso al Bachillerato son los 15 años; sin embargo puede extenderse hasta los 18 años. Consecuentemente la edad de egreso va de los 18 a los 21 años. Se reconocen 3 modalidades de oferta: escolarizada, semiescolarizada y no escolarizada. La escolarizada corresponde a la educación tradicional en la que los estudiantes acuden regularmente a la escuela en promedio 8 horas diarias. Atiende a planes y programas de estudio, estructurados en asignaturas, con una carga horaria hora/semana/mes, definidas por semestre (SEP, 2006).

Esta modalidad se organiza en 3 subsistemas: BG, que ofrece una preparación propedéutica para continuar a la educación superior; Bachillerato Tecnológico (BT) el cual cuenta con carácter bivalente, pues ofrece preparación propedéutica para continuar a la educación superior y al mismo tiempo prepara a sus estudiantes en una carrera técnica; y Profesional Técnico que también tiene carácter bivalente, pues ofrece a sus estudiantes preparación propedéutica para continuar a la educación superior, aunque su objetivo principal es capacitar a sus estudiantes en distintos ámbitos de carácter técnico para introducirse rápidamente al mercado laboral (SEP, 2006).

Por otro lado tanto la modalidad de oferta semiescolarizada como la no escolarizada en la EMS, están dirigidas a la población que no tiene la posibilidad de asistir de forma regular a las instalaciones de alguna institución educativa ya sea por discapacidad, por combinar los estudios con el trabajo remunerado o labores domésticas; o por habitar en comunidades lejanas en las que no se cuenta con otras opciones educativas (Dirección General de Bachillerato (DGB), 2013). En ambas modalidades no se establecen tiempos para la conclusión de los estudios, ni el orden y forma en la que se debe transitar por el plan de estudio. La trayectoria curricular es libre, pues el estudiante elige las asignaturas a cursar y el orden en el que las atiende (DGB, 2013).

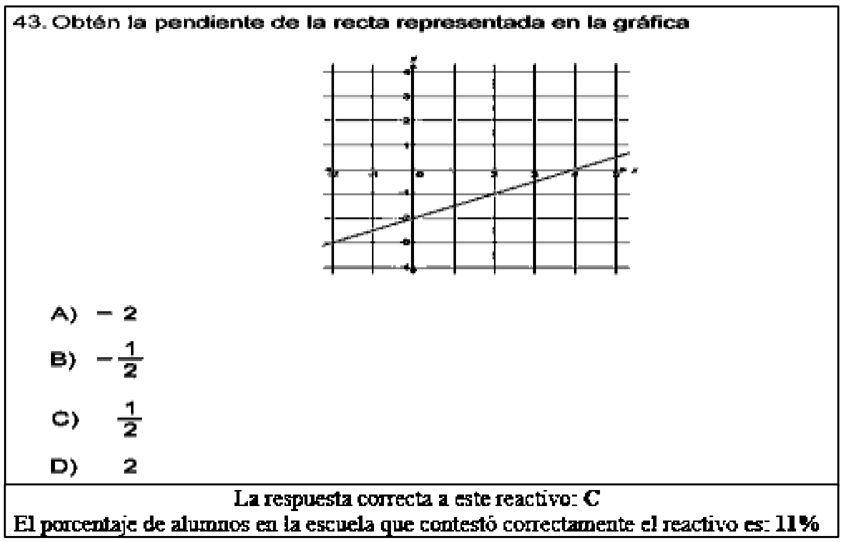
El Bachillerato Estatal (BE), que es entre otras una variante del BG, comprende a las escuelas preparatorias dependientes de la autoridad educativa estatal y de sus organismos descentralizados (Secretaría de Asuntos Parlamentarios del Estado de México (SAPEM), 2012). Esta variante de Bachillerato dentro del Estado de México engloba a los planteles de control oficial, a cargo de las Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México, además de los TeleBachilleratos y los planteles de los Colegios de Bachilleres del Estado de México (COBAEM)(SEP, 2016).

1.2.4 El contexto que da origen a la investigación

En el año 2018, los docentes que laboraban en el campo disciplinar de las matemáticas en el turno vespertino de una Escuela Preparatoria Oficial del Estado de México (EPOEM), perteneciente al subsistema de BG, en la modalidad de BE, ubicada en la colonia Universidad del municipio de Toluca, en el Estado de México, se reunieron para analizar los resultados en el área de matemáticas de su institución en la prueba PLANEA 2017. Percatándose que el 68% de los estudiantes que realizaron dicha prueba se encontraban en el Nivel I, es decir, presentaban deficiencias para operar las reglas básicas del lenguaje matemático. Posteriormente, los profesores dieron respuesta a dicha prueba y más adelante examinaron que reactivos contaban con el menor margen de acierto. Detectando que de los 50 planteamientos en el área de matemáticas de PLANEA 2017, los únicos 2 relativos a las funciones lineales tenían los porcentajes más bajos.

En la figura 1 se muestra el reactivo número 43, en el aspecto cambios y relaciones del área de matemáticas de PLANEA-2017. En donde los estudiantes de la EPOEM en cuestión, que participaron en la prueba, debían determinar el valor numérico de la pendiente de la recta, partiendo del análisis de los parámetros que mostraba la representación gráfica de la misma. Para esto, era de fundamental trascendencia que contaran con conocimientos sobre el concepto de pendiente, las formas de determinar su valor numérico, así como de los posibles casos en que este elemento de la función lineal adopta un sentido creciente, decreciente o constante. Solo el 11% de los alumnos que participaron en la prueba seleccionaron la respuesta correcta.

Figura 1. Reactivo número 43 del área de matemáticas de la prueba PLANEA 2017


43. Obtén la pendiente de la recta representada en la gráfica

A) -2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

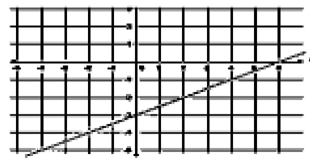
La respuesta correcta a este reactivo: **C**

El porcentaje de alumnos en la escuela que contestó correctamente el reactivo es: **11%**

Fuente: SEP (2018a)

En el reactivo número 46 los estudiantes tenían la oportunidad de seleccionar dentro de 4 opciones, cual ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen correspondía a la recta representada gráficamente. Para cumplir con lo solicitado debían conocer la estructura de la ecuación requerida e identificar sus elementos, así como relacionar adecuadamente la representación gráfica de los mismos con su representación algebraica, a fin de identificar su valor numérico y posteriormente estructurar la ecuación. 18% de los estudiantes que participaron en la prueba marcaron la respuesta correcta.

Figura 2. Reactivo 46 del área de matemáticas de la prueba PLANEA 2017



¿Cuál es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen?

A) $y=\frac{1}{2}x-3$

B) $y=2x-3$

C) $y=\frac{1}{2}x+6$

D) $y=2x+6$

La respuesta correcta a este reactivo: A

El porcentaje de alumnos en la escuela que contestó correctamente el reactivo es: 18%

Fuente: SEP (2018a)

Lo anterior evidenciaba que los estudiantes de la institución antes mencionada no contaban con conocimientos sólidos acerca de la función lineal y tenían problemas para operar sus elementos e identificarlos en sus distintas representaciones. En el marco del currículum que fija la RIEMS para la modalidad de BE en el subsistema de BG, dicho modelo matemático es abordado en distintos campos disciplinares, atendiendo a sus respectivos enfoques. En el campo disciplinar de las matemáticas, la función lineal es estudiada bajo la perspectiva de 3 ramas de dicho campo: inicialmente en el curso de PA, durante el segundo semestre del primer grado de Bachillerato, posteriormente en cuarto semestre del segundo grado en Geometría analítica y finalmente en quinto semestre en tercer grado en Cálculo diferencial (SEP, 2009).

El plan de estudio de la asignatura de PA, se ocupa de 4 temas centrales: introducción a las funciones, la función lineal, función cuadrática y ecuaciones; dedicándole una unidad de estudio a la función lineal, lo que permite un análisis minucioso de las características, propiedades, elementos y representaciones de dicha función, permitiéndole al alumno analizar a este modelo matemático en un sentido más amplio (SEP, 2009). Sin embargo, en mi práctica docente he observado que los estudiantes de PA tienen problemas para reconocer la relación de dependencia de 2 variables, identificar los elementos de la función lineal y deducir su valor numérico.

Además de tener dificultades al tratar de establecer la relación entre las distintas representaciones de la función lineal, así como para identificar el ángulo de la pendiente de una recta en su representación gráfica, deducir a partir de dicha representación si este elemento es negativo, positivo, indefinido o nulo; determinar la dirección de la recta basándose en dicho valor, percibir cual es el desplazamiento que experimenta la recta al cambiar la magnitud numérica de la ordenada al origen, deducir la ecuación de la función a partir del análisis de su representación gráfica, además de consideran al uso de tablas o graficas como parte de un proceso y no como diferentes medios de expresión de la función. Obstáculos que, unidos a variados factores motivacionales y actitudinales, merman su desempeño y comprensión de las matemáticas.

Por lo tanto, los principales actores del hecho educativo que aquí se describe son: estudiantes que cursaban el segundo semestre del primer grado de Bachillerato y una docente de matemáticas. El escenario tiene lugar en la asignatura de PA, impartida en el segundo semestre del primer grado de preparatoria dentro del currículum de la RIEMS, en el turno vespertino de una EPOEM, perteneciente al subsistema de BG, en la modalidad de BE, ubicada en la colonia Universidad del municipio de Toluca, en el Estado de México.

1.2.5 La complejidad del objeto matemático función lineal

La complejidad de la función lineal radica inicialmente considerando las distintas acepciones que se tienen sobre el concepto función. Entre las más comunes podemos encontrar las siguientes: función en términos de variable: la cual alude a la relación entre variables, donde a cada valor de la última variable le corresponde únicamente un valor de la primera variable. Función en términos de conjunto de parejas ordenadas: donde este objeto matemático es considerado como un conjunto de pares ordenados, el primer valor en los pares ordenados es la entrada, y el segundo valor es la salida. La función también puede ser considerada como una regla de correspondencia donde dicha regla asigna un elemento único de un conjunto A, a cada elemento único de otro conjunto B (Prada, Hernández, & Ramírez, 2016).

La función lineal es un tipo de función cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. Se define por la forma algebraica $f(x) = mx + b$ o bien por la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen, cuyo modelo matemático es $y = mx + b$. Su representación gráfica es una línea recta. El elemento variable independiente, generalmente se representa por la literal x, simboliza los diversos valores numéricos que puede tomar esta variable dentro de un conjunto de números específico, llamado dominio. La variable dependiente es representada por la letra y, simboliza los diversos valores que puede tomar un conjunto de llegada o final, también llamado conjunto recorrido, imagen, rango o codominio (González, 2015).

La pendiente, representaba por m, se define como el grado de inclinación de una recta con respecto al eje de las abscisas, indica el número de unidades que incrementa o disminuye y, cuando x aumenta; la ordenada al origen representada por b, es la distancia del origen al punto (0,b), este se encuentra sobre el eje de las ordenadas, por lo que es la intersección de la recta con dicho eje. Los elementos que integran a la función lineal se denotan generalmente más no únicamente por las literales señaladas, ya que estas pueden adoptar otras letras del alfabeto (González, 2015).

La función lineal como los demás tipos de funciones se hace tangible a través de sus representaciones, las cuales pueden ser de tipo verbal, algebraica, tabular y gráfica. La representación verbal, se da mediante el lenguaje natural, se utilizan palabras y expresiones propias de la lengua. En la representación algebraica se utilizan fórmulas de tipo algebraico, en las que se visualiza la expresión que relaciona las variables. En la representación tabular, se identifican valores asociados de la variable independiente y dependiente, ordenados en tablas. La representación gráfica se apoya de elementos como el del plano cartesiano, los pares ordenados y otros del mismo estilo (Prada et al., 2016).

1.2.6 Otra forma de enseñar y aprender matemáticas: la propuesta del uso de GeoGebra

Tradicionalmente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el alumno pasa el tiempo realizando ejercicios en lenguajes de signos, utilizando papel y lápiz. Por su parte, el docente introduce los temas de estudio haciendo uso del discurso oral y se apoya del pizarrón. Situación que sin duda es de gran utilidad para el aprendizaje de las matemáticas; Sin embargo, cuando se abusa de estos recursos y se cae en la monotonía, los estudiantes pierden fácilmente el interés en tanto en la clase, como por la realización actividades de aprendizaje tanto dentro como fuera del aula. La falta de motivación por parte de los estudiantes trae consigo desinterés, desencadenando problemas de aprendizaje, que posteriormente pueden terminar en reprobación o peor aún en deserción (González & Franco, 2002).

Es importante que los profesores rompan la monotonía en sus clases y empleen nuevas técnicas motivadoras, con la finalidad de que sus alumnos adquieran el gusto por las matemáticas, aceptando a esta ciencia como algo interesante y trascendente en sus vidas. Según los estudios de González & Franco (2002) existen leyes que configuran el aprendizaje. Tal es el caso de la ley de la novedad, al cual enuncia, que todo acontecimiento novedoso se aprende mejor, o la ley de la Pluralidad donde el aprendizaje es más consistente y duradero cuantos más sentidos estén involucrados. Así mismo Gallese & Lakoff (2005) y Hitt (2003) sugieren ir más allá de los medios tradicionales de enseñanza, asegurando que las modalidades sensoriales como la visión, el tacto o el oído mejoran la comprensión de los objetos matemáticos.

En el caso de la función lineal, su comprensión radica enormemente en el análisis del cambio de los parámetros de sus elementos en sus distintas representaciones, así como en la integración de los mismos en un mismo modelo matemático, por lo que el ambiente estático del pizarrón, del papel y del lápiz, algunas veces no favorece el proceso de su modelización (Martínez, 2013). Con el ánimo de sugerir el cambio de escenarios tradicionales para la enseñanza de las matemáticas a ambientes con herramientas interactivas, se propone como recurso didáctico alternativo, al uso del software matemático-educativo de uso libre GeoGebra. El cual es compatible con sistemas operativos como Linux, Windows, Apple macOS y Androi, ha sido traducido a 80 idiomas y ofrece una vista algebraica, una gráfica y otra tabular dinámicamente vinculadas (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Desde esta perspectiva se plantea la siguiente pregunta **¿cómo identifica el alumno de Bachillerato los elementos que integran la función lineal a través del uso de GeoGebra?**

1.3 Objetivos de investigación

General

Analizar los elementos que identifica el alumno de Bachillerato en una función lineal a través del uso de GeoGebra.

Específicos

- Identificar las variables dependientes e independientes que utiliza el alumno de Bachillerato en una función lineal.
- Describir cómo el alumno de Bachillerato determina la pendiente y la ordenada al origen en una función lineal.

1.4 Estado del arte

En este apartado se realiza una selección y análisis de distintos estudios, investigaciones y trabajos que muestran avances importantes con respecto al estado del conocimiento de las categorías de estudio: función lineal, software para la enseñanza de las matemáticas GeoGebra y teoría de las representaciones semióticas (TRS). Dicho análisis tiene la finalidad de encontrar fuentes útiles que ayuden ampliar el panorama sobre la problemática descrita e identificar referentes conceptuales, tendencias y perspectivas teórico-metodológicas surgidas desde distintos posicionamientos y así ganar familiaridad con el contexto general de la investigación.

1.4.1 Función lineal

El objeto matemático función lineal es considerado de gran importancia por ser una herramienta para la explicitación de diversos fenómenos y situaciones en distintos ámbitos de la vida cotidiana, por lo que resulta comprensible que muchos investigadores dentro del campo de la matemática educativa se ocupen de su estudio. Tal es el caso de Edwin, Tafur, & Martínez (2015), este grupo de investigadores de la Universidad de la Amazonía en Colombia en su artículo: la conversión entre los registros de representación de la función lineal y criterios de congruencia entre algunas de sus representaciones; manifestaron su preocupación por las dificultades que presentan los estudiantes al realizar conversiones entre los registros de representación de la función lineal.

Por lo que propusieron el diseño e implementación de una secuencia didáctica que fomentara en los alumnos de décimo grado (cuya equivalencia en el sistema educativo mexicano es el primer grado de Bachillerato) la habilidad para la conversión entre los registros de representación de la función lineal. Dicha secuencia tuvo como fundamento teórico los aportes de Font (1994) y Duval (2004) al campo de la semiótica en el ámbito de la educación matemática. Para el desarrollo de la propuesta se posicionaron en un enfoque cualitativo y emplearon el método de estudio de casos, pues consideraron que ambos contribuyen a un mejor explicitación de las características del fenómeno de estudio.

La recolección de los datos se realizó mediante notas de campo, entrevistas semiestructuradas y grabaciones de audio y video. La investigación se desarrolló en 2 fases, la primera consistió en la aplicación de una prueba diagnóstica con el propósito de identificar los conocimientos alcanzados por los estudiantes del décimo grado en materia de conversión; el cuestionario estaba conformado por 3 situaciones, 2 de ellas con 6 ítems y una con 5 ítems. Dentro de sus conclusiones mencionaron que colocar en diálogo al lenguaje de las matemáticas y la cotidianidad, puede ayudar a los estudiantes a coordinar entre las representaciones semióticas de la función lineal.

Las representaciones semióticas es el medio por el cual se puede acceder a los objetos matemáticos y así lograr su comprensión. Un mismo objeto puede representarse de varias formas. Tal es el caso de la función lineal, que puede ser representada verbalmente, como una fórmula algebraica, una tabla o una gráfica. Por otro lado, el uso de dicha la función no se reduce al campo de las matemáticas, sino que se extiende a otras disciplinas como la biología, la medicina, la economía y la administración. Investigaciones como las de Dal Bianco et.al. (2014) consideran las 2 situaciones antes plantadas.

Dichos autores, en su artículo titulado La interacción entre objetos matemáticos y representaciones semióticas en diferentes escenarios de aprendizaje, cuyo contexto tuvo lugar en la cátedra de matemáticas de las carreras de profesorado en ciencias biológicas y en química, plantearon que para los estudiantes de las clases antes citadas era complicado diferenciar entre la función lineal como un objeto matemático y las representaciones de la misma. Por lo que este grupo de investigadores pertenecientes a la Universidad de Nacional de la Pampa en Argentina, diseñaron e implementaron una estrategia didáctica cuyo propósito era propiciar en los alumnos la habilidad de diferenciación entre las representaciones de la función lineal y su concepción como objeto matemático.

Dentro del sustento teórico se consideraron los aportes de Polya (1997) en cuanto a la resolución de problemas, además de la TRS de Duval (1998), ambos antecedentes aterrizados a las problemáticas concernientes al campo de las ciencias naturales. El desarrollo de la investigación comenzó con un examen diagnóstico, luego con la resolución de trabajos prácticos y exámenes parciales, los cuales fueron el punto de partida para tomar decisiones en cuanto al diseño de una estrategia didáctica. Se consideró a las TIC como herramienta para crear un ambiente motivacional y dinámico en el aula, pues el grupo de estudiantes donde se implementó la estrategia diseñada, mostraba apatía ante el estudio de las matemáticas pues no consideraban de trascendencia la presencia de esta disciplina en el desarrollo de su profesión.

El software GeoGebra se incorporó en el diseño de dicha estrategia como una herramienta para modelar a la función lineal en sus distintas representaciones. Se resolvieron 5 problemas relativos con la biología y la química. Entre las actividades propuestas destacaron 2. Una de ellas consistía en ingresar la fórmula de una función determinada en GeoGebra, debiendo estudiar los diversos parámetros: los desplazamientos, dominio, imagen, visualizar los ceros, asíntotas, monotonía y simetrías. La otra actividad sobresaliente fue diseñada con el objeto de que el alumno asociara la gráfica con la ecuación correspondiente. Finalmente, este grupo de investigadores argentinos concluyeron que las actividades desarrolladas permitieron que los estudiantes resignificaran las matemáticas dentro de su desarrollo profesional y que el uso de GeoGebra facilitó la interacción entre los diferentes registros semióticos.

La función línea es un objeto matemático complejo, pues está integrado de varios elementos como son la variable independiente, la variable dependiente, la pendiente y la ordenada al origen, que al interactuar entre sí, dan lugar a que dicho objeto matemático surja como un todo. De ahí la importancia de la comprensión de cada uno de sus elementos. González & Cantoral (2014), investigadores mexicanos del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en su artículo titulado Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de GeoGebra, señalan que para algunos estudiantes la noción de función resulta ambigua al no ser observable directamente. Propusieron una situación de aprendizaje para estudiar la noción de pendiente en la cual se pretendía que el alumno visualizara, manipulara y empleara sus propias herramientas en el entorno del software GeoGebra, tomando como referencia fenómenos físicos cotidianos. El sustento teórico de la situación de aprendizaje partió de los aportes de D´Amore & Fandiño (2002) sobre el llamado triángulo didáctico, así como los aportes de Brousseau (1994) acerca de los roles de intervención del docente dentro del aula. En el desarrollo metodológico de la investigación se inició por diseñar una secuencia didáctica considerando la dificultad que tienen los alumnos para identificar la pendiente en sus distintas representaciones, así como el uso de GeoGebra para la visualización de la misma.

Posteriormente se puso en marcha la secuencia didáctica, planteando una serie de actividades en el contexto de situaciones cotidianas con las cuales el estudiante se encontraba familiarizado. Por ser una investigación en proceso no se emitieron conclusiones por parte de los autores, aunque si resaltaron que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se requiere entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extensas y ricas en significados por parte del que aprende.

Algunos docentes en sus tesis de obtención de grado también se han ocupado del objeto función lineal tal es el caso de Giraldo (2012), que para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales por la Universidad Nacional de Colombia, diseñó e implementó una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal mediada en las nuevas tecnologías. Pues consideró, que la comprensión dicho objeto matemático era base fundamental para comprender otro tipo de funciones. Asimismo, estimó que el uso de la tecnología podría proporcionar escenarios novedosos que motivaran a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Por lo que, dicha investigación se dio en el contexto de un grupo de 57 estudiantes de noveno grado de secundaria mayor, cuya equivalencia en México es el primer grado de Bachillerato.

Su propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal se desarrolló en 4 fases. En la primera identificó y caracterizó herramientas y estrategias para la enseñanza de la función lineal utilizando las TIC. En la segunda, diseñó actividades interactivas apoyadas con las nuevas tecnologías para la enseñanza de dicha función. Después implementó la estrategia didáctica propuesta por medio de un estudio de caso. Por último, evaluó el desempeño de la estrategia planteada. Como sustento teórico consideró a la teoría de aprendizaje significativo de acuerdo a la perspectiva de Ausubel, Novak, & Hanesian (1976).

Como conclusión Giraldo (2012) planteó la potencialidad del uso de las TIC para mejorar la comprensión de la función lineal y el factor motivacional que tienen estas dentro del aula. Para la implementación de la estrategia se hizo uso de GeoGebra, blogs virtuales y redes sociales. Finalmente, con este proceso se logró evidenciar que en cuanto a la enseñanza del concepto de función lineal en el grupo de noveno grado, se obtuvo un promedio de calificación de 3.4, mientras que con la enseñanza tradicional del mismo concepto en otro grupo con similares características se obtuvo un promedio de 2.8.

La cognición está íntimamente relacionada con los objetos abstractos, jugando un rol muy importante dentro del campo de las matemáticas, por lo que algunas investigaciones en el ámbito de la educación matemática se han tornado hacia los procesos cognitivos de los estudiantes. Ospina (2012) en su tesis titulada Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal; la cual realizó para obtener el grado de Maestra en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad de Manizales en Colombia, su trabajo se situó dentro de un enfoque cognitivo. Esta investigación se da en el contexto de un grupo de décimo grado, teniendo como objetivo comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones donde interviene el objeto función lineal.

Consideró como base teórica a la TRS de Duval (1998) y los aportes de D'Amore (2004) sobre la noética. Dentro de la metodología se aborda un enfoque cualitativo interpretativo pues la investigadora consideró era el adecuado para que existiera una dialéctica entre las respuestas de los alumnos y la teoría seleccionada. La investigación se desarrolló en 2 momentos iniciando por las consideraciones teóricas de la función lineal y posteriormente en un segundo momento se realizó una exploración de tratamientos y conversiones realizados por los estudiantes sobre las representaciones de la función lineal con el fin de conocer las actividades cognitivas que ellos realizaron.

Para la recolección de la información se utilizaron las técnicas de observación, grabación de audio y video. Como instrumentos se utilizaron 2 cuestionarios escritos. El instrumento 1 permitió indagar sobre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que hacen los estudiantes sobre el concepto función lineal. El instrumento 2 constó de 4 situaciones para ser resueltas en subgrupos, cada una con 4 preguntas de respuesta abierta, a partir de las cuales se remite a los estudiantes a realizar conversiones en diferentes registros de representación.

En las conclusiones mencionó que la actividad cognitiva de conversión es el proceso que permite al estudiante reconocer las invariantes de cada una de las representaciones semióticas, lo cual propicia el aprendizaje de la función lineal. Por otro lado, la autora invita a los profesores a incluir en sus clases situaciones de dependencia entre variables que posibiliten la articulación de diferentes registros de representación semiótica para que los estudiantes desarrollen un pensamiento variacional adecuado que les permita alcanzar una mejor conceptualización de la función.

1.4.2 GeoGebra

Para la enseñanza de las matemáticas, algunos docentes hacen uso de situaciones contextualizadas, vinculadas a otras áreas del conocimiento, tal es el caso de Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos es el título que Reid, Gioda, & Prieto (2017) asignaron a un artículo que resume su experiencia con un proyecto de enseñanza de la geometría utilizando GeoGebra. Dicha experiencia fue desarrollada con alumnos de entre 12 y 14 años que cursaban primero y segundo grado de escuela secundaria. El objetivo de la propuesta era recuperar el trazado de mandala, como una importante actividad de enseñanza de la geometría. Se incorporó el software GeoGebra como un medio para el desarrollo de la percepción y creatividad. Así como para generar un ambiente de motivación dentro del aula.

Se consideraron como referentes teóricos el trabajo de Coelho & Cabrita (2015) en cuanto a la percepción y creatividad, y el de Alencar (2007) sobre la motivación. Se aplicaron 3 actividades dentro de esta propuesta. En las 2 primeras los estudiantes trazaron mandala en el ambiente de GeoGebra, que posteriormente analizaron para describir y reconocer las transformaciones isométricas utilizadas en la construcción de los mismos. La última actividad se planteó desde la matemática y la educación artística, con el fin de que transitaran por experiencias orientadas desde las artes visuales, bajo una dinámica de trabajo colaborativo donde se conjugaran aspectos de la convivencia y arte.

Al finalizar la aplicación del proyecto de enseñanza, los autores señalaron que el uso del software GeoGebra permitió a los estudiantes la retroalimentación visual, dándoles la oportunidad de conjeturar, probar y generalizar propiedades de las rotaciones, traslaciones y simetrías. De igual forma propició la interacción entre los estudiantes, promoviendo el intercambio y la colaboración entre los diferentes grupos. En cuanto a los alumnos, manifestaron que este tipo de actividades alentaba el trabajo en equipo y hacia ver a la geometría menos complicada y más divertida.

Investigaciones como la de Carvajal, Rincón, & Zuñiga (2017) trataron de valorar en qué medida el uso de software favorece la comprensión de las nociones matemáticas. En su investigación titulada Uso del software GeoGebra como estrategia de enseñanza para triángulos rectángulos de 30°- 60° dirigida a estudiantes de décimo grado. Se plantearon la pregunta, ¿cuál es el impacto de las situaciones didácticas desarrolladas por medio del uso del software educativo GeoGebra desde el enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas en las actitudes matemáticas de los estudiantes de décimo grado cuando se aborda el tema de los triángulos rectángulos de 30°- 60°?

Dentro de los referentes teóricos, los autores retomaron la percepción de Brousseau (1994) sobre la innovación y didáctica de las matemáticas como una actividad esencial del profesor. Asimismo, reflexionaron sobre los aportes de Vergnaud (1990) relativos a las actividades que favorecen el desarrollo de conceptos matemáticos. Metodológicamente dicha investigación tuvo un enfoque mixto, incluyendo instrumentos como el diario de campo, entrevistas, evaluación y test de percepciones. Se concluyó que:

> […] el diseño de situaciones didácticas direccionadas al aprendizaje de las nociones básicas de la trigonometría y apoyadas en los recursos educativos abiertos favorece la actitud y receptividad de los estudiantes, ya que esta incorporación promueve el compromiso de aprendizaje y la adquisición de nuevas competencias de cara al futuro. Por otro lado, la implementación del software GeoGebra generó un ambiente de aprendizaje distinto al de enseñanza convencional en matemáticas, lo que benefició en gran medida el grado de motivación y disposición en las actividades propuestas para cada sesión […] (Carvajal et al., 2017, p. 60).

Para hacer uso de las TIC´s y de softwares para el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental el conocimiento y dominio de herramientas tecnológicas por parte del docente, por lo que investigaciones como la de Santana & Climent (2015) analizan el conocimiento especializado del maestro para la utilización de GeoGebra en el aula de matemáticas. Partiendo de la premisa de que para que el docente ejecute de manera eficiente la actividad de la enseñanza de la matemática debe contar con 2 dominios principales, uno de ellos el conocimiento del contenido (en este caso conocimiento matemático) y el otro el conocimiento didáctico del contenido (como puede ser el software GeoGebra).

En el marco teórico se propusieron revisar el carácter especializado del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática partiendo del conocimiento profesional establecido por Shulman (1987, 1986), concretándose en los aportes de Ball, Thames, & Phelps (2008) sobre el modelo del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que se refiere a “ […] los conocimientos que posee el profesor sobre representaciones del contenido […]. Incluye, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades, y su potencialidad” (Santana & Climent, 2015, p. 78). El objetivo de la investigación fue identificar qué conocimiento respecto al modelo del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas se evidenciaba en la práctica de una profesora de tercer grado de una escuela secundaria que usaba GeoGebra en el aula de matemáticas.

La investigación se posicionó en el paradigma interpretativo, se realizó un estudio de caso, los instrumentos para la toma de información fueron una entrevista grabada en video, 7 sesiones de clases también grabadas y notas de campo. Dentro de las conclusiones se señaló que el profesor debe conocer las potencialidades de la herramienta Geogrebra para poder trabajar con ella en el aula de modo que le saque partido; asimismo debe conocer qué posibles dificultades de aprendizaje puede propiciar. Por otro lado, consideraron igualmente importante que el profesor tenga un conocimiento profundo de los contenidos a enseñar.

1.4.3 Teoría de las representaciones semióticas

Derivado del análisis de las categorías de estudio anteriormente citadas y dado que es evidente que la TRS es un tema recurrente dentro de las investigaciones que abordan tanto a la función lineal como a GeoGebra, se consideró importante realizar una búsqueda bibliográfica de trabajos relacionados con esta teoría. Iniciando con un artículo llamado: Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje. Este estudio se situó dentro del campo de la matemática educativa universitaria, en República Dominicana, donde Ureña, Pérez, & Blanco (2018) proponen utilizar los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados de Vigotsky sobre pensamiento y lenguaje.

Dicha investigación pretendió contribuir a la formación conceptual en el cálculo diferencial, mediante las representaciones semióticas de los procesos de variación instantánea con la ayuda de GeoGebra, donde este asistente matemático ilustró el movimiento de la variable. En los referentes teóricos figuraron autores como Duval (2006), con la transferencia de registros semióticos y Vigotsky (1978) con la relación entre pensamiento y lenguaje. La metodología empleada articuló 3 procesos; inicialmente el proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos, posteriormente el proceso de formación del lenguaje matemático, y finalmente el tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable. En cuanto a los resultados de la investigación fue posible comprobar avances notables en lo que respecta al uso y aplicación de los conceptos, así como en el uso del lenguaje matemático (Ureña et al., 2018).

La validación experimental, permitió demostrar que la propuesta conduce a una mejora significativa de los estudiantes en relación al lenguaje matemático y a las aplicaciones conceptuales en el Cálculo Diferencial, identificando y manipulando el movimiento de las variables. También se menciona que los alumnos adquirieron recursos propios para realizar transferencias de registros semióticos e independizaron el concepto de sus representaciones, lo cual contribuyó notablemente a su formación conceptual, donde los softwares matemáticos resultaron ser un adecuado escenario didáctico, no solo como herramienta de la actividad matemática, sino también, como elemento de motivación (Ureña et al., 2018).

La motivación para el aprendizaje de las matemáticas parece ser una preocupación constante de los docentes de este campo de estudio. En el trabajo de tesis de tipo cuantitativa, correlacional y explicativa, con diseño pre experimental de un solo grupo, con pre-test, intervención pedagógica y post-test realizada por Gatica (2017), titulada Las representaciones semióticas y visualización en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano; se plantea el propósito de determinar la influencia de la enseñanza basada en la Teoría de las representaciones semióticas y la visualización en el aprendizaje de las transformaciones isométricas, preocupándose especialmente por generar en 45 estudiantes de primer año de Bachillerato de un colegio rural de Chile, motivación y actitud hacia la matemática.

La metodología empleada se apoyó en la noción semiótica de registro. Las actividades fueron guiadas por un profesor y los estudiantes debían distinguir y coordinar entre registros de representación. En la implementación fue notorio el aumento del razonamiento espacial de los estudiantes, así como la motivación y el mejoramiento de la actitud hacia las matemáticas por parte de los mismos. En cuanto a los referentes teóricos fue considerado Vigotsky (1978), con aportes sobre la relación entre pensamiento y lenguaje, herramientas y signos, aprendizaje y desarrollo, y sus implicaciones educativas. Con Duval (1998) se abordó el proceso de visualización, el razonamiento intuitivo o informal, así como su relación con ideas sometidas a asociaciones u oposiciones. También se consideraron aportes sobre el concepto de representación, visualización y manipulación con trabajos de Dreyfus (1994); Hitt (1996); Radford (2006) y Tall & Vinner (1981) (Gatica, 2017).

Con base en los resultados obtenidos de los análisis estadísticos se concluyó que las representaciones semióticas y la visualización, promovieron la identificación, el tratamiento y la conversión entre registros necesarios para lograr conocimiento de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, tal como lo menciona Duval (1998), pues permitió que los objetos matemáticos, en este caso las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, no fueran confundidas con una representación. Por otro lado se motivó al estudiante no solo a observar, criticar y conjeturar sobre las actividades propuestas, sino también a la movilización de los registros de representación (Gatica, 2017).

En esta investigación se pudo observar que los procesos de interacción son un elemento fundamental para posibilitar la articulación de los sentidos con las diferentes expresiones semióticas de un mismo objeto matemático (Gatica, 2017). De tal forma, existen investigaciones como la de Rojas (2015), que se centran en el análisis de dicha articulación. En su trabajo titulado: Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos, asume un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo, apoyado de referentes teóricos con perspectiva ontosemiótica, (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2007). En el estudio mencionado el autor describió y analizó algunos procesos de asignación de sentidos logrados por estudiantes colombianos de 9.º y 11.º grado, en relación con tareas específicas en las que se requería realizar tratamientos entre representaciones.

En cuanto a las conclusiones, se enmarcan 3 hechos fundamentales:

> 1) los estudiantes «manejan» las propiedades básicas de los sistemas numéricos, a partir de las cuales realizan las transformaciones de tratamiento requeridas para establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, pero no por ello articulan los diversos sentidos asignados a las expresiones dadas; 2) existe una tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta, y 3) se evidencia una «mirada» básicamente icónica de las expresiones algebraicas (Rojas, 2015, p. 163).

De igual manera dentro de los resultados se evidenció la importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos asignados a expresiones semióticas equivalentes. Por lo que no resulta raro que algunos docentes e investigadores incluyan en el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a softwares matemáticos (Rojas, 2015). Anteriormente se comentaba sobre el caso de GeoGebra, que aunque es el más empleado dentro de dichas secuencias no es el único. Precisamente en el trabajo desarrollado por Borjón, Torres, & Sosa (2015) se aborda el estudio de las ecuaciones lineales de 2x2 a través de la puesta en escena de 2 instrumentos diseñados en 2 diferentes escenarios: Con lápiz y papel y con uso de la tecnología Excel.

Esta investigación llevó por título: Representaciones semióticas de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 con Excel y surgió con el objetivo de utilizar a la tecnología como herramienta para que los alumnos de tercer grado de preparatoria transitaran entre diferentes representaciones de la solución de ecuaciones lineales, y así posteriormente dar solución a problemas en contexto (Borjón et al., 2015). Los referente teóricos que dieron soporte a este trabajo incluyen principalmente a Duval (1999) con la TRS, considerando que dicho autor sostiene que un concepto se ha adquirido, cuando se es capaz transitar entre las diferentes representaciones semióticas del concepto mismo.

En cuanto a la metodología empleada se desarrolló un esquema experimental, donde se diseñaron 2 instrumentos. El primero se trabajó con lápiz y papel y en el segundo a través de la hoja de cálculo Excel. Ambos instrumentos fueron aplicados a un grupo de 18 alumnos de tercer grado de Bachillerato, de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Dentro de las conclusiones se establece que la mayoría de los alumnos fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la representación analítica. Por otra parte señala que el uso de la tecnología utilizada, permitió que los alumnos lograran transitar entre diferentes representaciones del concepto, de lo que acorde con la TRS permitió establecer que los alumnos se habían apropiado del concepto en cuestión (Borjón et al., 2015).

Al término del análisis de los documentos presentados en este apartado se observa que a excepción del trabajo desarrollado por Ospina (2012) en ninguno de ellos convergen las tres categorías de estudio que el presente trabajo propone, pues si bien los que se ocupan de la función lineal y sus representaciones no necesariamente incluyen herramientas tecnológicas como medios de representación, y aquellas que si lo hacen no en todos los casos se fundamentan de la TRS. Así mismo, los documentos que abordan al software GeoGebra principalmente están encaminadas al estudio de objetos matemáticos desde el enfoque de la Geometría. Por su parte, la TRS es principalmente considerada como referente en la investigación de objetos matemáticos expresados en una sola forma de representación.

En cuanto a la investigación de Ospina (2012), esta deja a un lado la relevancia del análisis sígnico que ofrece la TRS sobre los procesos cognitivos de los estudiantes. Así mismo, aborda a la función lineal como un solo concepto y no como un conjunto de elementos que conforman un sistema. Mientras que el presente trabajo, propone la identificación de cada elemento de la función en sus distintas representaciones mediadas por la herramienta Geogebra, desde la consideración sígnica de la TRS y así, se espera el estudiante construya a través de la observación, y la experimentación en el ambiente de trabajo de dicho software el concepto función lineal.

1.5 Justificación

En este apartado se exponen los motivos por los cuales cobra pertinencia la realización del presente trabajo. Dichos motivos se enmarcan dentro de 4 ámbitos. El ámbito social, donde se expone la relación reciproca de las matemáticas, la tecnología y el crecimiento socioeconómico de una nación y la formación del individuo. Posteriormente, en el ámbito profesional se hace referencia a los retos que actualmente la sociedad del conocimiento establece para el ejercicio de la profesión docente, particularizando en los requerimientos para los profesores de matemáticas en EMS.

En el ámbito académico se hace referencia a las dificultades que los estudiantes manifiestan en cuanto a su desempeño escolar en el área de matemáticas, y la necesidad de implementar nuevos escenarios de enseñanza y aprendizaje dentro dicha disciplina. De tal modo, se exponen los motivos que dieron origen a la propuesta de un software educativo como herramienta alternativa de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, estableciendo un análisis de distintos softwares de este tipo. Por último en el ámbito personal expresé mi perspectiva sobre el ejercicio de la profesión docente y la faceta del profesor como investigador, así como lo que de forma particular espero obtener con la realización de esta investigación más allá de los fines netamente académicos.

1.5.1 Ámbito social

En las últimas décadas los avances de la ciencia, la tecnología y la diversificación del conocimiento han alterado diversos órdenes de nuestra vida, como la naturaleza del trabajo y el ejercicio ciudadano. Para afrontar los continuos cambios, los individuos nos vemos obligados a adquirir nuevas habilidades personales, sociales y profesionales, que aunque siempre han sido necesarias, hoy en día resultan imprescindibles (Marqués, 1996). Por ello, es conveniente e impostergable que los ciudadanos y futuros ciudadanos dispongan de conocimientos y habilidades que les permitan afrontar los nuevos retos de un mundo cambiante (INEE, 2016).

En consecuencia, los sistemas educativos del mundo han redoblado esfuerzos para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de distintos ámbitos del conocimiento (UNESCO, 2000). Especialmente los relacionados con las matemáticas, la ciencia y la tecnología, debido a su gran trascendencia en distintas situaciones de la vida actual; como la salud, la higiene, la alimentación, etcétera. Stewart (2009, p. 180) en su libro Cartas a una joven matemática, menciona: "si tuviéramos que poner una etiqueta roja a todo lo que lleva matemáticas en el mundo tendríamos que pintar de rojo el planeta […]". Aunque no siempre dicha trascendencia resulta perceptible por los ciudadanos. En el mismo libro Stewart (2009, p. 7) declara: "nuestra sociedad consume muchas matemáticas, pero todo sucede entre bastidores".

Actualmente, el mundo experimenta muchos cambios y se encuentra plagado de información, por lo que resulta necesario promover entre la población una visión científica del mundo, no entendida solamente como un conocimiento científico y tecnólogo experto, sino como la capacidad de comprender al mundo, obtener conocimiento objetivo y conocer la verdadera naturaleza de hechos y fenómenos que transforman el entorno. Ahora bien, no se puede hablar de ciencia, tecnología y de la comprensión del mundo sin hablar de las matemáticas, pues son el mecanismo que impulsa el avance en cualquier área del conocimiento. Sus modelos son necesarios para representar hechos y fenómenos propios de cualquier disciplina. Por lo que se puede afirmar que las matemáticas están presentes en todas partes y en ellas solo hay verdad (Yves Chevallard, 2013).

No obstante, las matemáticas no solo tienen fines utilitaristas. Santiago García Cremades, matemático, investigador, divulgador y profesor asociado en la Universidad Miguel Hernández de Elche, en Alicante España, en la entrevista realizada por Campillo (2019, párr. 7) sostiene:

> Sirven para todo pero no tienen por qué servir para nada. Como la música que es pura matemática, tampoco sirve concretamente para nada, pero nos ¡hace cosquillas! en el cerebro. La gente que no percibe belleza en esta ciencia quiere entender la primera parte: ¿para qué? Pues hoy, más que nunca, el que no sepa algo de matemáticas va a tener un serio problema en la era de los datos en la que estamos.

En síntesis, el crecimiento de un país depende de su potencial en tecnología y ciencia, y para ello necesita a muchos profesionales que dominen las matemáticas. Tener conocimiento pleno de las matemáticas significa resolver problemas, las empresas valoran la capacidad para resolver problemas. Tener una educación matemática define en gran medida la capacidad crítica y la habilidad en la toma de decisiones. Alguien que dispone de mejores comprensiones conceptuales matemáticas, puede desarrollar procesos de mayor complejidad y así enfrentar situaciones de mayor nivel de abstracción (Escuela de Administración, Finanzas e Instituto Tecnológico (EAFIT), 2019).

En cuanto a la formación del individuo, el estudio de las matemáticas fomenta la creatividad, la exploración y el diseño de cosas nuevas. Además, la educación matemática ayuda a tener disciplina y a fomentar valores y hábitos, como la paciencia, la tenacidad y la humildad. Con respecto al ejercicio de la ciudadanía permite formar seres escépticos razonables que puedan analizar las situaciones con rigor. En general el conocimiento matemático busca la armonía y cómo las cosas interactúan entre sí. Por lo que el estudio de esta ciencia resulta de un indudable valor social (EAFIT, 2019).

Sin embargo, como declara la UNESCO (2000) en diversas partes del mundo aún falta mucho por mejorar en materia de educación. Particularmente, Latinoamérica enfrenta un fuerte rezago. Los retos a vencer en esta zona en cuestiones del ámbito educativo están principalmente ligados con la infraestructura, el diseño de un currículo relevante y trascendente para los estudiantes, la cualificación de los docentes, que no solo tiene que ver con el dominio disciplinar si no con el enfoque de enseñanza que propicie en los alumnos deseo de continuar aprendiendo. Concretamente en México, el Foro Consultivo Científico y Tecnológico, A.C. (FCCyT) (2006) señala:

> México requiere con urgencia crecer para elevar sus niveles de bienestar. Por lo que se considera es importante y urgente priorizar, en los programas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, […], así como el uso de las nuevas tecnologías (FCCyT, 2006, p. 49).

En el siglo actual el proceso de enseñanza-aprendizaje a nivel mundial se ha visto matizado por el empleo de las tecnologías de la información comúnmente llamadas TIC (Tello, 2008).

> Las tecnologías de información y comunicaciones (TIC) es un término que contempla toda forma de tecnología usada para crear, almacenar, intercambiar y procesar información en sus varias formas, tales como datos, conversaciones de voz, imágenes fijas o en movimiento, presentaciones multimedia y otras formas, incluyendo aquéllas aún no concebidas. En particular, las TIC están íntimamente relacionadas con computadoras, software y telecomunicaciones (Tello, 2008, p. 3).

La integración de las TIC al ámbito educativo es parte de una tendencia global, donde las escuelas de todos los niveles escolares participan en el uso y aprovechamiento de estas herramientas para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Zenteno & Mortera, 2011). “El nivel educativo medio superior […] no se escapa de esta tendencia y de esta necesidad contemporánea de participar en las ventajas que proponen la incorporación y uso de las TIC en los procesos educativos”

(Zenteno & Mortera, 2011, p. 1). Las herramientas tecnológicas, proveen entornos de trabajo que conllevan a nuevas formas de tratar metodológicamente los conocimientos (Martínez, 2013), pues no solo nos permiten conocer más sino también aprender distinto (Hopenhayn, 2003).

Las TIC con sus múltiples aplicaciones están desempeñando una función muy importante dentro la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debido a las ventajas pedagógicas que presentan tanto para la explicitación de los objetos matemáticos como para su comprensión (Martínez, 2013). Los trabajos procedimentales estructurados y secuenciados sin duda han ayudado a la operación y manejo de los conceptos matemáticos, pero ahora en esta sociedad en continuo movimiento surge la necesidad desarrollar habilidades de reflexión y discusión que vayan más allá de lo mecánico. Esto establece un punto de partida sustancial para la búsqueda y en el mejor de los casos el desarrollo de recursos interactivos como apoyo para el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Grisales, 2018).

1.5.2 Ámbito profesional

Las coyunturas, económicas, políticas y sociales que enfrenta la sociedad actual han traído consigo nuevos retos para el ejercicio de la profesión docente. Morin (2010) en su obra: La mente ordenada, habla sobre estos desafíos, sosteniendo que los profesores que guían a los estudiantes del nuevo milenio, deben promover el conocimiento multidimensional y la globalización de los saberes, no olvidando fomentar entre sus alumnos el pensamiento reflexivo y libre. Así mismo Perrenoud (2001) señala que un profesor debe ser entre otras cosas, animador de una comunidad educativa, garante del sentido de los saberes, creador de situaciones de aprendizaje, además de poseer un sentido crítico-reflexivo que se refleje en su práctica.

Toffler (1973), considera que la educación actual debe ser habida de “movilidad (ambientes diferentes), interactividad (capacidad bidimensional de respuesta en la relación alumno-máquina), y convertibilidad (conexión con fuentes plurales de información)” (p.200). Dentro del marco de dicha educación los profesores deben evolucionar junto a sus jóvenes estudiantes, en un proceso de aprendizaje conjunto (Alfaro, 2011). Este escritor y futurista estadounidense plantea 3 estrategias fundamentales para llevar a cabo un proceso de cambio en el ámbito educativo: iniciando por “ 1) cambio en los docentes y en la relación educador-educando; 2) cambio en la forma en que se transmiten los contenidos; 3) orientación del conocimiento hacia la innovación constante y continua" (Toffler, 1973, p. 174).

Por su parte Mcalpine & Weston (2000), subrayan que no es factible que sucedan cambios significativos para la mejora de la enseñanza si no existen cambios en los paradigmas de los profesores. Consideran que para dar lugar a una verdadera transformación del trabajo docente, es necesario que los maestros reflexionen sobre su entorno, analicen meticulosamente el hecho educativo y presten especial atención a los intereses y características de sus estudiantes. Desde esta perspectiva, el alumno es el centro del proceso de enseñanza–aprendizaje; y los profesores diseñan y adecuan la metodología de enseñanza considerando los intereses y características de sus educandos, permitiéndoles colaborar como entes activos de la construcción del conocimiento y en la ejecución de su propio aprendizaje (Vallejo, 2011).

Actualmente los jóvenes son inquietos, resueltos, críticos, difíciles de motivar, ávidos de experiencias y sensaciones. Algunos de ellos son poseedores de fuertes habilidades innovadoras y creativas en el mundo virtual (Alfaro, 2011). Por tal motivo hoy más que nunca debe existir un cambio de paradigma en la enseñanza (Rodríguez, 2016). Pues no basta con que el docente sea experto en un determinado tema; es necesario contar con conocimientos interdisciplinarios, que faciliten la incorporación de estrategias y recursos que permitan a los estudiantes apropiarse de conocimientos y desarrollar habilidades (Alfaro, 2011).

Ante esta situación muchos profesionales de la educación se han dado a la tarea de conocer la esencia y las necesidades educativas de sus estudiantes, así como estar al tanto sobre las actualizaciones tecnológicas y las nuevas tendencias en el ámbito educativo, asumiendo el aprendizaje como un proceso continuo y conjunto, entre estudiantes y profesores (Alfaro, 2011). En correspondencia con lo antes expuesto el presente trabajo nace de la reflexión de la autora sobre su propia práctica. Analizando lo que sucede en el aula, lo que no sucede y lo que pretende que suceda. Así mismo se origina de la necesidad de búsqueda de escenarios didácticos donde se promueva a las matemáticas como algo vivencial e interactivo que resulte estimulante para los estudiantes.

Lo que consecuentemente trajo consigo una indagación sobre posibles metodologías, técnicas y herramientas que pudieran ser adecuadas para emplearse como motor de aprendizaje y creatividad entre los alumnos. Permitiendo dejar a un lado el ejercicio de la trasmisión unidireccional del conocimiento, donde el docente es el único que posee la información y la verdad; y el alumno es mero receptor. Para el desarrollo de esta investigación se eligió al uso de la tecnología como un puente hacia otras maneras de acceder a las ideas matemáticas (Palmas, 2018). Reflexionando sobre el uso de la misma como una herramienta estratégica y didáctica y no como un medio para realizar tareas de forma más eficiente y en menos tiempo (Rodríguez, 2016). Especialmente se esperaba que esta herramienta resultara llamativa y motivadora para los jóvenes.

Con respecto a las ventajas del uso de tecnología en el ámbito de la educación matemática, Clements (2017) opina que los medios tecnológicos proporcionan retroalimentación instantánea al estudiante cuando este interactúa con objetos matemáticos, pues la interacción promueve la formulación de conjeturas, exploración y experimentación. En Latinoamérica, las investigaciones de Butto & Rojano (2004, 2010) y Rojano (2003) , muestran cómo la introducción de la tecnología puede dar acceso a ideas y procesos de generalización matemática. En el mismo Palmas (2018) considera que la incorporación de la tecnología al aula de matemáticas aumenta la posibilidad de generar en todos los alumnos interés sobre el conocimiento matemático y no solo en aquellos que pretenden continuar en una carrera universitaria relacionada con la ciencia y la tecnología.

Dentro de este escenario educativo el profesor sigue siendo un factor fundamental que guía el proceso de enseñanza aprendizaje y al mismo tiempo un sujeto de transformación que estudia, investiga, analiza y diseña estrategias de acción matemática que permitan a sus alumnos ir más allá del modelo instrumental que han manejado tradicionalmente enfrentándolos a nuevas formas de razonamiento, argumentación y construcción interactiva de su propio conocimiento matemático (Villanueva, 2005). El uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas depende fundamentalmente de cómo el maestro las maneja, valora y usa en sus clases (Grisales, 2018).

En cuanto al trabajo del docente como investigador Camarena (2015, p. 208) considera que “teóricamente, la investigación educativa va de la mano con la actividad docente. En el caso de la educación matemática esta mancuerna se debe mantener para lograr avances significativos en esta área del conocimiento”. Hoyles & Noss (2003) con respecto al mismo tema señalan que: el uso de las tecnologías dentro de la metodología empleada en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas puede ayudar a introducir nuevas nociones y así los docentes investigadores tratar de entender cómo una persona crea hipótesis, experimenta, compara y relaciona nuevas ideas con lo que ya conoce, considerando la interacciones entre lo concreto y abstracto como eje de la idea matemática de modelización.

El trabajo del profesor hoy más que nunca resulta complejo. No asumiendo este calificativo desde un sentido reduccionista asociando con las atribulaciones. Pues como menciona Morin (1996) la complejidad no es la complicación. La idea de complejidad a la que aquí se alude, hace referencia a un sistema de interacciones propias del ser humano. Que tienen sus inicios en los cuestionamientos que se plantea cada individuo buscando un sentido. El carácter complejo de la labor docente radica entonces, por un lado en su continua actividad reflexiva, donde el maestro analiza constantemente las posibles acciones que podría llevar a cabo para hacer frente a distintas problemáticas que se presentan en el ejercicio de su profesión. Especialmente aquellas que tienen lugar dentro del aula (Ciurana, 1990).

1.5.3 Ámbito académico

No es raro para los docentes de matemáticas de cualquier nivel educativo observar que un alto porcentaje de estudiantes presentan cierto grado de ansiedad hacia las matemáticas. Por lo que tienden a evitarlas (Escalera, Moreno, García, & Córdova, 2016). Chevallard (2013, p. 21) menciona al respecto:

> Por razones históricas muy arraigadas, las matemáticas son hoy en día a la vez formalmente veneradas y, al mismo tiempo, enérgicamente rechazadas. Mucha gente huye de las matemáticas tan pronto como ya no están obligados a hacer matemáticas. Esto ha llevado a muchos educadores matemáticos a utilizar una estrategia de seducción con el fin de recuperar la aprobación de los no creyentes en matemáticas.

La autora del presente trabajo como profesora de la asignatura de PA en el campo disciplinar de las matemáticas y razonamiento complejo en el primer grado de Bachillerato, ha observado las dificultades que tienen los alumnos al tratar de identificar los elementos de la función lineal en sus distintas representaciones semióticas, y como la falta de claridad en la comprensión de este objeto matemático va mermando la comprensión de otras temáticas dentro de las matemáticas e incluso en otras disciplinas, provocando bajo rendimiento escolar en diversas áreas de conocimiento, “privándose de la posibilidad de estudiar carreras profesionales relacionadas con esta ciencia” (Escalera et al., 2016, p. 12).

Ante esta problemática surge la necesidad de buscar acercamientos diferentes a este objeto matemático, que permitan al estudiante aproximarse a su comprensión, en especial a la función lineal que es la que nos ocupa en esta investigación. Desde hace varias décadas las TIC han sido incorporadas a la educación matemática con el objeto de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje (Ortiz, 2012). Sánchez (2003) sostiene que las TIC en su carácter de herramientas de un conjunto metodológico bien orquestado por el docente pueden potenciar en el estudiante el desarrollo de destrezas cognitivas. Desde la perspectiva de Castillo (2008, p. 186) “las TIC no solo son medios, sino […] elementos motivadores, creadores, que facilitan los procesos cognitivos de manera integrada con los […] elementos del currículo”.

Por su parte la UNESCO (2008) afirma que las TIC pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar las capacidades necesarias para llegar a ser: “[…] buscadores, analizadores y evaluadores de la información; solucionadores de problemas y tomadores de decisiones, usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad […]; y ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad” (p.110). Además de que el ambiente virtual parece ser el medio preferente de los jóvenes para realizar distintas actividades ya sean propias de la escuela o no (Zenteno & Mortera, 2011). Sin duda la integración de las TIC al ámbito educativo ha generado un fuerte impacto dentro del mismo, especialmente en las interacciones entre profesores, alumnos y el conocimiento (Fernández & Berch, 2016).

En las últimas décadas algunos docentes e investigadores han integrado softwares al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Zenteno & Mortera, 2011), pues han encontrado en este medio tecnológico una buena opción para la modelación, simulación e interacción de los objetos matemáticos y el estudiante. Duval (2006, p. 159) al respecto señala: “El software proporciona herramientas para mostrar instantáneamente tantas representaciones diferentes como sean necesarias […] Además […] puede dar una percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel.” Particularmente hablando del trabajo que aquí nos ocupa una vez planteado el problema y conociendo las ventajas y potencialidades de las TIC y los softwares dentro del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se realizó una búsqueda y posteriormente un análisis de algunos softwares utilizados en la educación matemática.

Notando que existe una gran variedad de ellos, por lo que inicialmente se realizó una preselección que atendió a la sugerencia de distintas personas que participan en el ámbito de la educación matemática y que ya habían interactuado con los softwares en cuestión. Siempre teniendo en cuenta que el software debía ser una herramienta que fomentara la reflexión de los estudiantes y no un obstáculo más en su proceso de aprendizaje. Por lo tanto, debía resultar para ellos de fácil comprensión y debía contar con un ambiente de trabajo amigable y de fácil uso. El primer seleccionado fue Microsoft Excel pues ya dominaba su funcionamiento. Los segundos elegidos fueron Desmos, Descartes y GeoGebra los cuales fueron sugeridos por compañeros docentes que imparten clases de matemáticas en el nivel medio superior. Más adelante fueron seleccionados MathAlly y Graphmatica por sugerencia de estudiantes normalistas de educación matemática.

En la búsqueda surgieron otros nombres de software, pero los antes mencionados fueron los que parecían ajustarse a las 2 primeras características requeridas (software gratuito y de fácil implementación). Posteriormente, se analizaron las características de los softwares mencionados. En cuanto a Microsoft Excel se puede comentar que es un elemento del paquete informático Microsoft Office, con licencia de propietario (lo que implica que no es gratuito), compatible solamente con los sistemas operativos Windows y Mac. En dispositivos móviles es compatible solo con Androi y está disponible en distintas versiones, sin embargo no todas cuentan con las herramientas que en su versión para PC (Ortiz, 2012).

Su característica básica es el manejo de datos. Se enfoca principalmente en las actividades de tipo financiero, su diseño es la simulación de una hoja contable, mejor conocida como hoja de cálculo. Entre sus herramientas se encuentran una serie de fórmulas aplicables en distintas áreas. El campo de las matemáticas no es la excepción. Excel también permite al usuario diseñar fórmulas de acuerdo a sus necesidades, además de formular diagramas, tablas y gráficas (Ortíz, 2019).

Desmos es una calculadora gráfica on line gratuita que también puede ser descargable en PC y dispositivos móviles. ES compatible con Windows, Mac OS, iOS, Android. Fue diseñada expresamente para ser empleada como herramienta para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. En cuanto a su operación ofrece la posibilidad de introducir formulas algebraicas, construir tablas y graficar instantáneamente. No requiere de suscripción para trabajar con ella en línea, aunque que esta versión sin registro no proporciona al usuario todas las herramientas con las que cuenta el software. Para acceder a todos sus beneficios es indispensable suscribirse y tener una cuenta de Google, Facebook o crear una de forma gratuita dentro del mismo programa (Desmos, 2019).

Descartes es un applet (aplicación que requiere de un programa anfitrión para poder ejecutarse) configurable gratuita, diseñada para ser una herramienta de la educación matemática en secundaria y preparatoria. Su uso es mediado por el profesor ya que inicialmente este debe crear una página web donde se incrustaren las applets configuradas de acuerdo a los objetivos educativos que se persigan. Para esto se requiere descargar un programa llamado gestor de escenas que tiene una extensión diferente para cada uno de los sistemas operativos compatibles con él. Para Windows: DescartesWeb2.0.exe, para Linux: DescartesWeb2.0.sh, para Mac y otros: DescartesWeb2.0.jar. No cuenta con versión para dispositivos móviles. Es útil para trabajar con ecuaciones, funciones y gráficas pero no con tablas.

GeoGebra es un software gratuito diseñado para ser utilizado en la educación matemática de todos los niveles educativos. Puede ser descargable en PC y dispositivos móviles. Es posible trabajar on line sin que el ambiente de trabajo cambie o pierda herramientas. En ninguno de los casos anteriores es obligatorio registrarse, aunque para guardar algún trajo si se requiere una cuenta de Microsoft, Facebook, Twitter, Office 365 o Google. Es compatible con iOS, Android, Windows, Mac y Linux. Permite trabajar con álgebra, geometría, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo. Su ambiente de trabajo tiene 3 vistas (algebraica, tabular y grafica) que pueden operar simultáneamente. La graficación es instantánea y puede ser en 3D (GeoGebra, 2009).

MathAlly es una calculadora gráfica descargable en cualquier dispositivo móvil con acceso a internet. Algunos sitios web que ofrecen descargas de esta y otras aplicaciones, hacen referencia a una versión para PC compatible con Windows, sin embargo el sitio oficial de la App solo menciona la versión para dispositivos móviles. Su descarga puede ser gratuita o de paga. En el caso de la primera las herramientas de uso se encuentran limitadas. Cuenta con 3 vistas, una algebraica, otra gráfica y una donde se muestran los procedimientos matemáticos que tengan lugar paso a paso.

Está App está dirigida para quienes operan matemáticas a nivel Bachillerato y/o profesional (Googleplay, 2009).

Graphmatica es un software matemático gratuito diseñado inicialmente para trabajarse en ambiente Windows 95/98/ME/2000/Vista/7 o posterior. Con llegada de los dispositivos móviles surgió una versión para Mac, iOS y Android. Permite trabajar con ecuaciones, funciones, derivas, integrales y gráficas. Da la posibilidad de trabajar con tablas, más no se pueden visualizar al mismo tiempo que la vista algebraica y la vista gráfica, surge más bien como una ventana emergente. Graphmatica no fue precisamente diseñado para la educación matemática, por lo que podría resultar complejo para algunos usuarios. Está enfocado principalmente a profesionales de las matemáticas (Garrido & Hansen, 2014).

Una vez teniendo claro cuáles eran los softwares preseleccionados estos se evaluaron de acuerdo con los siguientes criterios: 1) Que se tratara de software libre de descarga gratuita y por tiempo ilimitado. 2) Que pudiera ser compatible con los sistemas operativos más comúnmente usados en ordenadores personales o dispositivos móviles como es el caso de Linux, Mac,Windows, iOS y Androi. 3) Que estuviera disponible en idioma español. 4) Que el ambiente del software se caracterizara por ser amigable pues se necesitaba que el tiempo que transcurre desde el primer contacto con el software hasta su uso productivo fuera mínimo. 5) Que fuera flexible permitiendo realizar correcciones en caso de alguna acción equivocada por parte del usuario. 6) Interfaz rápida es decir que el sistema expresar rápidamente los cambios efectuados por el usuario. La tabla 1 muestra el análisis de los 6 softwares preseleccionados:

Tabla 1. Análisis de softwares preseleccionados

SOFTWARE	CRITERIOS DE SELECCIÓN					
	Gratuito	Compatibilidad	Idioma	Amigable	Flexible	Interfaz
Excel	☓	☓	✓	✓	✓	✓
Desmos	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Descartes	✓	☓	✓	✓	✓	☓
GeoGebra	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MathAlly	✓	☓	✓	✓	✓	✓
Graphmatica	✓	✓	✓	☓	☓	✓

Fuente: Elaboración Propia

Excel fue descartado ya que no es de uso libre y aunque existen varias versiones de este software para ser descargadas en dispositivos móviles, no todas cuentan con todas sus herramientas de uso. En el mejor de los casos para instalar la versión más completa se requeriría de un móvil con basta capacidad o por el contrario pudiese alentarse la interfaz. En el caso de Descartes solo puede ser usado en PC más no en dispositivos móviles, su interfaz es lenta. MathAlly aunque parece ser una buena herramienta pero no es posible trabajar con ella en PC. Graphmatica no es un software diseñado para la educación matemática, su ambiente de trabajo es un tanto complejo por lo que también fue descartado. Desmos y GeoGebra cumplieron con todos los criterios.

Por lo que fueron sometidos a un segundo análisis con requerimientos específicos para el estudio de la función lineal. El criterio 1) Debía contar con 3 vistas algebraica, gráfica y tabular. 2) Que las 3 vistas estuvieran visibles simultáneamente. 3) Las modificaciones que se hicieran por parte del usuario en alguna de las vistas debería mostrarse simultáneamente en las otras. 4) Que los elementos de la función lineal fueran fácilmente representados y observables. 5) Que los parámetros de los elementos de la función lineal fueran fácilmente modificables. 6) Que la versión para trabajar on line, para dispositivo móvil y para PC contara con exactamente el mismo ambiente de trabajo. 7) Que los trabajos realizados pudieran ser guardados. La tabla 2 muestra el análisis de los dos softwares seleccionados atendiendo a los criterios establecidos.

Tabla 2. Análisis de softwares seleccionados

SOFTWARE	CRITERIOS DE SELECCIÓN						
	Vistas			Representación de la función lineal		Operatividad	
	Algebraica Grafica Tabular	Simultaneidad: Visibilidad	Simultaneidad: Modificables	Observables	Modificables	Ambiente de trabajo	Guardado
Desmos	✓	✓	✓	X	X	X	✓
GeoGebra	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓

Fuente: Elaboración Propia

Tanto Desmos como GeoGebra cuentan con 3 vistas donde la función lineal puede ser representada algebraicamente, gráficamente y tabularmente. Son visibles simultáneamente y al modificar los parámetros de una función en una de ellas instantáneamente se hacen cambios en las otras. Pero solo en GeoGebra se puede introducir información desde cualquier vista y verla reflejada en las otras. En Desmos es necesario partir de la representación algebraica para poder observar la información en las otras vistas. Existe mucha similitud entre la vista algebraica y la gráfica de ambos programas. Gráficamente los 2 softwares permiten hacer modificaciones visuales en cuanto color y estilos, pero solo GeoGebra permite la representación en 3D, lo que visualmente hace más llamativas a las gráficas.

En el caso de la vista tabular, la construcción de tablas en Desmos es mucho más sencilla, incluso maneja un formato muy parecido al que generalmente se realiza en lápiz y papel. En ambos softwares representar a los elementos de la función lineal algebraica y tabularmente es posible y fácil pero gráficamente solo GeoGebra muestra los valores de todos los parámetros y el ángulo de la pendiente, así mismo permite insertar desde el ambiente gráfico, puntos y líneas que pueden hacer más sencillo la identificación visual de la ordenada al origen. Todas estas acciones no son posibles en Desmos. Con respecto al ambiente de trabajo tanto de Desmos como de GeoGebra, ofrecen las mismas herramientas de trabajo para su versión on line, PC y dispositivos móviles. Para llevar a cabo el proceso de guardado en ambos softwares es necesario contar con una cuenta de correo electrónico o Facebook.

Tomando en consideración los resultados de los análisis desarrollados se optó por GeoGebra como la mejor opción para cumplir con los objetivos de investigación planteados. Ya que este software es de uso gratuito, disponible en idioma español. El tiempo para su descarga es muy breve además de ser compatible con la mayoría de sistemas operativos tanto de PC como de dispositivos móviles. Su ambiente de trabajo es amigable, flexible y fácil de entender. Tiene una gama extensa de herramientas de trabajo, un gran potencial de interacción y visualicen de los objetos matemáticos. Pero principalmente por su compatibilidad para trabajar a la función lineal en sus distintas representaciones semióticas y facilidad para el cambio de parámetros de los elementos de la misma.

1.5.4 Ámbito personal

Las causas por las que una persona llega a ejercer la docencia pueden ser variadas, algunos desde niños en sus juegos ya mostraban actitudes para desempeñar esta noble profesión, otros a lo largo de su vida académica notaron tener aptitudes para desarrollarse en este campo, algunos más como es mi caso no fuimos formamos académicamente como profesores; sin embargo, los azares de la vida nos llevaron a abrazar esta carrera. Continuamente entre colegas se desatan controversias sobre si los maestros normalistas están mejor capacitados para ejercer la docencia que los profesores que cursaron estudios universitarios, o viceversa. En mi opinión, considero que el más apto es aquel que ama lo que hace, que conoce su valor como persona y como profesional, pero también tiene la humildad de reconocerse incompleto y en reconstrucción.

Aquel profesor siempre dispuesto; sobre todo a aprender y a renovarse continuamente, tanto en lo personal como en lo profesional. Aquel que se preocupa y ocupa para que sus alumnos aprendan. Aquel que se esfuerza para que ellos adquieran una visión más amplia del mundo, que los lleve a buscar nuevos horizontes de realización y superación. Siempre con un sentido humano, a veces con mano dura para ayudarlos a disciplinarse, otras veces suave para reconfortarlos ante los problemas.

En general, alguien que sin importar si su esfuerzo es reconocido o no, pone el corazón en el ejercicio de su profesión. Sin embargo, no debe mal entenderse que, con puro corazón es suficiente, también hace falta acción.

Algunas personas (entre las cuales me incluyo), cuando estamos fuera del ámbito educativo, creemos que podemos emitir juicios válidos sobre la educación en nuestro país, solo por el hecho de que en algún momento de la vida asistimos a la escuela. Desde los primeros días en que ejercí la docencia me di cuenta de cual equivocados estamos. El trabajo educativo es una actividad merecedora de gran respeto y profunda admiración, donde existe un universo de conocimientos en continuo movimiento, por lo que la investigación y la actualización son piezas claves para el desarrollo del mismo.

Durante mi primer año como profesora también pude percatarme de que aunque es muy importante contar con conocimientos sólidos de la materia que se imparte, es de igual o mayor importancia tener las habilidades necesarias para lograr que los estudiantes se apropien de los conocimientos (en este caso matemáticos) y más aún que se mantengan motivados para seguir aprendiendo. Por lo que me di a la tarea de buscar los medios que me previesen de las herramientas necesarias para lograr dichos fines. En mis primeras búsquedas, encontré opciones mecanicistas que si bien en el aspecto técnico son muy útiles, no cubrían totalmente las expectativas de mis propósitos.

Considero que por respeto a la función que desempeñamos, los profesionistas que nos incorporamos a la docencia debemos empaparnos de todo el conocimiento que nos ofrece el ámbito educativo, además de crear un fuerte compromiso para mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos, motivándolos siempre a ser mejores personas, útiles para la sociedad. Actualmente tengo 6 años de experiencia como docente de matemáticas en EMS por lo que particularmente me he interesado por esta línea de estudio e investigación. Dentro del aula de clases he observado las dificultades que tienen los estudiantes al desempeñarse en las asignaturas propias del conocimiento matemático.

Especialmente, los alumnos de primer grado son los que presentan más dificultades para desempeñarse en esta área, además de no sentirse motivados a realizar actividades tanto dentro, como fuera del aula. Algunos de ellos muestran miedo y nerviosismo en cada clase, más aún en los exámenes. Por lo que el motivo principal para llevar a cabo el presente trabajo es la investigación e implementación de herramientas que ayuden a los estudiantes a superar dichas dificultades. Logrando sentirse cómodos con el trabajo matemático, y seguros con respecto a sus habilidades.

Así, inicié mis estudios de maestría en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM), donde tuve la oportunidad de empaparme de mucha información relevante en materia educativa. Con la ayuda e impulso de mis tutores se estructuró el presente trabajo, personalmente motivada por las necesidades educativas de mis estudiantes, e incentivada por mis deseos de superación personal y profesional. Es así que esta investigación nace de la necesidad de adentrarme al mundo de la educación y así adquirir nuevos conocimientos que me permitieran ser una mejor docente en beneficio de mis alumnos.

CAPÍTULO 2

REFERENTES TEÓRICOS Y TECNOLÓGICOS

2.1 Presentación

En este capítulo se exponen distintos referentes teóricos y tecnológicos necesarios para comprender la complejidad de la función lineal. Iniciando por examinar del objeto matemático función en cuanto a su génesis, concepto, características, representaciones y clasificación. Particularizando en el objeto matemático función lineal, su concepto, características y elementos. Posteriormente, se analiza la TRS de Duval (1998, 1999), además de otros constructos teóricos como e l signo, la función semiótica y la representación dentro del ámbito de las matemáticas. Al cierre se detallan las características generales y especificas del software GeoGebra.

2.2 La función lineal

Este apartado se centra en el análisis del objeto matemático función lineal. Previamente se abordan las generalidades del concepto función. Considerando su desarrollo histórico-epistemológico, su concepto dentro del ámbito de la educación matemática, la distinción de sus representaciones y la clasificación de sus variantes. Subsecuentemente se concreta en el concepto de la función lineal, sus características, su relación con la ecuación de la recta y los elementos de la misma (pendiente, ordenada al origen, variable independiente y variable dependiente).

2.2.1 Bosquejo histórico-epistemológico de la función

Uno de los aspectos más importantes de las matemáticas consiste en establecer relaciones entre diversos tipos de fenómenos. Posteriormente, modelizarlos en lenguaje matemático y así realizar predicciones a partir de dichos modelos. Por lo tanto, “es posible que la idea central de las matemáticas sea el concepto función” (Sullivan, 1997, p. 96). El concepto función como otros tantos dentro de las matemáticas ha pasado por numerosos cambios a través de la historia. Para llegar a la definición que actualmente conocemos tuvieron que trascurrir más de 4,000 años. De los cuales 3,700 fueron apenas necesarios para establecer anticipaciones y solo los últimos 300 se perfilaron a la concreción de dicho concepto (Kleiner, 1989).

Grandes matemáticos sortearon diversos obstáculos al tratar de estructurar la concepción básica de la *función*. Con el fin de conocer los aportes de estos estudiosos al establecimiento del concepto señalado y conocer un poco más sobre la complejidad del mismo. A continuación se lleva a cabo una revisión histórica y epistemológica del concepto función. Siguiendo el criterio de

Youschkevitch (1976) quien distingue 3 periodos en el proceso de evolución de la *función*; la época antigua, la cual considera principalmente la matemática babilonia y griega, la edad media que comprende la llegada a occidente de las matemáticas elaboradas por hindúes y árabes y su desarrollo hasta el siglo XVI, y por último el período moderno, que se distingue a partir del siglo XVII.

2.2.1.1 La época antigua

Las culturas griega y babilónica resultan sobresalientes entre otras culturas de la antigüedad por su importante legado a la humanidad. Especialmente con sus impresionantes logros en materia de matemáticas y filosofía (Farfán & García, 2005). En el caso de los babilónicos contaban con un lenguaje algebraico desarrollado, donde hacían uso de la sustitución, el manejo de variables y una ley exponencial. Incluso conocían la ecuación de segundo grado. Si bien ellos no lograron establecer un concepto de función, la intuición primitiva de este concepto se encuentra implícita en sus estudios respecto a diversos fenómenos (Sastre, Rey, & Boubée, 2008), como "por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol" (Sastre et al., 2008, p. 142).

Los babilónicos realizaban registros de las observaciones de varios fenómenos, que plasmaban en tabulaciones. Después intentaban aritmetizar y establecer generalidades de tales observaciones que les permitieran explicar distintos problemas del mismo tipo (Farfán & García, 2005). Pedersen (1974) supone que los matemáticos babilónicos tenían un instinto de funcionalidad, refiriéndose a la idea de asociación de elementos de 2 conjuntos, visible en numerosas tablas de cálculos.

Para los griegos, los objetos matemáticos y las relaciones eran estáticas, por lo que se hablaba en términos de incógnitas e indeterminadas. Lo que condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las variables (Farfán & García, 2005). Realizaron estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes pero no lograron establecer la noción de variable y de función, y menos aún, de simbolizarla (Sastre et al., 2008).

2.2.1.2 La edad media

El desarrollo del concepto de función en la edad media se da en dos fases, la no latina y la latina. La no latina comprende las matemáticas desarrolladas por hindúes y árabes, en el campo del algebra. Estos matemáticos trabajaban con ecuaciones de una incógnita, "pero la idea de variable no surgió, y de este modo, no se consideró que una ecuación con 2 incógnitas establecía una relación funcional entre dos variables" (Díaz, 2013, p. 15). En la fase latina con la caída del imperio Romano en manos turcas, es que llega a occidente grandes aportes por parte de los árabes al campo de la aritmética y la base para una nueva rama de las matemáticas, el álgebra (Sastre et al., 2008). Este periodo se caracteriza por los constantes intentos por modelizar fenómenos naturales a través de procesos de abstracción (Farfán & García, 2005).

En ese momento de la historia es que se empieza a formular la noción de función. Principalmente desde 2 corrientes; por un lado Heytesbury y Swineshead en Inglaterra, a través de la Teoría de la Intensidad de Formas, expresada por tratados sobre proporciones; y por otro lado, Oresme en Francia, con su Teoría la Latitud de Formas, quien expuso una teoría rudimentaria de funciones que tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra (Díaz, 2013). En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez en el plano comúnmente utilizado en Geografía (Sastre et al., 2008).

En los siglos XV y XVI, se sientan las bases de la simbología algebraica que permitió diferenciar entre variable de una función e incógnita de una ecuación. Marcando los indicios que darían pie a la noción de función. Sin embargo el lenguaje algebraico que se manejaba era aún limitado, lo que no les permitió expresar la ley de variación o la correspondencia funcional. No obstante estaban por venir grandes avances en el campo de las matemáticas con aportes de grandes estudiosos de esta ciencia, como Galileo, Descartes y Newton (Ruiz, 1998).

2.2.1.3 Periodo Moderno

En el siglo XVII se da toda una revolución en el campo de las matemáticas, dejando atrás la visión estática y discreta de los antiguos matemáticos, avanzando hacia una visión dinámica y continua de la relación funcional. Se produjeron sucesos de gran trascendencia para la concepción de la noción de función, entre los cuales se encuentran: la amplitud de la idea de número, a números reales, e incluso a números complejos (Bombelli, Stifel), la génesis del álgebra simbólica (Vieta, Descartes), el estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo), la asociación entre el Álgebra y la Geometría (Fermat, Descartes) (Sastre et al., 2008).

Con los aportes de Galileo, se logra pasar de la abstracción a la modelización matemática de los fenómenos a través de resultados experimentales. Él se centró en la relación causa y efecto, dando esencia a la concepción de variable dependiente (Farfán & García, 2005). Introdujo también "lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la Teoría de las Proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional" (Sastre et al., 2008, p. 145).

Posteriormente, el filósofo, físico y matemático René Descartes fue vanguardista al establecer la idea de plantear una función en forma analítica señalando "que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable" (Sastre et al., 2008, p. 146). Mostró una idea muy clara sobre variable y función. Definiendo a la función como "una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable" (Sastre et al., 2008, p. 146). Con esta definición se sientan las bases de la noción formal de función (Farfán & García, 2005).

Leibinz fue el primer matemático que utilizó el término función, aludiendo a cualquier cantidad que varía de un punto a otro. Además propuso las palabras: constante, variable, coordenadas y parámetro en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad (Sastre et al., 2008). En el siglo XVIII se estudian "los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza notablemente analítica impregnada aún de ideas infinitesimalistas de Leibniz" (Farfán & García, 2005, p. 491). En este periodo se da la primera definición formal de la función, referida por Bernoulli, donde señala que "por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro, con esta cantidad variable y constantes" (Rüthing, 1984, p. 72).

Este matemático suizo fue el primero en considerar a la función como una expresión analítica. Además propone a la letra f para designar una función, escribiendo $f\,x$. Posteriormente los trabajos de Bernoulli son retomados por Euler quien finalmente designa a la función como $f(x)$ (Farfán & García, 2005). Euler, concreta la definición de nociones como constante y cantidad variable (Sastre et al., 2008), pero es hasta 1755, que define a la función como una expresión analítica, “la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes” (Rüthing, 1984, p. 72).

Este matemático suizo llevó más allá la concepción de función, considerándola como un objeto matemático. La cual hasta ese momento había sido considerada exclusivamente como un instrumento para dar respuesta a problemas dentro del campo de la Física. Euler abrió así la posibilidad de estudiar las funciones como objetos matemáticos (Sastre et al., 2008). Por lo que se puede inferir, que quien retomó y convirtió el cálculo leibniziano en una estructura organizada fue Leonhard Euler, dándola a conocer en 1748, en su libro *introduction a l´analyse infinitesimale*, donde define a sus objetos de estudio, las funciones como:

> […] una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes [...], y las cantidades sobre las que opera [...]. Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados [...]. Un valor determinado cualquiera puede expresarse por un número, y de aquí se sigue que una cantidad variable comprende todos los números, cualquiera que sea su naturaleza. Sucede con la cantidad variable como con el género y la especie en relación a los individuos; puede concebírsele como abarcando todas las cantidades determinadas. Así, una tal cantidad (variable) abarca todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros y los fraccionarios, los racionales, los irracionales, y los trascendente; incluso no debe excluirse el cero ni a los números imaginarios (Euler, 1748, p. 2).

En 1822 el físico-matemático francés Fourier, en su obra *Analytic Theory of Heat*, en la cual aborda la conducción del calor, plasmaba la idea que la temperatura podía ser considerada como una función de 2 variables, tiempo y espacio. Siendo posible desarrollar una función dado un intervalo apropiado mediante una serie trigonométrica. Sin embargo, solo fueron conjeturas no probadas matemáticamente. En su definición de función resaltaba que lo primordial era la asignación de valores (Sastre et al., 2008), si ésta asignación era llevada a cabo por una o varias fórmulas no era importante (Kleiner, 1989). Su definición de función fue la siguiente:

> […] en general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única (Rüthing, 1984, p. 73).

El siglo XIX se encuentran diversos aportes que enriquecen el estudio de la función como son los trabajos de Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet, Weirstrass, Lebesgue, Borel y Riemann. Quienes describían a la función como una correspondencia de tipo general (Ruiz, 1998). Dirichlet, fue uno de los primeros exponentes de la matemática crítica en ese siglo. Retomo el trabajo de Fourier, tras años de estudio reconoció que la afirmación de Fournier en la que señala "que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso" (Sastre et al., 2008, p. 150). No obstante, con sus estudios realizados sobre la función establece por primera vez el concepto moderno de la misma, donde $y = f(x)$,

> [...] y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia (Luzin, 1940, p. 325).

Simultáneamente, en Francia el matemático Cauchy, apegándose a un estricto rigor matemático concebía a la función de la siguiente manera: "cuando las cantidades variables están vinculadas entre sí de tal manera que, cuando se da el valor de uno de ellos, podemos inferir los valores de todos los demás" (Bottazzini, 1986, p. 104). Con el paso del tiempo la evolución del concepto función continuó, se pasó de la idea de correspondencia a la idea de relación y fue al siglo XX al que le correspondió al uso pleno y el estudio integral del concepto basado en la noción general de función establecida por Dirichlet (Farfán & García, 2005). En 1917 Caratherdory definió a la función como: "una regla de correspondencia desde un conjunto A en los números reales" (Malik, 1980, p. 492).

En los años treinta, un grupo de matemáticos franceses denominado Nicolas Bourbaki retoman la idea de Dirichlet, definiendo a la función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde:

> [...] sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F, el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. (Rüthing, 1984, p. 75).

Además, plantearon la definición de función equivalente, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus escritos mencionaban que "una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano E x F" (Kleiner, 1989, p. 18). En los años setentas Spivak resalta el papel de las funciones dentro del campo de las matemáticas, señalando al respecto:

> […] el concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad (Spivak, 1978, p. 49).

El matemático neoyorquino Michael Spivak en su obra *calculus* (la cual se rige por un alto nivel de rigor y precisión sobre cuestiones matemáticas), llevó de la mano al lector para establecer una definición critica de la función, iniciando con un primer acercamiento al concepto de la siguiente manera, "una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real" (Spivak, 1978, p. 49). Posteriormente, a través de una serie de ejemplos y apegándose al rigor que caracteriza sus escritos, enriqueció su propia definición de función donde estableció que:

> […] si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un numero de b único, tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$ […] (Spivak, 1978, p. 60).

En esta misma obra hizo referencia a la notación que comúnmente se emplea para la función. En donde se usa a f para hacer referencia a una función, aún que el uso de esta letra no es una regla general, pues a fin de cuentas puede servir cualquier letra e incluso cualquier símbolo razonable, excluyendo a x y y pues estas letras se destinan para designar números. De tal modo, que lo mismo da indicar $f(a)$, $f(b)$, $h(x)$ o $g(c)$ (Spivak, 1978). "Si f es la función, entonces el número que f asocia con x se designa por $f(x)$, este símbolo se lee f de x y se le da con frecuencia el *valor de f en x"* (Spivak, 1978, p. 51).

Durante la revisión histórica del concepto función se evidenciaron las diferentes formas bajo las cuales se ha revelado dicho concepto, se puede observar que su desarrollo ha experimentado una trasformación a la par del desarrollo histórico de las matemáticas. En la actualidad el debate entre los matemáticos para definir las funciones no ha cambiado significativamente respecto al milenio pasado, sin embargo, el asunto no se considera algo acabado.

2.2.2 El concepto de función en el ámbito de la educación matemática

El ámbito educativo no se ha mantenido lejos de la evolución del concepto de función. Incluso, dicho concepto ha permanecido como tema de interés dentro de la comunidad de la educación matemática. Algunos investigadores y profesores de este campo del conocimiento se han preocupado por que los estudiantes se familiaricen con el manejo e interpretación de las funciones (Rangel, 1991). Por lo que definen a la función de forma clara y precisa, facilitando su comprensión. Tal es el caso de Rangel (1991), esta investigadora refiere que una función es un conjunto de parejas ordenas, cuya relación es biunívoca, esto es, que a cada elemento del conjunto A le corresponde únicamente un elemento del conjunto de B.

Autores como Prado, Santiago, & Aguilar (2006) así como Sobel & Lernerb (1998) llamaron a esta relación biunívoca de forma más específica, denominándola como una regla de correspondencia, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento y solo uno del segundo. Por otro lado, Faires & De franza (2001) además de Stewart, Redlin, & Watson (2001) definen a la función en términos de dependencia, pues consideran que dicho concepto es una regla que pormenoriza la forma en que una cantidad depende de otra. Esto es que "cada valor de una cantidad […] llamada variable independiente, tiene asociado un valor único de otra, que se denomina variable dependiente"(Faires & De franza, 2001, p.36).

La variable independiente representa los diversos valores arbitrarios que toma esta variable dentro de un conjunto específico llamado Dominio. La variable dependiente, representa los valores que puede tomar un conjunto de llegada o final, también llamado conjunto recorrido, imagen, rango o codominio (González, 2015). Las letras que se utilizan para denotar las variables independiente y dependiente pueden variar, aunque regularmente se usan x para indicar la variable independiente y y para la variable dependiente (Sobel & Lerner, 1998).

La denotación utilizada para señalar que y es una función (f) de x es $f(x)$, la cual se lee f de x o f en x. Por lo tanto la expresión analítica de la función se establece como $y = f(x)$ (Prado et al., 2006).Si comparamos a una función con una máquina, la variable independiente del conjunto dominio de la función representa los ítems de entrada elegidos por quien deposita dichos ítems dentro de la máquina, los cuales al entrar a la misma, se transforman de acuerdo con las reglas de la función. Así podemos considerar al dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y al rango o imagen como todas las posibles salidas (Stewart et al., 2001).

En general para todas las funciones se puede decir que:

> […] se llama dominio (D) al primer conjunto, el cual está definido en el campo de los números reales. A cada elemento asociado con un elemento del dominio en el segundo conjunto se le conoce como imagen, dada su dependencia con el elemento del dominio según la regla de correspondencia, por lo que el conjunto de imágenes se conoce como conjunto imagen de (I). Ningún elemento del dominio puede quedarse sin su asociado en el conjunto imagen y no puede tener más de uno. Ya que la función relaciona a cada elemento del dominio con un solo elemento del conjunto imagen. Representaríamos a la función como un conjunto de pares ordenados (x, y), en donde no puede haber dos parejas distintas que tengan el mismo primer elemento. A x y y se les llama variables de la función; específicamente más no obligatoriamente a x, variable independiente y a la y, variable dependiente (Sobel & Lerner, 1998, p.136).

2.2.3 Las representaciones de la función

Existen 4 formas de representar a la función, la representación verbal, la algebraica, la tabular y la gráfica. La representación verbal, se da mediante el lenguaje natural, se utilizan palabras y expresiones propias de la lengua. Por ejemplo la regla que señala que: el área de un círculo depende de su radio; o bien la relación entre la temperatura del agua y el tiempo que permaneció en refrigeración (Prada et al., 2016).

En la representación algebraica se utilizan fórmulas de tipo algebraico, en las que se visualiza la expresión que relaciona las variables. En la expresión algebraica de una función se hace uso de magnitudes constantes y magnitudes variables. Una magnitud constante representa un valor fijo (Lehmann, 1981), mediante el uso de "[…] un símbolo que corresponde exactamente a un solo objeto" (Barnett, 1984. p.8). Regularmente para representar a las constantes se utilizan las letras a, b, c, sin embargo, pueden utilizarse otras letra del alfabeto, tomando en cuenta que x, y y z, frecuentemente se utilizan para denotar a las variables (Barnett, 1984).

En cuanto a las magnitudes variables se puede decir que una variable representa a cualquiera de los elementos de un conjunto específico de objetos, es un símbolo que usualmente es una letra (Dolciani, Berman, & Freilich, 1979). Una variable es pues "una literal que adquiere varios valores en un problema dado" (Gobran, 1990, p. 7). Para nombrarla, frecuentemente se emplea a las letras, $x, y, z,$ aunque se pueden usar otras letras del alfabeto. Por lo general las variables se escriben con cursivas (Ángel, 2007).

En la representación tabular, se identifican valores asociados de la variable independiente y dependiente, ordenados en tablas. El termino tabla hace referencia a la estructura donde se realiza el ordenamiento y acomodo de los datos conocidos y los que necesitamos hallar, dicha estructura consta de un arreglo de filas y columnas. Usualmente en la tabla se observa en primer término los datos independientes es decir el dominio y en segundo término los datos cuyo valor depende de los primeros es decir el rango. El diseño de la tabla puede variar, ajustándose a las necesidades de presentación de los datos. No se debe de perder de vista, que el ordenamiento de los datos debe reflejar la relación de dependencia entre las variables (González, 2015).

La representación gráfica se apoya de representaciones gráficas como el del plano cartesiano, los pares ordenados y otros del mismo estilo (Prada et al., 2016). El plano cartesiano es una herramienta gráfica usada en circunstancias donde se requiere un punto de referencia o localización. Recibe su nombre en honor a Réne Descartes, matemático francés al que se le conoce como el padre de la Geometría Analítica. El plano cartesiano consta de 2 rectas perpendiculares entre sí, llamadas, $ejes\ de\ coordenadas$ o $ejes\ coordenados$ (González, 2015).

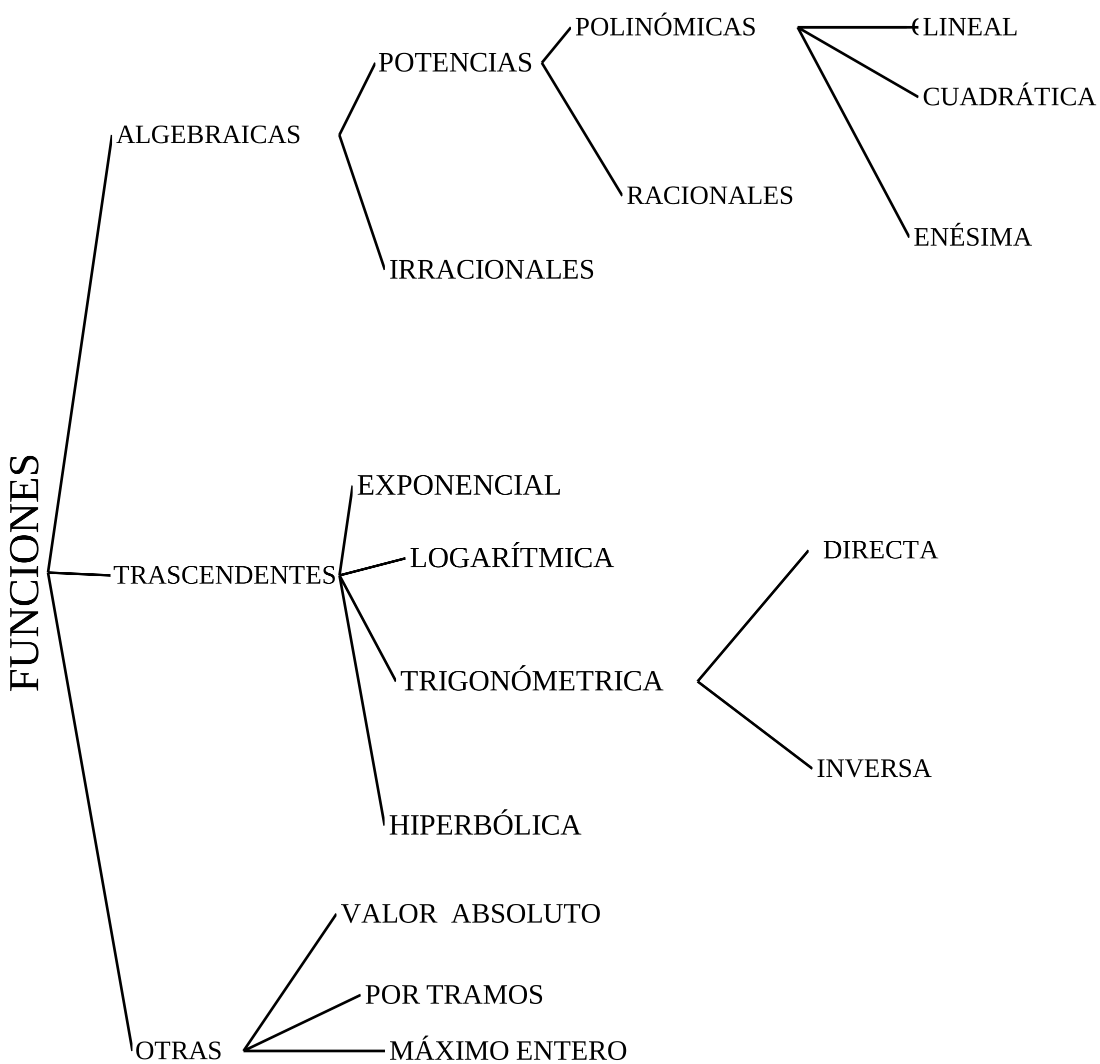
La recta horizontal se llama $eje\ x\ o\ eje\ de\ las\ abscisas$.La recta vertical es conocida como el $eje\ y\ o\ eje\ de\ las\ ordenadas$. El punto de intersección de las rectas se le llama origen y se localiza en el punto (0,0). Estos ejes coordenados dividen el plano en 4 regiones llamadas cuadrantes, numerados con números romanos en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. La dirección positiva del $eje\ x$ es hacia el este (hacia la derecha), la dirección negativa del mismo eje es hacia el oeste (hacia la izquierda). La dirección positiva del $eje\ y$ es hacia el norte (hacia arriba) y la dirección negativa del mismo eje es hacia el sur (hacia abajo) (González, 2015).

Para localizar un punto (P) en el plano cartesiano se hace uso del sistema rectangular y se representa con el símbolo $P\ (x, y)$. A cada punto (P) del plano coordenado le corresponde uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíprocamente, un par de coordenadas (x, y), determina uno y solamente un punto en el plano coordenado. Un par de coordenadas, es un par ordenado de números reales. La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama trazado de punto (González, 2015).

2.2.4 Clasificación de las funciones

La expresión matemática $y = f(x)$, la cual muestra la relación de x con y, da lugar a distintos tipos de funciones con nombres propios, así como características y propiedades particulares. A continuación la figura 3 presenta un diagrama que muestra la clasificación de las funciones de acuerdo a características comunes, considerando que los tipos de funciones son muy diversos, solo se abordan aquellas que se encuentran presentes en el currículum del BE en el Estado de México.

Figura 3. Clasificación de las funciones



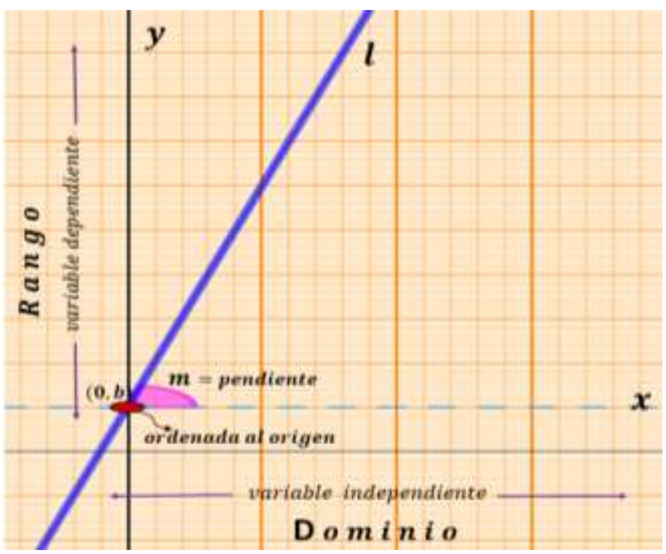
Fuente: Elaboración propia

2.2.5 El objeto matemático función lineal

La función lineal es una función de tipo algebraica, exponencial y polinómica de primer grado. Cuya expresión analítica es $f(x) = mx + b$. Donde m y b son constantes reales y $m \neq 0$. Toda función lineal representa una recta en el plano cartesiano como se muestra en la figura 4. Por lo que la forma simplificada de la ecuación de la recta, $y = mx + b$ también la define. En ambas expresiones el coeficiente de x es el valor de la pendiente de la recta m y el término independiente b representa la intersección de la recta con el eje de las ordenadas $(0, b)$ (Sobel & Lerner, 1998).

La variable x representa los posibles valores que se le asignan a la variable independiente dentro del dominio de la función, el cual se encuentra dentro de los reales, por lo que la variable independiente x es una variable real. En cuanto a la variable y, esta representa a la variable dependiente y, la cual comprende los distintos valores transformados por la regla $f(x)$ dentro de un conjunto de llegada o final, también llamado conjunto recorrido, rango, imagen o codominio. La imagen de la función también pertenece a los reales, en consecuencia la variable dependiente y también es una variable real (Sobel & Lerner, 1998).

Figura 4. Función lineal



Fuente: Elaboración propia

Las funciones lineales tienen la propiedad de que cualquier cambio en la variable independiente (x) tiene como resultado un cambio proporcional en la variable dependiente (y). Por otro lado, en una recta la pendiente siempre es constante y la línea que representa gráficamente a la función es tangente con respecto a los ejes del plano cartesiano. Si se modifica la pendiente (m) entonces cambiara el ángulo de inclinación de la recta con respecto al $eje\ x$. Así mismo si se modifica la ordenada al origen (b), entonces la intersección de la línea con el eje de las ordenadas $(eje\ y)$ se desplazará sobre el mismo eje ya sea hacia arriba o hacia abajo (Faires & De franza, 2001).

2.2.5.1 Forma simplificada de la ecuación de la recta

Debido a que en la función lineal la relación entre 2 conjuntos se muestra como una serie continua de infinitos pares ordenados en una misma dirección, formando gráficamente una línea recta que no tiene curvas ni ángulos (Faires & De franza, 2001). Es que dicha recta puede ser expresada con la ecuación $Ax + By = C$, en donde A, B, C son constantes, y A y B son ambas distintas a 0; y x y y son variables. A esta expresión se le conoce como la forma general de la ecuación de la recta. La cual al ser simplificada como se muestra en la figura 5, se obtiene la forma $y = mx + b$ también llamada forma pendiente-ordenada al origen (Stewart et al., 2001).

Figura 5. Simplificación de la ecuación de la recta

Ecuación general de la recta $Ax + By = C.$

$$By = -Ax + C$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Nótese, en este caso, que la pendiente (m) es $-\frac{A}{B}$ y la ordena al origen (b) es $\frac{C}{B}$

Así que $\boldsymbol{y = mx + b}$, la forma simplificada de la ecuación general de la recta, también llamada pendiente ordenada al origen.

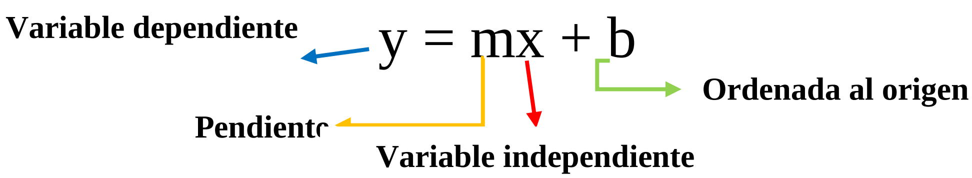
$$\therefore\ f(x) = y = mx + b$$

Fuente: Elaboración propia con información de Stewart et al. (2001) & Sullivan (1997)

2.2.5.2 Los elementos de la función lineal

Como se muestra en la figura 6, el objeto función lineal está constituido por un conjunto de elementos que lo hacen posible, entre los cuales se encuentran las constantes, pendiente m de la recta y ordenada al origen b, además de las variables independiente x y dependiente y.

Figura 6. Elementos de la función lineal



Fuente: Elaboración propia

2.2.5.2.1 Pendiente

La pendiente es la tangente del ángulo ($tan\ \alpha$) positivo que forma la recta con el eje de las abscisas, es decir, es el ángulo de inclinación de la recta con respecto al $eje\ x$. Suele estar representada en la ecuación simplificada de la recta por la constante m, aunque algunos prefieren usar la letra a (Stewart et al., 2001). En una función lineal cuando la variable dependiente y aumenta a medida que la variable independiente lo hace, se dice que hay un crecimiento (Faires & De franza, 2001).

Asimismo, la recta se inclina hacia la derecha teniendo un ángulo (α) agudo (mayor de 0° y menor de 90°) (Rangel, 1991). Por lo tanto, su pendiente es positiva ($m > 0$). Dicho elemento de la función lineal determina también la dirección de la recta. Una recta con pendiente positiva se dirige hacia arriba, avanzando de izquierda a derecha. Su valor numérico indica cuánto crece la variable dependiente por incremento unitario de la variable independiente. Los valores de y aumentan con mayor rapidez en una recta con pendiente positiva grande, que en una con pendiente positiva pequeña (Faires & De franza, 2001).

Cuando la variable dependiente disminuye mientras la variable independiente aumenta, se habla de un decrecimiento. El decrecimiento está denotado con el signo negativo de la pendiente, en tanto que su valor numérico, representa la disminución de la variable dependiente por incremento unitario de la variable independiente (Stewart et al., 2001) Por lo tanto, la pendiente es negativa ($m < 0$), su ángulo (α) de inclinación es obtuso, mayor de 90° y menor de 180° (Rangel, 1991).

Una recta con pendiente negativa se inclina hacia la izquierda, dirigiéndose hacia abajo, avanzando de izquierda a derecha, y los valores de y disminuyen cuando aumenta los valores de x. Asimismo, los valores de y disminuyen con mayor rapidez en una recta con pendiente negativa que es pequeña en magnitud (Faires & De franza, 2001).

Cuando una recta tiene pendiente cero ($m = 0$), no existe crecimiento o decrecimiento, su dirección es constante, por lo que la función toma la forma $y = b$, donde b es un número dado con valor constante. La variable dependiente se mantiene con el mismo valor en tanto la variable independiente aumenta o disminuye según sea el caso. Por lo tanto, se considera que $m = 0$, solo se encuentra en una función constante ($f(x) = k$ y no en una función lineal ($y = mx + b$). Gráficamente se representa con una recta horizontal (Faires & De franza, 2001).

2.2.5.2.2 Ordenada al origen

Una recta es una sucesión continua e indefinida de puntos. Cada punto puede identificarse mediante pares ordenados de números reales y denotarse en coordenadas (Stewart et al., 2001). Al par ordenado (0,0), se le considera como el origen de un sistema bidimensional de coordenadas cartesianas, y es el punto de referencia para identificar otros punto en el plano. El valor de esta coordenada es nulo (Faires & De franza, 2001).

Un sistema bidimensional de coordenadas cartesianas está formado por 2 rectas, una horizontal y otra vertical las cuales se intersectan en el punto origen (0,0). ¨La recta horizontal se llama primer eje coordenado o con mucho más frecuencia, el $eje\ x$ o eje de las abscisas. La recta vertical se llama segundo eje coordenado, $eje\ y$ o eje de las ordenadas” (Faires & De franza, 2001, p. 13). Por lo que se puede pensar a las coordenadas como una dirección sobre el plano, pues ellas definen la localización de un punto (Stewart et al., 2001).

Un punto P designado por el par ordenado (a, b) se asocia con la intersección de la recta vertical que pasa por el punto a del $eje\ x$, con la recta horizontal que pasa por el punto b del $eje\ y$ (Faires & De franza, 2001), donde al número representado por a se le llama coordenada x o abscisa de P; el segundo número del par ordenado se conoce como la coordenada y u ordenada de P (Stewart et al., 2001).

Para conocer la intersección de la recta con los ejes coordenados, es preciso asignarle a uno de los 2 números del par ordenado el valor de cero. En el caso de la intersección con el eje de las abscisas se le da a b el valor de cero, $(a, 0)$, así mismo para conocer la intersección de b con el eje de las ordenadas se requiere asignarle a a el valor de cero $(0, b)$. Por otro lado, como se comentaba en apartados anteriores, dado que solo es necesario conocer 2 puntos que estén comprendidos dentro de una recta para poder trazarla, es que lo antes mencionado facilita la representación gráfica de la misma (Faires & De franza, 2001).

Conocer la intersección de la recta con los ejes cartesianos también facilita la construcción de la ecuación simplificada de la recta $(y = m x + b)$. En dicha expresión la ordenada al origen es un valor constante que gráficamente es representado como la intersección de la recta con él $eje\ y$, es decir el punto donde la recta toca al eje de las ordenadas. Otra manera de percibir a la ordenada al origen es reconociéndola como la distancia que hay entre el punto de origen del sistema de coordenadas y el punto donde la recta corta al $eje\ y$ (Sobel & Lerner, 1998).

2.2.5.2.3 Variable independiente

Una función lineal en términos de dependencia establece una regla donde una cantidad depende de otra (Faires & De franza, 2001; Stewart et al., 2001). Estas 2 cantidades variables están relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de un conjunto A, corresponde un valor único perteneciente a un conjunto B, dando lugar a una variable independiente x y otra dependiente. El termino variable independiente, también llamada variable de entrada o manipulada es aquella cuyo valor no depende de otra magnitud, puede variar independientemente de otras variables y produce un efecto en la variable dependiente (Sobel & Lerner, 1998).

A esta variable se le pueden asignar distintos valores arbitrarios pertenecientes a un conjunto llamado Dominio. Las letras que se utilizan para representar algebraicamente a la variable independiente pueden variar, aunque generalmente se emplea a x. En la función lineal, la variable independiente pertenece al conjunto de los reales y siempre tendrá grado uno (Sobel & Lerner, 1998). En su representación tabular la variable independiente frecuentemente se presenta en primera instancia, es decir en la primera fila o primera columna de la tabla, dependiendo del acomodo de los datos (González, 2015).

Gráficamente el dominio de la función, es decir los valores que adopta la variable independiente, se representan en el eje coordenado horizontal del plano cartesiano, también llamado $eje\ x\ \ o\ eje\ de\ las\ abscisas$, a través de la localización de coordenadas, donde el par ordenado x de la coordenada (x, y) representada el valor adoptado por la variable en cuestión (González, 2015).

2.2.5.2.4 Variable dependiente

La variable dependiente está supeditada a la variable independiente. Es decir, es aquella cantidad o magnitud cuyo valor depende directamente del valor adoptado por la variable independiente. Su nombre resulta del hecho de que depende o responde a otra variable. Si bien la variable independiente puede producir cambios en la variable dependiente, es imposible, que esta última pueda producir cambios en la primera. En la función lineal, la variable dependiente, pertenece a los números reales y siempre tiene grado uno (González, 2015).

La variable dependiente en la función lineal comprende los valores que se obtienen después de aplicar la regla $f(x) \ = mx + b$. En otras palabras, es el presunto "efecto" de la aplicación de la regla de la función. Dichos valores obtenidos se alojan en un conjunto llamado de llegada o final, también conocido como conjunto recorrido, imagen, rango o codominio (González, 2015). La variable dependiente dentro de la función puede representarse con cualquier literal, sin embargo frecuentemente se emplea la letra y para denotarla. Teniendo entonces que $f(x) \ = mx + b = y$ (Sobel & Lerner, 1998).

En su representación tabular la variable dependiente frecuentemente se presenta en segunda instancia, es decir en la segunda fila o segunda columna de la tabla, dependiendo del acomodo de los datos (González, 2015). Gráficamente el rango de la función, es decir los valores que adopta la variable dependiente, se representan en el eje coordenado vertical del plano cartesiano, también llamado $eje\ y\ \ o\ eje\ de\ las\ ordenadas$, a través de la localización de coordenadas, donde el par ordenado y de la coordenada (x, y) representada el valor adoptado por dicha variable (González, 2015).

2.3 La teoría de las representaciones semióticas

La actividad matemática se realiza en un contexto de representación (Duval, 1999), esto debido a la dualidad de dicha actividad, pues por un lado está el contenido matemático conceptual y por otro las representaciones semióticas que se pueden elegir de acuerdo a las necesidades de comunicación o a el coste del tratamiento. En el ámbito de la educación matemática la noción de representación se toma como equivalente a un signo o sistema de signos que denotan y hacen presente así como manipulable a un objeto matemático. De tal forma, que las representación están en el centro de todo acto matemático, pues a diferencia de otro tipo de conocimientos no existe otra manera de acceder a dichos objetos, sino a través de sus representaciones (Duval, 2006).

Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene su propia significación y funcionamiento. Los sistemas semióticos de representación son principalmente usados para operar, es decir para el tratamiento y manipulación de un objeto matemático. Un sistema semiótico puede ser un sistema de registro de representación siempre y cuando permita la existencia de una representación plenamente identificable que pueda ser transformada desde el mismo registro donde fue originalmente creada, así como transformable en otro u otros tipos de registro, conservando la totalidad o parte del significado que contenía inicialmente (Duval, 2006).

Otro aspecto a resaltar de las representaciones semióticas es que su contenido no depende solo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Sin embargo, debe quedar muy claro que una cosa es el objeto matemático como tal y otras son las diferentes representaciones semióticas que son usadas para denotarlo. Para evidenciar la comprensión del objeto es necesario reconocerlo en cada una de sus representaciones. Por ejemplo, el concepto función puede ser denotado por un enunciado en lenguaje coloquial, una fórmula algebraica, una tabla o una representación gráfica (Duval, 2006).

Estos 4 registros de representación pertenecen a sistemas semióticos diferentes y a menudo el pensamiento matemático requiere activarlos en paralelo para a apropiarse de dicho concepto. La comprensión de los objetos matemáticos depende estrechamente de la coordinación de varios de estos registros. Los estudios experimentales de Duval (1988, 1993, 1995), que involucran los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y los problemas de conversión de representaciones entre 2 o más sistemas de un mismo objeto matemático, ha generado una nueva noción del registro de representación, cuya idea está totalmente ligada a las funciones esenciales para toda actividad cognitiva.

En tanto a las representaciones semióticas de la función lineal, como se menciona en apartados anteriores existen 4 tipos de registros de representación, cada uno de ellos evidencia la relevancia de los distintos elementos de dicho objeto matemático (Janvier, 1987). Según Janvier (1987), las representaciones de la función lineal son la representación verbal o coloquial, la representación algebraica o analítica, la representación tabular y la representación gráfica. Desde el punto de vista semiótico la representación verbal es la más próxima a las habilidades comunicativas de un sujeto, permitiendo articular todos los demás tipos de representaciones de la función y además ofrece la posibilidad de actuar como intérprete de todas ellas.

Asimismo, auxiliándose del lenguaje algebraico surge la representación algebraica o analítica. De la misma forma resaltando el aspecto numérico, así como el aspecto relacional de la función se pone de manifiesto la representación tabular. Por su parte, la representación gráfica es la que por excelencia es utilizada para facilitar la comprensión de la función, ya que cuenta con un elemento potencializador que es la visualización, la cual se apoya de elementos geométricos, topológicos, además de la administración de colores, tramas etc. Es importante comentar que en cada una de las ya mencionadas representaciones semióticas de la función lineal, se emplean registros diferentes para evidenciar la relación funcional entre las variables, sin embargo esto no significa que codifiquen de la misma manera la información, ni que la complejidad o modo de comprensión por parte de los estudiantes sea la misma (Janvier, 1987).

2.3.1 La semiótica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

A lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes se ven inmersos en un mundo tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Por lo que resulta importante para los docentes identificar cómo al interior del aula los signos emergen en pro de la construcción de un concepto. La semiótica brinda la posibilidad de transfigurar prácticas educativas a través de la comprensión de cómo el alumno construye un concepto usando artefactos y signos, es decir, si dichos elementos son utilizados para crear nuevas ideas. Por su parte, el docente necesita generar espacios al interior del aula para que se den estos procesos y poder explicar la manera en que los estudiantes a través de su creatividad son capaces de crear conocimiento, lo cual enriquecerá sus prácticas educativas además de brindarle respuestas de cómo los estudiantes aprenden (Forero, 2016).

En toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos, por tanto, el aprendizaje de las matemáticas esta intrínsecamente ligado a la actividad semiótica. Peirce (1974), un perspicaz investigador de los signos introdujo el término semiótica definiendo a esta como un "campo científico articulado en torno a reflexiones de carácter lógico-filosófico que tuvieran como objeto específico de su investigación la simbiosis, es decir, el proceso de significación donde participan un signo, su objeto y su interprete" (Zecchetto, 2002, p. 8). Por su parte Morris (2005) define a la semiótica como la teoría de signos, cuyo propósito es estudiar los conceptos básicos y generales que atañen a la problemática sígnica. De tal forma, que esta ciencia se presenta como una visualización "del modo en que las cosas se convierten en signos y son portadoras de significado" (Zecchetto, 2002, p. 13).

El campo de actuación de la semiótica abarca todos los aspectos que tocan las formas y las relaciones sígnicas de las cosas, o sea, signos y lenguajes que alimentan fenómenos de significación. Por tanto, se podría considerar a esta ciencia no solo como la ciencia de los signos sino también como la ciencia de las significaciones, sin que esto implique que ambos aspectos deban ser disociados (Morris, 2005). De este modo, la semiótica permanece como la ciencia de los signos que circulan y producen sentido en diversos ámbitos, "tomando en cuenta sus lenguajes, lo que ellos revelan, lo que dicen y como dicen las cosas que la gente hace" (Zecchetto, 2002, p. 18).

La teoría de los signos aporta fundamentos necesarios para articular cualquier ciencia donde se empleen algún tipo especial de signos, como la lingüística, la lógica y la matemática (Zecchetto, 2002). En general, la semiótica es una ciencia puramente relacionada con la comunicación, cuya teoría se encarga del estudio de los signos y su campo de acción se extiende a fenómenos específicos y particulares de diversos ámbitos, tal es el caso de la semiótica en las artes (teatro, cine, música o literatura), en la publicidad o en las historietas, no sin dejar de mencionar el ámbito lógico-matemático. Al respecto, Morris (2005) menciona que la semiótica es una ciencia pero a la vez un instrumento.

En un sentido más amplio la semiótica como toda ciencia se relaciona con el conocimiento, y la forma mediante la cual podemos llegar a él a través del vehículo imprescindible de los signos. En este aspecto dicha teoría tiene como objetivo analizar las relaciones entre el pensamiento, el lenguaje y las situaciones en que tiene lugar la actividad matemática, así como los contextos con que tiene relación los signos usados para representar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo, proporcionando información sobre la forma en que funcionan las prácticas educativas, articulando entre los componentes semióticos y epistemológicos de los objetos matemáticos (Godino, 2002).

La matemática y las semiótica han nacido y crecido juntas, sosteniéndose una a la otra, aunque es a partir de los años 90 que la segunda "irrumpe con fuerza en la educación matemática, y esto gracias a los problemas específicos y urgentes, que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática reveló y aún continúa revelando en escuelas de todo el mundo" (D'Amore, Fandiño, & Iori, 2013, p. 21). Lo que ha llevado a docentes e investigadores de dicho campo a interesarse por el estudio del rol que ejercen los medios de expresión en los procesos de pensamiento, el significado y la naturaleza del conocimiento matemático así como de los procesos de llegar a conocer (comprensión matemática) (Llinares & Godino, 1988).

2.3.1.1 El signo como reflejo del pensamiento humano

Apenas el ser humano se posiciona ante el mundo se da cuenta que existen cosas; de tal manera que se coloca como un ser que percibe. La percepción, como primer conocimiento de una cosa por medio del uso de los sentidos, permite el diálogo entre el individuo y el mundo que le rodea. Por lo que dicha acción es considerada como el fundamento de la interpretación de la realidad. Para lograr un sentido significativo de la realidad los sujetos nos vemos obligados a construir otras cosas llamadas signos (Zecchetto, 2002). Peirce (1974), define a los signos como objetos que están en el lugar de otros. Esto es, que cada vez que pensamos o imaginamos alguna cosa hacemos una reproducción mental de la misma pero bajo la apariencia que nuestra mente percibe.

Lo que origina una relación tríadica entre "el referente u objeto referido (que puede ser real o imaginario), el significante, correspondería al aspecto material del signo, y el significado es aquello que se manifiesta por ese hecho material, y que asumimos como algo que existe en nuestro pensamiento" (Wenger, 2014, párr. 1). Según la visión de Peirce (1974), el signo es una representación equivalente o incluso más desarrollada de una idea creada en el pensamiento de una persona, lo que nos refiere a la definición clásica del signo hecha por el mismo autor, donde un objeto presente se relaciona con otro ausente, es decir un objeto que tiene forma física, lo cual le permite ser perceptible a los sentidos evoca a una idea abstracta. De tal forma, que los signos, no son entes abstractos, sino elementos de uso activo (Zecchetto, 2002).

Peirce (1974) creía en la existencia de una dimensión teórico-cognitiva del actuar humano, donde el sujeto se mueve dentro de su entorno guiado por ideas de tipo existencial y pragmáticas, siendo la función del pensamiento organizar y transformar el campo de la experiencia para coordinar las acciones humanas. Wenger (2014) en concordancia con la idea de signo establecida por Peirce (1974) establece 3 clases de signos: el ícono, el índice y el símbolo.

> […] el icónico surge cuando hay una similitud topológica entre su significado y su denotado (referente). Se puede clasificar a su vez en: imágenes, diagramas y metáforas. Por ejemplo un retrato, una fotografía, una filmación o cualquier aparato que funcione con base en la analogía, un termómetro o un velocímetro analógico. El índice, cuando su significante es contiguo a su significado, o es una muestra de él. Por ejemplo huellas, rastros de un animal o de un ser viviente, señalar con un dedo "aquí", "allí". Símbolo, en el cual se da un vínculo convencional entre su significado y su denotado (referente), además que se da una clase intencional para su designado. Por ejemplo la torre Eiffel es el símbolo de París, un emblema, un escudo, una palabra (signo verbal) (Wenger, 2014, párr. 3).

Los conjuntos de signos o de símbolos que representan algo pueden ser externos o internos. Por ejemplo, los mapas, los diagramas y los dibujos son tipos de representaciones externas, elaboradas con propósitos comunicativos y producidos por acciones intencionadas o no intencionadas de las personas, que usamos permanentemente en nuestras vidas. También lo son las palabras y otras notaciones simbólicas de uso común, por ejemplo, las que empleamos en los campos de la física, la química y las matemáticas. Estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas (Tamayo, 2006, p. 3).

Por otra parte para Saussure (1916) el signo no es solo una traza que representa alguna cosa o un nombre que designa a la misma, sino un proceso mental biunívoco que comprende 2 elementos indisociables, por un lado un significante, determinado siempre por algo material que puede ser percibido por los sentidos y por otro lado el significado, refiriéndose a la idea o concepto inmaterial evocada por la mente. “Entonces el significado pudiese entenderse como algo que se configura a través de un conjunto de implicaciones prácticas que el objeto posee para algún sujeto" (Zecchetto, 2002, p. 4). De ahí que otros estudiosos del lenguaje y la cognición muestren interés por el papel que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento (Godino, 2002).

Desde otro enfoque y a diferencia de Peirce (1974) y Saussure (1916), Vigotsky (1978), no apela a la idea representativa del signo, pues señala que este, es una "herramientas de reflexión que permiten a las personas planificar acciones" (Zecchetto, 2002, p. 50). El signo para él "desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, […] la reconstrucción interna de la acción" (Vigotsky, 1978, p. 94). Una de las tesis centrales de su enfoque, consiste en sostener que la acción cognitiva humana es siempre una acción mediada por alguna forma de herramienta. La herramienta puede ser simbólica (el lenguaje natural por ejemplo) o material (un telescopio, por ejemplo), así que la ciencia y la tecnología podrían proporcionan la estructura perfecta para alcanzar el conocimiento.

2.3.1.2 Los objetos matemáticos y sus representaciones

En el apartado anterior se establece que es posible acceder directamente a los objetos mediante la percepción o el uso de algún instrumento. Sin embargo esto no ocurre en todos los casos, algunos signos aluden en específico al mundo irreal, haciendo referencia a ideas o conceptos y no a objetos palpables (Zecchetto, 2002). La actividad matemática está contenida de este tipo de objetos no tangibles, los cuales están configurados por 2 aspectos: representación y significación (Puig, 1994). "La representación permite la expresión y uso del objeto, el significado atiende a la interpretación del mismo, estos aspectos se desarrollan desde la funcionalidad que representa dicho objeto" (Pecharromán, 2014, p. 112).

Con respecto a la noción de objeto matemático, Ernest (1991) expresa que dicho objeto, puede ser un concepto, una proposición o una teoría. Para Chevallard (1991, p. 8), es "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos". Asimismo, Godino et al. (2007) expresan que el objeto en cuestión es la presentación de un ente abstracto, donde dicha representación se puede dar en forma textual, oral, gráfica o icónica. Por su parte, Blumer, (1969, p. 8) lo define como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas". A su vez, Godino (2002, p. 6) clasifica a los objetos matemáticos de la siguiente manera:

> (1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) […]. (2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios); son las tareas que inducen la actividad matemática. (3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos). (4) Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...). (5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo) (Godino, 2002, p. 6).

En este mismo orden de reflexión, para lograr la comprensión de un objeto matemático es necesario captar su significado en todo lo que en él es cognocible, llegar a conocer su naturaleza o modo de ser. La comprensión resulta así un modo destacado del conocimiento de los objetos matemáticos, de ahí el interés de la educación matemática por las nociones de representación y comprensión. Por otro lado, la epistemología ha encontrado en la noción de representación y nociones conexas, claves para entender e interpretar el modo en que los seres humanos conocen y comprenden (Rico, 2000). "La tradición racionalista ha postulado una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto, a la que llama representación, ya sea intelectual o imaginativa" (Rico, 2000, p. 1).

La idea de representación ha sido estudiada y sometida a críticas de manera sistemática, pues todas las disciplinas cuya materia de estudio es el conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión (Rico, 2000). La naturaleza abstracta del conocimiento matemático radica en los objetos no tangibles, por lo que resulta no solo necesario, sino indispensable utilizar representaciones (Rojas, 2015). Las representaciones son cualquier tipo de noción, signos "o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior. Podemos representar en nuestra mente algo que percibimos con nuestros sentidos, algo que vemos, olemos o sentimos, así como también algo que nos imaginamos" (Tamayo, 2006, p. 3).

En los últimos años el campo de estudio de las representaciones y sus relaciones con el funcionamiento cognitivo han experimentado un crecimiento notable (Rico, 2000). En el ámbito de la educación matemática destacan los trabajos de Duval (1988, 1993, 1996, 1998, 1999, 2004, 2006), en los cuales recupera aspectos teóricos importantes de la semiótica desarrollada por Saussure, Peirce y Vygotsky y los lleva al plano de la representación y la comprensión de los objetos matemáticos. Los trabajos de dicho investigador han sido objeto de reconocimiento ya que el análisis de los mismos obliga a reflexionar sobre el papel de la representación en los procesos cognitivos que tiene lugar dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Desde la perspectiva de Duval (1999, p. 20) la representación del objeto matemático es:

> […] una notación simbólica o gráfica, o bien una manifestación verbal, mediante la que se expresan los conceptos y procedimientos de esta disciplina, así como sus características y propiedades más relevantes. Un registro de representación está construido a partir de signos, es decir está conformado por trazos, símbolos, e íconos. Los signos permiten su expresión, contribuyen al desarrollo de su significado y permiten la interpretación de sus propiedades y relaciones internas. Además, ciertas componentes del mismo permiten discriminar y caracterizar al objeto, así el tratamiento de las representaciones (transformación y conversión) puede caracterizar o contribuir a la interpretación del objeto.

2.3.2 Tecnología y representaciones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

El conocimiento es pura posibilidad, para que se integre a la conciencia de los estudiantes, debe ponerse en movimiento por medio de la actividad. En la ejecución del movimiento es que se actualiza y revela el conocimiento, convertirse en objeto de conciencia. De tal modo, que el problema es el diseño de actividades para que el conocimiento se transforme en objeto de conciencia y pensamiento, dicho sea de paso, esa es la función principal de toda actividad de enseñanza-aprendizaje (Duval, 2006).

Para la educación matemática no es solo elegir el mejor sistema de representación de los objetos matemáticos para lograr que los estudiantes sean capaces comprender conceptos matemáticos (Duval, 2006), pues […] la comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto (Duval, 2006, p. 158). Actualmente profesores e investigadores están de acuerdo en la importancia de que los alumnos utilicen tanto expresiones algebraicas como figuras, representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos. Pero el punto en cuestión es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades para conseguir dicho propósito (Duval, 2006).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemática por décadas ha tendido a centrarse en una práctica algorítmica (Artigue, 1995), para muchos estudiantes, la forma algebraica de pensar es pura posibilidad sin que llegue hacerse objeto de conciencia. Investigaciones como las de Duval

(1998, 2006), Hitt (1996, 2001), Janvier (1987) y Kaput (1994, 1998) estudian los registros de representación semiótica en el ámbito de las matemáticas, planteado la posibilidad de incorporan herramientas didácticas para la articulación de dichos registros, además muestran un panorama sobre las potencialidades de las representaciones semióticas en medios interactivos dinámicos así como algunas dificultades que presentan estudiantes al hacer uso de medios estáticos.

En el mismo orden de ideas, como menciona Lobo (1998), la manipulación y cambio de parámetros de una figura por medio del arrastre de cualquiera de sus puntos fomenta el surgimiento de conjeturas e ideas lógico-geométricas que hacen a la construcción de la misma más explícita a través de los patrones de movimientos. Dicho autor considera que este hecho podría ser el que ha impulsado el diseño de softwares, calculadoras y graficadoras matemáticas durante las últimas décadas, aumentado así la posibilidad de que un mayor número de estudiantes interactúen con los objetos matemáticos, se actualicen y se muevan en el mundo del conocimiento.

Este salto del medio estático de la actividad matemática al medio interactivo, según Kaput (1998) han dado lugar a cambios en la notación de las matemáticas en por lo menos 3 formas básicas. La primera de ellas un cuanto habilitar cadenas de caracteres para computadora que permitan incorporar procedimientos o algoritmos que se pueden ejecutar de forma autónoma para hacer algo, en segundo lugar, en la incorporación de una herramienta que puede soportar enlaces en vivo entre distintos sistemas de registro de representación y en tercer lugar, en cuanto al apoyo de la creación de instancias en nuevos registros de representación que pueden vincularse unos con otros, ofreciendo flexibilidad de manipulación directa. Todo esto implica una nueva perspectiva en el estudio de las representaciones, donde la tecnología produce nuevos medios que alteran los fundamentos semióticos de las matemáticas (Kaput, 1998).

2.3.2.1 La representación visual y la manipulación de los objetos matemáticos

La visión es fundamental para nuestro ser biológico, es sin duda el sentido que más predomina en cuanto a la percepción del mundo que nos rodea (Arcavi, 2003). Este hecho no es de sorprender pues la mayor parte del cerebro "está involucrada en la visión y en el control visual del movimiento, así como en la elaboración de palabras, la forma y el color de los objetos" (Arcavi, 2003, p. 215). El nervio óptico contiene mayor número de fibras, en comparación en el nervio auditivo. En cuanto al aspecto sociocultural, vivimos en un contexto donde la información se transmite principalmente en envolturas visuales y tecnológicas, no olvidemos que las imágenes se han utilizado para la comunicación y transmisión de información desde las pinturas rupestres (Arcavi, 2003).

La relación entre la visión y el mundo se presenta como un fenómeno directo, cotidiano y normal (Zecchetto, 2002), otra es la situación cuando se nos presentan imágenes hechas con medios técnicos como la pintura, la fotografía, el cine, la televisión o la computadora. En tales casos la realidad es representada de manera mediada, o sea, en forma indirecta y sígnica, "y sin embargo, a todas esas representaciones les asignamos cierto grado de valor real, porque aluden a referentes conocidos y concretos, hasta tal punto que despiertan significados y connotaciones múltiples, individuales y colectivas" (Zecchetto, 2002, p. 164). Lo anterior pone en juego el uso de signos, entre los cuales, existen los de tipo icónico que se utilizan para explicar y enfatizar las condiciones de percepción de los objetos y particularmente de las imágenes (Zecchetto, 2002).

Nuestro conocimiento perceptivo se produce mediante la inferencia a partir de algo que nos estimula, lo que percibimos en primer lugar no son signos, sino estímulos. De tal forma, que en todo este proceso de semiosis, primero está la percepción y después vienen los signos, en consecuencia, los signos icónicos dependen del despliegue de la actividad cognoscitiva que es la percepción primaria, desde aquí se construyen otras formas de conocimiento, como es la de los signos icónicos. Un modelo general del signo icónico debe tomar en cuenta 3 elementos definidos según una triple relación entre ellos: el significante icónico, el tipo y el referente (Zecchetto, 2002).

Las representaciones que suministran los medios de visualización tecnológica posen ciertas cualidades que las hacen especialmente productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Son representaciones ejecutables, es decir, portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario, por ejemplo, cuando el dispositivo electrónico traza la gráfica de una función. Es crucial entender que los objetos que aparecen en la pantalla y son manipulables no son objetos concretos sino son objetos virtuales que están en la interface que separa el mundo conceptual de las matemáticas del mundo de los objetos concretos. Son pues instrumentos de conocimiento y no conocimiento en sí mismos (Zecchetto, 2002).

En el medio de expresión que suministran los dispositivos electrónicos pueden visualizarse propiedades y relaciones matemáticas de los objetos, distintas a las que se observan mediante el uso de papel y lápiz. Por ejemplo, representar funciones en el dispositivo (Lupiáñez & Moreno,

2001) que “resultan prácticamente imposibles de dibujar en el papel, permitiendo así conjeturar propiedades y comprobar visualmente hechos que escapaban al análisis algebraico” (Lupiáñez & Moreno, 2001, p. 295). Además, es importante conjugar las posibilidades gráficas de estas tecnologías con las analíticas, pues de estas relaciones es de donde surge un conocimiento útil y consistente. El poder de la tecnología es entonces de carácter epistémico (Lupiáñez & Moreno, 2001).

2.4 GeoGebra

En las últimas décadas el uso de software especializado se ha extendido al ámbito de la educación. En el caso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los ambientes tecnológicos se han empleado con el propósito de favorecen la comprensión, la modelización, la visualización y la simulación de objetos matemáticos, proporcionando una alternativa de enseñanza-aprendizaje diferente a la proporcionada por el pizarrón tradicional, o con el uso de lápiz y papel. El software matemático es una herramienta para visualizar de forma instantánea y simultanea tantas representaciones diferentes como sean necesarias y sus posibles articulaciones (Duval, 2006).

Además da una percepción dinámica de la trasformación de las mismas (Duval, 2006), esta forma no estática de representación permite analizar las características de objetos matemáticos a través de la materialización simbólica, usando las 3 dimensiones en el espacio (Fernández & Berch, 2016). El software matemático surge como una herramienta para la comprensión de conceptos abstractos que ahora toman vida en la pantalla del computador, permitiendo al usuario experimentar sobre casos concretos donde puede manipular los parámetros de los objetos de una forma más directa (Duval, 2006).

2.4.1 ¿Qué es Geogebra?

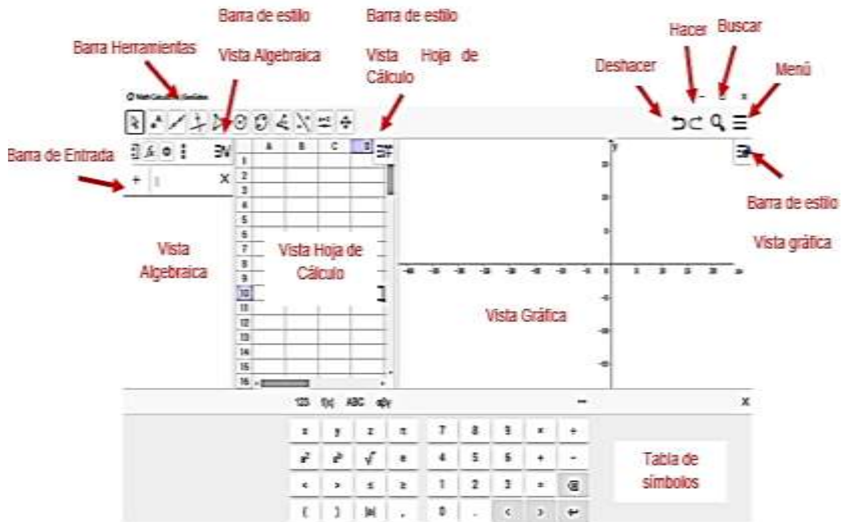
GeoGebra es un software matemático de licencia libre por lo tanto de uso gratuito, que puede ser descargado en cualquier dispositivo electrónico que cuente con alguno de los siguientes sistemas operativos: iOS, Android, Windows, Mac y Linux, aunque también se puede trabajar con él vía on line. Permite trabajar con álgebra, geometría, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo. Su génesis tuvo lugar en la tesis de máster de Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo en Austria, en el año 2002. Este software surgió con la idea de combinar la geometría dinámica con sistemas de álgebra computacional (Fernández & Berch, 2016), a través de "una interface intuitiva que facilitara la enseñanza y el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos mediante la representación gráfica en 2 y 3 dimensiones, usando la simulación dinámica con desplazamientos de puntos, rectas y objetos en los planos" (Fernández & Berch, 2016, p. 4).

Geogebra es de gran ayuda para enseñar y aprender matemáticas en todos los niveles educativos. Facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros. Cada representación de un mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas. GeoGebra es un software libre puede descargarse en distintos dispositivos electrónicos desde su página oficial www.geogebra.org (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009). Esta desarrollado en lenguaje Java, compatible con plataformas educativas, donde los estudiantes desde el nivel educativo primario hasta el nivel superior pueden profundizan sus conocimientos, además de explorar conocimientos nuevos (Fernández & Berch, 2016).

2.4.2 Vistas

La interfaz de GeoGebra permite visualizar los objetos matemáticos desde la perspectiva de distintas representaciones semióticas. Dichas perspectivas son llamadas vistas, entre las cuales encontramos las de carácter analítico como la vista algebraica, la vista cálculo simbólico y vista cálculo de probabilidad; las de carácter tabular como la vista hoja de cálculo y las de carácter gráfico, como la vista gráfica básica, la vista grafica en 2D y 3D. Todas ellas pueden ser vinculadas, mostrando el cambio de parámetros de manera automática, simultánea y dinámica, es decir que los cambios realizados en alguna de ellas modifican automáticamente a las otras. En la figura 7 se muestran de forma simultanea la vista algebraica, la vista hoja de cálculo y la vista gráfica así como la barra de herramientas principal de cada una de ellas (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 7. Apariencia de la pantalla de Geogebra, cuando interactúa simultáneamente la vista algebraica, hoja de cálculo y gráfica

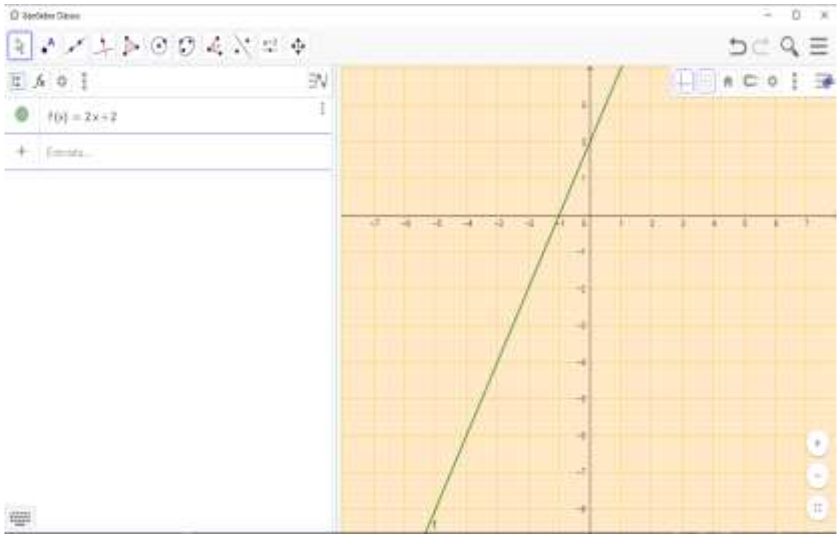


Fuente: Elaboración propia

2.4.2.1 Vista algebraica

Cuando se ingresa al software Geogebra lo primero que se observa en la pantalla es la barra de entrada donde se pueden introducir directamente expresiones algebraicas o bien el sistema ofrece un menú de comandos para crear diversos objetos matemáticos. Basta con comenzar a ingresar el nombre de un comando en la barra de entrada, para que se despliegue una lista de comandos sugeridos. Al pulsar la tecla enter, la información ingresada aparece en la vista algebraica y, automáticamente, su representación gráfica en la vista gráfica. Por ejemplo, como se muestra en la figura 8 al ingresar $f(x) = 2x + 2$, aparece la función en la vista algebraica como una expresión y se vincula automática y simultáneamente con su representación gráfica, plasmada en la vista del mismo nombre (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 8. Visualización simultanea de la representación de la función f(x)= 2x+2 en su registro semiótico algebraico y gráfico

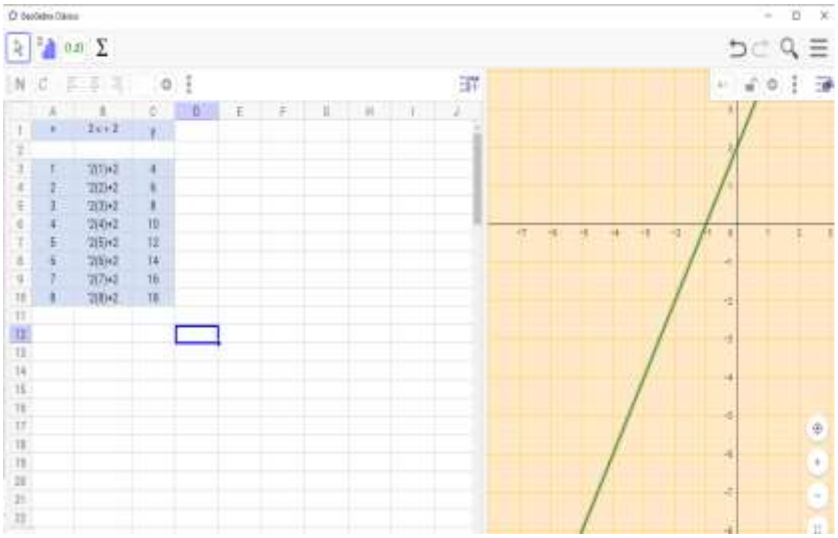


Fuente: Vista algebraica y vista gráfica del software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

2.4.2.2 Vista hoja de cálculo

Se refiere a la representación tabular de un objeto matemático. Cada celda de la vista de hoja de cálculo de GeoGebra tiene una denominación específica que permite dirigirse a una celda en concreto. Por ejemplo, la celda en la fila 1 de la columna A se llama A1. El nombre de una celda puede usarse en expresiones y comandos para referir a su contenido. Estas celdas pueden vincularse entre sí a través de fórmulas. En dichas celdas, pueden ingresarse tanto números como cualquier otro tipo de datos, como pueden ser coordenadas de puntos, comandos, etc. Como se muestra en la figura 9 en algunas ocasiones dependiendo del objeto matemático con que se esté trabajando también aparece de forma simultánea la representación del mismo, en la vista gráfica (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 9. Visualización simultanea de la representación de la función f(x)= 2x+2 en su registro semiótico tabular y gráfico

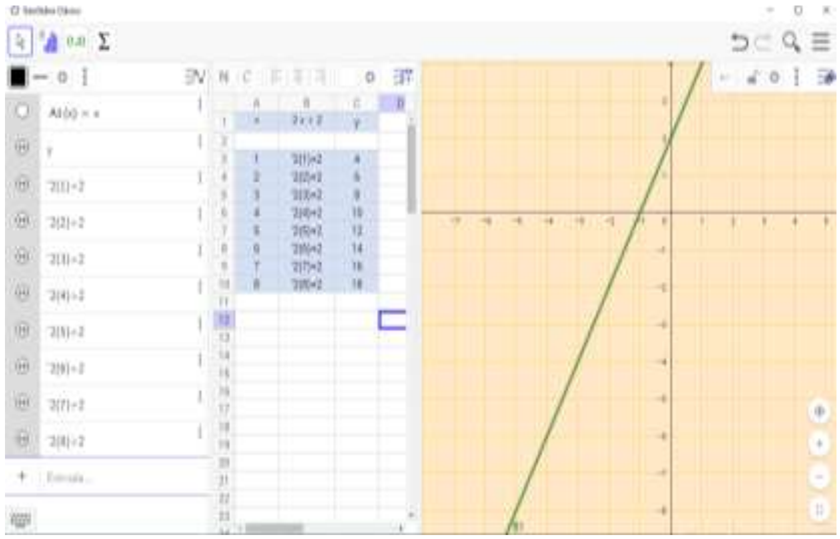


Fuente: Vista tabular y vista gráfica del software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

2.4.2.3 Vista gráfica

Desde esta vista pueden realizarse construcciones geométricas de los modelos matemáticos registrados en la vista algebraica o en la vista hoja de cálculo. La vista gráfica expone gráficamente la representación de objetos matemáticos como puntos, vectores, segmentos, polígonos, funciones, curvas, rectas y secciones cónicas, etc. Aunque todo objeto representado en la vista gráfica también tiene su correspondiente representación en la vista algebraica y/o tabular. Con el uso del mouse como elemento de arrastre y empleando las herramientas de construcción disponibles en la barra de herramientas, pueden realizarse construcciones geométricas en esta vista sin pasar previamente por datos introducidos en las otras 2 vistas (algebraica y tabular). Tal como se muestra en la figura 10, al existir un cambio en la vista gráfica, simultáneamente las representaciones algebraicas y/o tabulares se actualizan (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 10. Visualización simultanea de la representación de la función f(x)= 2x+2 en su registro semiótico algebraico, tabular y gráfico

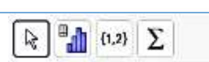


Fuente: Vista algebraica, vista tabular y vista gráfica del software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

2.4.3 Herramientas generales

Las herramientas generales permiten crear, modificar o arrastrar nuevos objetos matemáticos o parámetros de los mismos con tan solo un clic. Están integradas por barras de herramientas y cajas de herramientas, estas últimas funcionan como submenús de las anteriores. Pueden ser personalizadas a través del menú herramientas de tal forma que solo aparezcan las herramientas que deseemos. También es posible reagrupar y modificar su orden. En caso de ser necesaria la restauración de la barra completa, en el orden que la interfaz da por default, basta pulsar el botón restablecimiento de la barra de herramientas original. Como se muestra en la figura 11, la barra de herramientas es un componente del software Geogebra diseñado a modo de fila, contiene iconos o botones, que al ser presionados, activan ciertas funciones de una aplicación. Cada vista excepto la algebraica tiene su propia Barra (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 11. Barras de herramientas de la vista hoja de cálculo y de la vista gráfica



Barra de herramientas vista hoja de cálculo

Barra de herramientas de la vista Gráfica

Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

Por otro lado, las cajas de herramientas se refieren a los submenús de cada ícono de la barra de herramientas de la vista hoja de cálculo y de la barra de herramientas de la vista Gráfica. Cada caja de herramientas contiene una selección de útiles similares, que se despliegan con un clic sobre el mismo. Por ejemplo, en la figura 12 se muestra el botón elige y mueve  de la barra de herramientas de la vista gráfica, al dar clic sobre él se despliega su caja de herramientas. La cual, en este caso está integrada por las opciones de elige y mueve, figura a mano alzada y lápiz, cuyo funcionamiento de cada una de ellas será detallado más adelante (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 12. Caja de herramientas del botón elige y mueve de la vista gráfica

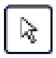
Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

2.4.3.1 Barras de herramientas

Durante el desarrollo del presente trabajo se realizó un índice de las herramientas con las que cuenta la interfaz de Geogebra. Como se muestra en la tabla 3, dicho índice inicialmente se divide en las dos barras de herramientas ya antes mencionadas, barra de herramientas de la vista hoja de cálculo y barra de herramientas de la vista gráfica, recordemos que la vista algebraica no cuenta con barra de herramientas. Posteriormente se enlistan los elementos que contiene cada caja de herramientas presentes en las barras. Señalando el icono que representa a la herramienta, su nombre y una describiendo brevemente de la indicación recibe la interfaz cuando se hace clic en su respectivo icono (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Tabla 3. Índice de herramientas de la interfaz de Geogebra

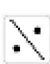
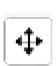
Barra de herramientas vista hoja de cálculo 

Ícono	Nombre	Indicación
	Elige y mueve	Arrastra o selecciona objetos
	Una variable	Analiza la distribución, en una variable, de los datos correspondientes a las celdas seleccionadas
	Crea lista	Crea una lista con los datos de las celdas seleccionada
	Suma	Suma los datos seleccionados

Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

Tabla 4. Índice de herramientas de la interfaz de Geogebra

Barra de herramientas de la vista Gráfica 

Ícono	Nombre	Indicación
	Elige y mueve	Arrastra o selecciona objetos
	Punto	Al hacer clic sobre la vista gráfica se crea un nuevo punto
	Recta	Al seleccionar dos puntos A y B se crea la recta que pasa por A y B
	Perpendicular	Al seleccionar una recta r y un punto A, en cualquier orden, crea la recta que pasa por A y es perpendicular
	Polígono	Tres puntos que constituirán los vértices del polígono y al volver a hacer clic nuevamente sobre el primero de ellos, se cierra. El área del polígono aparecerá en la Vista Algebraica
	Circunferencia	Al seleccionar un punto O y un punto A queda definida una circunferencia con centro en O que pasa por A. El radio del círculo es la distancia OA
	Elipse	La elipse se trazará al seleccionar sus dos focos en primer lugar y luego, uno de sus puntos
	Ángulo	Crea ángulos realizando selecciones de diversas maneras y diferentes secuencias
	Simetría axial	Es la simetría alrededor de un eje. Basta un clic sobre la recta (semirrecta o segmento) para que quede establecido el eje de simetría a través del que se operará la reflexión
	Deslizador	Es una representación gráfica de un número libre o ángulo libre
	Desplaza	Se puede arrastrar y soltar la Vista Gráfica para cambiar la zona visible de esa área

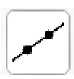
Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

Tabla 5. Índice de herramientas de la interfaz de Geogebra

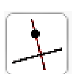
Caja de herramientas de la vista gráfica

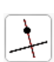
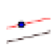
Ícono elige y mueve 

Ícono	Nombre	Indicación
	Elige y mueve	Arrastra o selecciona objetos
	Figura a mano alzada	Esboza una función o un objeto geométrico
	Lápiz	Escribe o dibuja

Ícono recta 

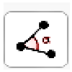
Ícono	Nombre	Indicación
	Recta	Linea que pasa por dos puntos o dos ubicaciones seleccionados
	Segmento	Tramo de linea que pasa por dos puntos o dos ubicaciones seleccionados

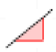
Perpendicular 

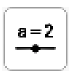
Ícono	Nombre	Indicación
	Perpendicular	Selección de una recta o semirecta y un punto formando un angulo recto
	Paralela	Selección de una recta o semirecta y un punto. En este último se forma una recta que no toca en ningún punto a la otra recta

Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018).

Tabla 6. Índice de herramientas de la interfaz de Geogebra

Ángulo 

Ícono	Nombre	Indicación
	Ángulo	Crea ángulos seleccionando de tres puntos o dos rectas y la expone dinámicamente en la vista gráfica
	Pendiente	Mide la pendiente de una recta y la expone dinámicamente, ilustrada en un triángulo réctangulo en la vista gráfica

Deslizador 

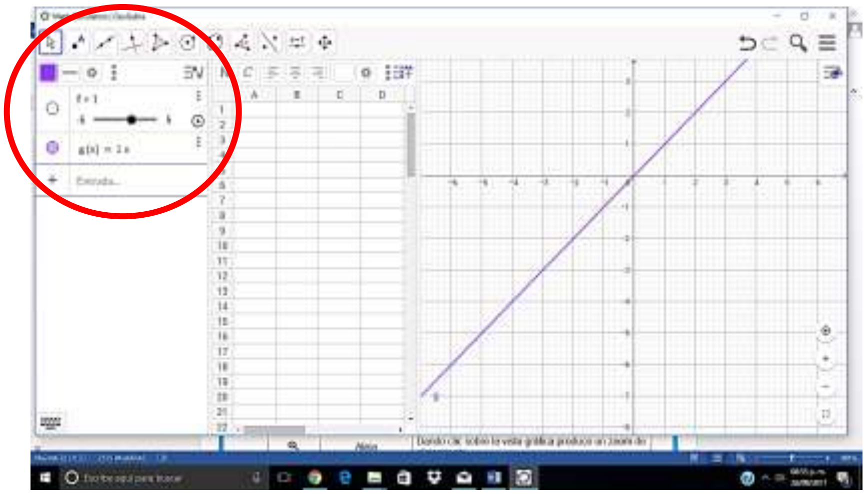
Ícono	**Nombre**	**Indicación**
	Deslizador	Representación gráfica de un número libre o ángulo libre
	Texto	Crea textos en la vista gráfica
	Imagen	Selecciona una imagen de archivo o cámara

Fuente: Elaboración propia con información de Hohenwarter & Hohenwarter (2009)

2.4.4 Insertar y configuración de un deslizador

El deslizador es una de las herramientas más importantes de GeoGebra, permite visualizar dinámicamente el incremento o decremento de un número, parámetro o ángulo. A través del arrastre del mouse o con las teclas de flecha, el valor de dicho elemento puede ser manipulando desde una barra insertada en la vista algebraica, en la vista gráfica o en ambas. La interfaz de Geogebra por default asigna un intervalo a dicho valor, sin embargo, este intervalo puede ser modificado según las necesidades y preferencias del usuario. En el caso de los ángulos es posible especificar si se requieren representados en forma cóncava o no. En la figura 13 se puede observar como al dar clic en crear deslizador, el valor introducido queda registrado en la vista algebraica y se creará una barra debajo de dicho valor. Simultáneamente se genera su representación gráfica (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 13. Inserción y configuración de un deslizador

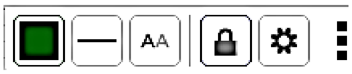


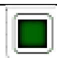
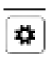
Fuente: Software Geogebra versión 6.0.518.02. Hohenwarter (2018)

2.4.5 Barras de estilo para la recta y el punto

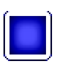
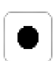
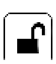
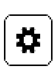
Las barras de estilo se encuentran presentes en las 3 vistas (algebraica, tabular y gráfica), permiten hacer cambios fáciles y rápidos de algunos elementos de las vistas y de objetos matemáticos. De acuerdo a los objetivos que persigue el presente trabajo se concreta en el análisis de los elementos contenidos en las cajas de herramientas de la barra del mismo nombre en la vista gráfica, específicamente aquellas necesarias para modificar ciertos atributos visuales del punto y de la recta. En la tabla 4, se muestra a manera de lista las herramientas de estilo de los objetos mencionados anteriormente, iniciando por el icono que las representa, su nombre y una breve descripción del comando (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Tabla 7. Herramientas de las barras de estilo para la recta y el punto

Recta 

Ícono	Nombre	Indicación
	Color	Permite elegir el color de la recta
	Trazo	Permite elegir el tipo de línea
	Etiqueta	Rotula el nombre y valor de la recta en la vista gráfica
	Objeto fijo	Permite fijar un objeto para que no pueda moverse accidentalmente con el ratón
	Propiedades	Modifica otras propiedades de la vista o del objeto que se encuentre seleccionado.
	Añadir vistas	Agrega otra vista

Punto 

Ícono	Nombre	Indicación
	Color	Permite elegir el color de un punto
	Puntos	Cambia la figura del punto
	Etiquetas	Rotula el nombre y valor de un punto en la vista gráfica
	Objeto fijo	Permite fijar un objeto para que no pueda moverse accidentalmente con el ratón
	Propiedades	Modifica otras propiedades de la vista o del objeto que se encuentre seleccionado.
	Añadir vistas	Agrega otra vista

Fuente: Elaboración propia con información de Hohenwarter & Hohenwarter (2009)

CAPÍTULO 3

EJES ARTICULADORES DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Presentación

El presente capitulo muestra el entramado metodológico de la presente investigación. Así mismo, dado que el interés principal de la misma es conocer y comprender la conducta humana, es que se adoptó un enfoque cualitativo-descriptivo. En alineación a dicho interés se seleccionó como método de investigación al estudio de casos, ya que este implica el uso de una estructura de análisis pormenorizada, inductiva y descriptiva. Con el propósito de colocar un foco de atención en los procesos del sujeto al enfrentarse a tareas matemáticas, se eligió como técnica a la entrevista estructurada basada en tareas. Derivado de lo anterior, se describe el proceso metodológico ejecutado en el desarrollo del presente trabajo y se dan a conocer las características generales de la población objeto de estudio, así como los instrumentos que sirvieron para la recolección de la información.

3.2 Enfoque

La presente investigación se desarrollara dentro de un contexto específico, natural de la población objeto de estudio, en donde los momentos referenciales y los constructos dan significado a la realidad (Perdomo & Camacho, 2010). Por lo que dicho trabajo se articula desde 4 dimensiones. Inicialmente la dimensión histórica, situando al hecho educativo estudiado en una temporalidad histórica, influida por sucesos y procesos sociales. Por otro lado una dimensión cultural, referente al entorno que lo enmarca. Además de una dimensión sociopolítica, señalando un contexto político concreto. No sin olvidar una dimensión contextual, considerando de vital importancia conocer el espacio social y físico en el que se está produciendo el fenómeno estudiado (Mesias, 1986).

Desde esta perspectiva, se adopta un enfoque cualitativo, pues el interés del presente trabajo es comprender la conducta humana, desde el marco de referencia de quien actúa. Aproximándose a los datos desde una perspectiva que podría ser llamada desde dentro, orientada a los descubrimientos (Cook & Reichardt,1986). Planteando la necesidad de realizar la labor investigativa desde un grado de participación máximo o directo, para lo cual los métodos cualitativos ofrecen las mejores condiciones para insertarse en la población implicada. El análisis cualitativo supone una mayor comprensión del caso, una mejor apreciación de la singularidad y la complejidad del contexto (Stake, 1998).

De acuerdo a este propósito, se considera al presente trabajo de investigación, como descriptivo, pues describe lo que sucede en un caso en particular (Yin, 1989). Los datos obtenidos, emanaron de las propias palabras (habladas o escritas) de las personas y de la conducta observable de las mismas (Taylor & Bogdan, 1987). No limitándose a la simple recolección de datos, sino que va más allá, hacia el conocimiento y análisis de situaciones y actitudes predominantes dentro del hecho educativo estudiado. Teniendo como guía la teoría planteada en el capítulo II. A través de la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas, se extrajeron generalizaciones significativas que se espera contribuyan al conocimiento (Stake, 1998).

3.3 Método

El estudio particular de casos, es de gran interés para cualquier investigación de corte social, especialmente para aquellos trabajos que se ocupan de entender fenómenos educativos. Los casos, generalmente los representan personas o programas, que se asemejan a otros de su mismo tipo, pero que de la misma forma cuentan con características y atributos que los hacen únicos. En las investigaciones del ámbito educativo, el caso no define a un ente en específico, pues este puede estar representado por un estudiante, un grupo de alumnos o todas las escuelas de una región, etc. El caso atiende a 3 características: es específico, complejo y está en constante funcionamiento (Stake, 1998).

El principal objetivo del estudio de casos es comprender algún hecho o fenómeno, lo que implica un proceso de indagación caracterizado por un análisis exhaustivo, comprensivo, estructurado y profundo del caso objeto de interés. Además que tiene como características principales ser inductivo y descriptivo, pues su forma de razonamiento trata de establecer generalidades a partir del análisis y descripción de casos particulares de interés. Esto no implica que dichos casos tiendan a ser de tipo representativo, más bien son seleccionados porque abonan algo para la comprensión del fenómeno objeto de estudio (Rodríguez, Gil & García, 1996).

El estudio de casos tiene la intención de describir, interpretar o evaluar (Stake, 1998) . Stake (1998) señala que por medio del estudio de casos es posible que el investigador logre mayor entendimiento de un fenómeno particular o mayor claridad sobre un tema. Por lo que para fines de esta investigación se consideró como estrategia de diseño de la investigación al estudio de casos. El cual se ha seleccionado con el fin de construir conocimiento a través de la indagación, el descubrimiento y la observación. Así mismo se considera que la información extraída mediante esta estrategia de investigación proporciona datos más concretos y contextualizados, lo que podría facilitar la generalización.

3.4 Técnica

Como técnica de investigación se utiliza la entrevista estructurada basada en tareas. Dicha técnica pone un foco de interés en los procesos del sujeto al enfrentarse a tareas matemáticas, no centrándose solo en las respuestas correctas o incorrectas que el mismo pudiese producir. Lo que permite al investigador, la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad, como son cogniciones complejas asociadas con el aprendizaje de las matemáticas, mecanismos de exploración matemática y relaciones entre efecto y cognición, etc. (Goldin, 2000).

Para los fines del presente trabajo la entrevista estructurada basada en tareas tienen un doble propósito, inicialmente observar el comportamiento matemático de los alumnos al interactuar con las tareas matemáticas planteadas y por otro, hacer inferencias a partir de las observaciones sobre los procesos cognitivos que los estudiantes muestran al realizar dichas tareas (Goldin, 1992). La entrevista estructurada basada en tareas para el estudio del comportamiento y la cognición matemática implica mínimamente un sujeto (que es quien ejecuta las tareas, en este caso el estudiante) y un entrevistador (el investigador), interactuando en relación con una o más tareas planificadas previamente por este último (Goldin, 2000).

La entrevista se estructura previamente en cuanto a redacción, contenido y secuencia, haciendo uso en la medida que sea necesario de preguntas heurísticas, preguntas retrospectivas u otras intervenciones por parte del entrevistador. Sin embargo, se prevé que en un determinado momento se reconozca una situación de interés para el propósito de la investigación. Teniendo la posibilidad de modificar la estructura de la misma cuando el entrevistador lo considere apropiado. Normalmente las interacciones no son meramente con los entrevistadores, sino también con los entornos de tareas. De tal modo que durante la entrevista se realizan registros de observación y análisis, a través de grabaciones de audio y video, así como con notas del entrevistador (Goldin, 2000).

3.5 Proceso metodológico

La labor investigativa realizada durante el desarrollo del presente trabajo inició con la identificación de una unidad social o comunidad que presentaba un fenómeno educativo de relevancia por estudiar. En este caso, dicho fenómeno refiere a analizar cómo el alumno de Bachillerato identifica los elementos que integran la función lineal, a través del uso de GeoGebra. Para realizar dicho análisis, se diseñaron instrumentos de recolección de datos que proporcionaran información acerca de las situaciones existentes en el momento en que los alumnos de Bachillerato realizaron tareas relativas a la identificación de los elementos de la función lineal en el ambiente del software Geogebra (anexo 1). Así como también, información proveniente de situaciones presentes en la ejecución de tareas realizadas con el uso de lápiz y papel, que perseguían el mismo fin (anexo 2).

Como primer instrumento se desarrolló una secuencia didáctica en línea donde los estudiantes interactuaban con la función lineal y sus elementos desde la interfaz de Geogebra. El diseño de dicha secuencia, se realizó con el propósito de que los alumnos a través de la percepción, la visualización e interacción que proporciona el ambiente de dicho software matemático, lograran identificar los elementos de la función lineal y así, construir el concepto función lineal, como un objeto matemático que evoca una totalidad posible de ser representada en distintos registros semióticos.

Previamente a la aplicación del primer instrumento, en una sesión en el aula de clase se planteó de manera verbal a los alumnos la tarea que ejecutarían, así como, el proceso de descarga y funcionamiento básico del software Geogebra en distintos dispositivos. En primera instancia, se consideró los estudiantes desarrollarían la secuencia didáctica en el centro de cómputo de su escuela, sin embargo debido a la falta de equipamiento del mismo, de manera consensuada docente-alumnos determinaron trabajar desde casa. Para mantener la comunicación fuera del aula de clase se formó un grupo de Facebook, el cual fungió como un foro donde los estudiantes podían socializar sus dudas, realizar comentarios, o bien solicitar la asistencia en línea de la profesora.

Es importante mencionar que las tareas comprendidas en la secuencia didáctica del primer instrumento fueron diseñada a manera de que a través de la experiencia se propiciar la reflexión en el alumno, por lo que en su diseño se consideró, estas guiaran al estudiante en la ejecución de las mismas mediante procesos paso a paso, así que tanto el planteamiento de las preguntas como las respuestas de los alumnos no estaban en función de obtener resultados correctos e incorrectos, si no en facilitar la percepción de los elementos de la función lineal a través de la mediación representacional del software Geogebra. Por otro lado, teniendo en consideración que Geogebra, como cualquier medio tecnológico no es en sí un fin, sino una herramienta dentro de cualquier proceso educativo, en un segundo momento, de manera presencial en el aula de clase se aplicó otro instrumento, esta vez en lápiz y papel.

Una vez, obtenidos los resultados de la aplicación de ambos instrumentos, se seleccionaron algunos casos particulares que se consideraron aportaban información trascendente a la comprensión del fenómeno de estudio que ocupa al presente trabajo. De ahí, se entrevistaron a los estudiantes con entrevistas estructuradas basadas en las tareas matemáticas realizadas (anexo 4) en los instrumentos de recolección de datos, pidiéndoles evocaran su experiencia y expectativas en cuanto a la resolución de las mismas. Esto con el fin de construir inferencias a partir de las observaciones sobre los procesos cognitivos que los estudiantes mostraron al interactuar con las situaciones planteadas. Por último, se analizó y caracterizó la información obtenida, sintetizando en las conclusiones.

3.6 Población

La población objeto de estudio comprende un grupo de 47 estudiantes, 20 mujeres y 17 hombres de entre 14 y 17 años de edad, que cursaban la asignatura de PA, perteneciente al campo disciplinar de matemáticas y razonamiento complejo, impartida en el segundo semestre del primer grado de Bachillerato dentro del currículum de la RIEMS. En el turno vespertino de una EPOEM, perteneciente al subsistema de BG, en la modalidad de BE, ubicada en la Colonia Universidad, en el Municipio de Toluca, en el Estado de México, dentro de una zona urbana.

Según datos de indicadores académicos realizados por el área de orientación escolar: el 70% de los estudiantes de dicho grupo vive en colonias cercanas a la institución en un ambiente urbano (Col. Altamirano, Col. Las Américas, Col. Isidro Fabela, Col. Morelos, Col. Valle verde, etc), 30% en poblaciones más alejadas, tales como San Lorenzo Tepaltitlán, San Mateo Otzacatipan, Sta. María Totoltepec, San Pedro Totoltepec, Col. Las Torres, Col. Seminario, Col. Sánchez, Santiago Miltepec, Zinacantepc, etc.), el 80% se traslada en autobús o taxi colectivo, 15% caminando y solo 5% en auto en compañía de sus padres, el tiempo de traslado en promedio es de 30 min a 1 hora.

Los estudiantes son provenientes de familias en su mayoría, de clase media a clase media baja, las cuales obtienen sus ingresos principalmente del trabajo en el comercio, la industria y el campo, el ingreso familiar promedio es de 5 mil pesos mensuales. Entre sus principales intereses se encuentran la telefonía celular, redes sociales, música y algunos deportes. El 90% de los estudiantes cuentan con una o más computadoras en casa con servicio de internet. El 90% aspira a una educación superior y el 10 % expresa su deseo de incorporarse a la vida laboral al egresar de la preparatoria. Ningún estudiante trabaja. El aprovechamiento académico de este grupo es de 6.9 con un porcentaje de aprobación de 60%.

3.7 Instrumentos

En este apartado se describen los instrumentos de investigación que sirvieron como herramienta para la recolección de información de la muestra seleccionada. El primero de ellos, es una secuencia didáctica diseñada en un formulario de Google, donde a través de la ejecución de tareas por parte del estudiante en el ambiente del software Geogebra, se introduce al mismo hacia el conocimiento de la función lineal y la identificación de los elementos que integran a dicha función. Como segundo instrumento, se aborda un cuestionario desarrollado en lápiz y papel, cuyo propósito era conocer si el alumno después de desarrollar la secuencia didáctica en Geogebra había logrado identificar los elementos de la función lineal más allá del uso de dicho software como herramienta.

3.7.1 Instrumento 1: análisis de los elementos de la función lineal con GeoGebra

Con su aplicación del primer instrumento (Anexo 1) se pretendía que a través de la percepción, la visualización y la manipulación de los elementos de la función lineal dentro de la interfaz del software matemático Geogebra, los estudiantes interactuaran, analizaran y exploraran los elementos de dicha función. De tal forma, que el instrumento se dividió en 4 actividades, cada una de ellas contenía una secuencia de tareas relacionadas con uno de los elementos de la función lineal, en la última, el alumno tenía la oportunidad de observar y trabajar con todos los elementos de dicha función de forma simultánea. Al término de cada secuencia se establecieron una serie de preguntas, que se esperaba sirvieran de guía para que el estudiante analizara el orden conceptual del trabajo realizado.

La actividad 1 del formulario de Google en línea titulada la variable independiente y la variable dependiente, se diseñó con el propósito de que el alumno identificara dichas variables dentro de una problemática común en la vida cotidiana, así como la relación que se establece entre ellas, estando representadas en los 4 registros semióticos de la función (verbal, algebraico, tabular y gráfico), actuando de manera sincrónica. En esta actividad, se propuso una secuencia de 6 tareas, donde se le guiaba al estudiante en la ejecución de algunas tareas relacionadas con la identificación de las variables. Cada tarea estaba acompañada de una pantalla con las diferentes vistas de Geogebra, mostrando el resultado que se obtendría al ejecutar el trabajo señalado.

Para el análisis de la identificación de la variable independiente y de la variable dependiente con la ayuda del software Geogebra se platearon 11 preguntas, 9 de complementación y 2 opción múltiple. Las primeras 4 fueron enfocadas hacía el análisis de la relación de dependencia entre dichas variables, partiendo de la representación tabular de un hecho especifico planteado inicialmente en su representación verbal. Posteriormente, con el diseño y elaboración de tablas por parte del alumno, así como la estructuración de fórmulas para la búsqueda de valores dentro de las mismas, se hizo énfasis en la vinculación de los datos con su representación algebraica y gráfica. Se esperaba que la herramienta de Geogebra, lista de puntos resultará útil para evidenciar la relación de los datos manejados en forma tabular con la representación de los mismos como una línea de puntos dentro de una gráfica.

Las preguntas I1.A1.P5 a la I1.A1.P8, se direccionaron al estudio de la variable independiente y la variable dependiente, partiendo de su representación gráfica, y posteriormente se ofrecieron elementos de discusión para vincular dichas variables con otras formas de representación. Se guío al estudiante en el análisis de la lista de puntos, en términos de los ejes del plano cartesiano, propiciando, que de acuerdo al análisis ejecutado verbalizara que es lo que representaban cada uno de los puntos coordenados de acuerdo a las magnitudes enmarcadas en las variables. En cuanto a la relación entre las mismas, consideradas como un par de conjuntos, uno de entrada y uno de salida, donde ambos comprenden distintos valores, es que en estos 4 cuestionamientos se introdujeron las palabras *en función de* como sinónimo de *depende de*.

En las 2 últimas tareas dentro de la actividad 1, se abordó a la función como una fórmula algebraica, específicamente llamada función, donde las variables representadas por literales eran susceptibles adoptar distintos valores. Gráficamente la función estaba representada como una lista de puntos coordenados en el plano cartesiano formando una línea, lo cual se pretendía fuese evidente al utilizar el mismo plano donde anteriormente se graficaron la lista de puntos proveniente de los datos comprendidos en la tabla diseñada en la vista tabular. La pregunta I1.A1.P9 enfatizaba el vínculo entre las variables introducidas como parte de una función en la vista algebraica y sus otras formas de representación. Para cerrar la actividad 1, en las preguntas I1.A1.P10 y I1.A1.P11 respectivamente, se solicitó al estudiante estableciera con sus propias palabras y con base en la ejecución y análisis de las tareas hasta ese momento realizadas, su noción de variable independiente y variable dependiente.

La actividad 2, titulada la pendiente, se centró en el estudio del elemento de la función lineal que recibe el mismo nombre. Se integró de 6 tareas y 15 preguntas de complementación. Se pretendía que dichas tareas permitieran al estudiante interactuar y analizar las variantes de la pendiente en sus 4 representaciones semióticas, lo que más tarde podría facilitarle la identificación de este elemento en distintas situaciones. No obstante, se enfatizó en el ambiente dinámico de la vista gráfica de Geogebra, dada su potencialidad para la manipulación de parámetros y la visualización de los cambios en la pendiente. En dicha vista se puede apreciar a este elemento de la función lineal representado como un área sombreada con colores llamativos y medida en unidades o bien como un ángulo graduado en grados sexagesimales.

Se consideró que en la vista gráfica se podría rápidamente hacer y observar cambios en cuanto a la relación entre desplazamiento (en el eje de las abscisas) y elevación (en el eje de las ordenadas), originados por el incremento o decremento de los parámetros de las variables. Por otro lado, en la vista algebraica la pendiente podría ser visualizada como un valor numérico fijo dentro de la función, hecho que tal vez limitaría al estudiante en el análisis de cambios de parámetros. Así mismo, se estimó que en la vista tabular la apreciación de la pendiente podría resultar un tanto ambigua para él alumno, pues aunque esta permanece dentro de la fórmula matemática que da origen a los valores de la variable dependiente, su visualización no se da de manera rápida y explícita.

Dentro de la actividad 2, con las preguntas de la I1.A2.P1 a la I1.A2.P4, se procuraba introducir al alumno en el estudio de la pendiente desde el análisis de la relación de las variables y el vínculo de estas con la representación gráfica de la pendiente. Una vez establecido dicho vínculo, este se analizaría desde el ambiente algebraico y tabular. Finalmente, el estudiante verbalizaría que hecho está representado por el área sombreada reflejada en la gráfica. Las preguntas I1.A2.P5 y I1.A2.P6 se diseñaron con el propósito de que el alumno reflexionara sobre la elevación y desplazamiento constante que experimenta la pendiente dentro del modelo matemático función lineal. Específicamente en la pregunta I1.A2.P6, se le solicita verbalice sobre este fenómeno.

En las preguntas de la I1.A2.P7 a la I1.A2.P10 correspondientes a la actividad 2, se guía al estudiante para que este reflexione sobre el concepto de pendiente y el cambio de parámetros que este elemento de la función lineal puede experimentar dependiendo de los datos específicos de una problemática planteada. Para esto se establecieron 3 situaciones donde el alumno a través de la manipulación de datos, puntos coordenados, diseño de funciones, trazo de áreas y ángulos, podía comparar distintas pendientes de rectas. Concretamente, la pregunta I1.A2.P9 sin duda se podría considerar como uno de los cuestionamientos de mayor trascendencia para el presente trabajo de investigación, pues es donde el estudiante después de haber trabajado con Geogebra expresa con sus propias palabras su noción de pendiente.

Con los cuestionamientos de la I1.A2.P11 a la I1.A2.P15, se trató de centrar al estudiante en el examen de la pendiente dependiendo de su polaridad. Para esto, se le plantearon 2 hechos, uno con pendiente positiva y otro con pendiente negativa, los cuales con ayuda de Geogebra el alumno debía comparar, logrando más tarde identificar características de las mismas, en especial aquellas particularidades que las diferenciaban. Así mismo, se retomó el análisis del desplazamiento y elevación que experimenta la pendiente en los cuadrantes del plano cartesiano, ahora atendiendo a su carácter positivo y negativo.

La actividad 3 fue diseña pensando en el estudio de la ordenada al origen, la cual también se hizo perceptible en sus distintas representaciones semióticas. Se establecieron 3 tareas y 10 preguntas de complementación. Con las cuales se pretendía que el estudiante reflexionara acerca de las causas que dan origen a la intersección de una recta con el eje de las ordenadas y el desplazamiento de la misma sobre dicho eje, así como la relación de lo anterior con la pendiente. En el desarrollo de esta actividad se enfatizó nuevamente en la representación gráfica por considerarse propia para un mejor análisis de los parámetros de la ordenada al origen, ya que gracias a los comandos de movimiento que ofrece la interfaz de Geogebra, es posible realizar y observar cambios a la mayor brevedad.

En segundo término pero no por eso menos importante se hizo hincapié en el valor numérico de la ordenada al origen dentro del diseño algebraico de la función, no dejando a un lado la representación tabular de la misma, sin embargo se consideró que tal vez está última como una tabla en Geogebra podría ser poco practica para que el estudiante visualizara a la ordenada de forma explícita, ya que en dicha vista solo se observan valores y no las fórmulas que dieron origen a las cantidades numéricas. Por otro lado, en los cuestionamientos de I1.A3.P1 a la I1.A3.P6 dentro de la actividad 3, se guía al alumno para que focalice su atención hacia el valor numérico constante que representa la ordenada al origen dentro de la función lineal y la relación de dicho valor constante con el trazo de la recta y su respectiva pendiente, así como en el diseño algebraico de la función y su influencia sobre los valores que integran la tabla que da origen a la lista de puntos graficados en el plano cartesiano.

Explícitamente en la pregunta I1.A3.P6 se condujo al estudiante a un análisis comparativo entre una recta que pasaba por el origen y otra que mostraba un desplazamiento sobre el eje de las y, por supuesto considerando los pormenores de cada situación planteada previamente en su representación verbal. Ahondando en el estudio de la ordenada al origen, en la tarea 3. 3, con la ayuda de Geogebra, se pidió al alumno trazar 3 rectas que siguieran la misma trayectoria y poseyeran el mismo valor de la pendiente, la única variante entre ellas debía ser el valor constante de la ordenada al origen, al ser trazadas en el mismo plano se pretendía hacer visible la posibilidad de desplazamiento de la recta sobre el eje y. En las preguntas de la I1.A3.P7 a la I1.A3.P9 se le orienta al estudiante en la reflexión de este hecho.

Para cerrar la actividad 3, en la pregunta I1.A3.P10 se le pide al estudiante que después de haber analizado y estudiado a la ordenada al origen con ayuda del software Geogebra, exprese con sus propias palabras su noción sobre este elemento de la función lineal. Por otro lado, hasta este apartado (sección 3) de la secuencia diseñada en un formulario de Google en línea para la identificación de los elementos de la función lineal, dichos elementos se trabajaron de manera particular, no obstante es de bien saberse que los elementos de la función no pueden ser disociados, ya que unos son necesarios para que otro u otros de ellos sean explícitos. Razón por la cual se diseñó una cuarta actividad, donde se destacaría la interacción de todos los elementos de la función lineal funcionando como un sistema.

De tal forma que la actividad 4 titulada todos los elementos de función lineal, trabajando juntos; se diseñó con el objeto que los alumnos percibieran a la función lineal no como una serie de elementos separados, sino como un todo integrado por distintos componentes que lo hacen complejo y posible. Dicha actividad se integró de 2 tareas y 10 preguntas de complementación. En cada una de las tareas se planteó una problemática con características específicas. Con las preguntas I1.A4.P1 y I1.A4.P2 se comenzó con el análisis por parte del alumno, debiendo identificar a la variable independiente y la variable dependiente inicialmente en su representación verbal dentro de un hecho, para posteriormente traducirlas a lenguaje algebraico y trabajar con ellas en la vista tabular y gráfica.

La pregunta I1.A4.P3 se enfocó en la identificación de la pendiente, donde el estudiante debía explicar verbalmente y en concordancia con la identificación previamente establecida de las variables, que hecho quedó definido de acuerdo al valor numérico de este elemento de la función lineal en sus distintas representaciones. En la pregunta I1.A4.P4 se consideró la identificación de la ordenada al origen, donde el estudiante debía explicar que causa o causas dieron lugar a que la recta se intersectara con el eje de las y en un punto específico, así mismo, de acuerdo a las variables establecidas que recursión tenía esta intersección para problemática planteada. En la pregunta I1.A4.P5 una vez identificadas las variables, la pendiente y la ordenada al origen, el estudiante diseñaría y explicaría verbalmente la función que representa a la situación inicialmente planteada.

En la tarea 4.2 se ofreció un nuevo planteamiento donde por segunda ocasión el estudiante debía realizar un análisis completo y minucioso que le permita identificar a todos los elementos de la función. En las preguntas I1.A4.P6 y I1.A4.P7, se pidió cuenta de la identificación de la variable independiente y de la variable dependiente respectivamente. Posteriormente, con la pregunta I1.A4.P8 se solicitó la identificación de la pendiente dentro de la situación establecida, así mismo en el cuestionamiento I1.A4.P9, se requirió la identificación de la ordenada al origen. Para que una vez identificados todos los elementos de la función, en la pregunta I1.A4.P10, el estudiante debía establecer el modelo matemático que definiera a la misma de acuerdo a la situación inicialmente planteada.

3.7.2 Instrumento 2: análisis de los elementos de la función lineal en lápiz y papel

El uso de Geogebra para la identificación de los elementos de la función lineal, como cualquier otra herramienta didáctica, se empleó como un medio de construcción de conocimiento, más no como un conocimiento de carácter final. Por lo que se consideró necesario realizar un segundo instrumento (anexo 2) que constatará la identificación de los elementos de la función lineal por parte del estudiante fuera del ambiente de este software. Dicho instrumento fue estructurado a manera de cuestionario, integrado por 6 preguntas de complementación, se realizó en papel y a resolver a lápiz. Si bien, no está explícitamente dividido en secciones tituladas (esto para no predisponer al alumno en sus respuestas), se diseñó considerando actividades o apartados.

El primer apartado comprendió las preguntas I2.A1.P1 y I2.A1.P2, direccionadas a la identificación de la variable independiente y la variable dependiente. El segundo apartado, estaba integrado por las preguntas I2.A2.P3 y I2.A2.P4, las cuales se enfocaban en la identificación de la pendiente. El tercer apartado solo incluía a la pregunta I2.A3.P5, relacionada con la identificación del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas. El cuarto y último apartado estaba integrado por la pregunta I2.A4.P6, que se enfocan en la identificación de todos los elementos de la función lineal trabajando en conjunto. A continuación, se explica de forma detallada el propósito de cada pregunta.

En la pregunta I2.A1.P1, que contaba con 5 incisos ordenados alfabéticamente, el estudiante debía identificar la variable independiente y la variable dependiente, así como la relación que existe entre ellas. En el inciso a de dicha pregunta se le proporcionó al alumno una tabla cuyos valores debía completar de acuerdo a la problemática planteada. Los 2 puntos básicos que el estudiante debía considerar para cumplir con esta tarea, era la identificación de la variable independiente y la variable dependiente dentro de la situación expresada verbalmente, así como comprender la relación de dependencia entre dichas variables, estableciendo correspondencia con la representación algebraica de la situación, que ya se encontraba señalada explícitamente dentro del texto.

En el inciso b de la misma pregunta, el estudiante debía expresar de acuerdo a la situación planteada previamente de manera verbal y considerando el trabajo realizado en la tabla del inciso a, que magnitud representaba a la variable independiente. Posteriormente en el inciso c, se solicitó se analizara de la misma manera a la variable dependiente. Una vez que el alumno mostraba haber identificado a las variables en la representación verbal, tabular y algebraica, se consideró era el momento para evidenciar que también podía realizar dicha identificación en el ambiente gráfico. Por lo que en el inciso d y e se le cuestionó sobre en qué ejes del plano cartesiano debía ser graficada cada una de las variables.

En el inciso f de la pregunta I2.A1.P1, se le proporcionó al estudiante un plano cartesiano para que realizará el trazo de la gráfica de la función que representara a la situación inicialmente planteada. Se podría considerar a este inciso como el más relevante dentro de la primera pregunta de este instrumento, pues es donde el alumno reuniría toda la información analizada anteriormente; como es la identificación de las variables, la relación entre ellas, la identificación de los conjuntos que determinan a las mismas en el plano cartesiano, la localización de puntos coordenados en el mismo plano provenientes de la tabla elaborada en el inciso a, para finalmente concretarlo en la tarea encomendada en el inciso f.

La pregunta I2.A1.P2 también fue dirigida hacia la identificación de las variables. Las actividades por realizar se clasificaron en 5 incisos, enlistados en orden alfabético. El inciso a, si bien se diseñó para que el estudiante identificara a las variables, principalmente se focalizó en la identificación de la relación de dependencia entre las mismas, por lo que se solicitó al alumno completar los valores de la tabla que representaba a la situación planteada de manera verbal, solo que a diferencia de la pregunta I2.A1.P1, la tabla contaba mayormente con valores de la variable dependiente y solo uno de la variable independiente. Lo que se pretendía con este ejercicio era llevar al estudiante a la reflexión sobre las situaciones relacionadas con el planteamiento del problema, que influían para llegar a las cifras de la columna que reflejaba la variable dependiente.

Una vez establecidas las variables y su relación, se le cuestionó al estudiante en el inciso b y c sobre las magnitudes que para este problema definían a la variable independiente y la variable dependiente respectivamente. El inciso d y e fungieron como preguntas para ayudar al alumno a situarse en el plano cartesiano e identificar los conjuntos de valores que podían adoptar las variables en dicho plano. Para cerrar la pregunta, en el inciso f se proporcionó un plano cartesiano para que el estudiante representara la relación de dependencia de las variables a través de los puntos coordenados extraídos de la representación tabular de la función.

El I2.A2, se dedicó a la identificación de la pendiente por parte del estudiante. Dicho apartado se integró de 2 preguntas de complementación, la I2.A2.P3 y la I2.A2.P4. Con la pregunta I2.A2.P3, se pretendía que el alumno diera cuenta de su habilidad para identificar las implicaciones de una pendiente positiva o una negativa en una recta, partiendo de la representación algebraica de la función y concluyendo con el trazo gráfico de la misma. Dicha pregunta se dividió en 2 incisos, en el primero de ellos, el inciso a, se trabajó con la representación algebraica y tabular de la función lineal, mostrando 2 funciones con los mismos parámetros en cuanto a literales y valor numérico, pero diferentes en el signo.

El estudiante estaba encargado de completar las tablas de la representación tabular de acuerdo a un conjunto de valores ya fijados en el cuestionario para la variable independiente. En el inciso b de la misma pregunta, se proporcionó un plano cartesiano en donde el alumno graficaría a ambas rectas con distintos colores para facilitar la diferenciación entre ellas, además de resaltar el área o ángulo de inclinación de la pendiente con su respectivo valor numérico. Sin duda, este último requerimiento es el punto más relevante de esta pregunta en cuanto a los fines que persigue la presente investigación, pues aquí se podría reflejar si el estudiante no solo estaba en posibilidad de identificar a la pendiente, sino que también podría mostrar habilidad para hallar congruencia entre las distintas representaciones de la misma.

La pregunta I2.A2.P4 estaba orientada hacia la identificación de los incrementos o decrementos que podría sufrir el valor numérico de la pendiente, para lo cual, en el inciso a de dicha pregunta se pidió al estudiante completar las respectivas tablas de 2 funciones lineales. El mismo cuestionario ya proporcionaba un conjunto de valores numéricos para la variable independiente. La primera de las funciones lineales mostraba un valor numérico fraccionario, así como signo negativo. La segunda fue diseñada con un valor numérico entero y signo positivo. Una vez determinados los valores de la variable dependiente presentados de forma tabular, el estudiante debía elaborar la tarea del inciso b, donde se le proporcionaba un plano cartesiano, en el cual debía trazar ambas rectas con distintos colores e indicar el área o ángulo de inclinación de la pendiente con su valor numérico.

La tercera actividad del cuestionario se integró por una sola pregunta, la I2.A3.P5, cuyo propósito era que el estudiante diera muestra de su habilidad para identificar a la ordenada al origen, así como la identificación de las posibles repercusiones del incremento o decremento de este valor en el desplazamiento de la recta sobre el eje de las ordenadas. Para esto se plantearon 3 funciones lineales, con los mismos parámetros en cuanto a la pendiente, las literales e incluso en el valor numérico de la ordenada al origen, la diferencia entre ellas radicaba en que una de las 3 tenía un valor positivo, la segunda un valor negativo y una más tenía un valor nulo.

Nuevamente, como en las preguntas de apartados anteriores, se propuso al estudiante completar los valores de las tablas correspondientes a cada una de las 3 funciones establecidas, las cuales ya contenían un conjunto de números que representaban a la variable independiente de la función. El inciso b, de la misma pregunta contaba con un plano cartesiano, donde el alumno debía graficar los puntos coordenados de las tablas y trazar las rectas correspondientes a cada función, las cuales debían ser representadas en distintos colores. También se le requirió indicar en que puntos coordenados las rectas se intersectaba con el eje de las ordenadas, y que relación tenían estos puntos de intersección con respecto a los parámetros de su respectiva función representada de forma algebraica.

El apartado 4, comprendía únicamente a la pregunta I2.A4.P6, dicha pregunta estaba enfocada a que el alumno identificara a todos los elementos de la función dentro de una misma situación, así como la relación que se da entre dichos elementos para integrar a la misma. Este apartado, partió de la representación gráfica de la función, esto con el propósito de que el estudiante diera muestra que podía transitar entre las diversas representaciones semióticas de la misma. Así mismo, no se consideró a la representación tabular de la función lineal, esto con el objeto de que el alumno no percibiera a las representaciones de la misma como un proceso, sino como expresiones distintas. Finalmente, el estudiante debía dar muestra de podía estructurar la representación algebraica de la función lineal, a partir de la visualización de sus elementos.

La pregunta I2.A4.P6, constó de 2 incisos. El inciso a, solicitaba al estudiante estructurar la representación algebraica de la función lineal a partir de su representación gráfica proporcionada en el cuestionario. Dicha gráfica contaba con una cuadricula para facilitar al estudiante la identificación de los objetos gráficos presentes en el plano. En el cuadrante 3 del plano cartesiano resaltaban 2 puntos coordenados, el punto A, se intersectaba con el eje de las ordenadas y el punto B con el eje de las abscisas, ambos puntos unidos por el trazo de la recta, la cual contaba con su respectiva pendiente indicada como un área delimitada por una línea punteada. En el inciso b de la misma pregunta se le pedía al estudiante construir la representación algebraica de la función lineal. Los elementos de dicha función, no se encontraban graficados en el plano cartesiano, por lo que en primera instancia debía graficar y luego realizar la tarea encomendada.

3.8 Codificación y categorización de los datos recolectados

Como paso preparatorio para el análisis de la información recabada a través de los instrumentos de investigación, se realizó un proceso de codificación de datos, el cual, más que solo pretender asignar símbolos como etiquetas de tópicos, se deseaba sirviese para diseñar una organización sistemática de las respuestas derivadas de los instrumentos aplicados. Privilegiando la relevancia de dichas respuestas. De la misma forma, la categorización se realizó de acuerdo a criterios y características de relevancia y significación. Todo esto, con el propósito de facilitar el proceso de interpretación de las respuestas, y así lograr un análisis, completo, correctamente ejecutado y ampliamente detallado (MyThemeShop, 2020).

De tal forma, que se procedió a la codificación y categorización de la información de la siguiente manera: considerando en primera instancia, que tal como se comentó en el apartado 3.6 del presente capítulo, se diseñaron 2 instrumentos para la recolección de los datos. Por lo que cada uno de los instrumentos, fue codificado inicialmente con la letra I mayúscula, que obviamente hacía alusión a la palabra instrumento, seguida del número 1 o 2, respectivamente. La asignación de dicho número se dio de acuerdo al orden de aparición de cada instrumento dentro del presente trabajo de investigación. Así, que al primer de ellos se le asignó la combinación I1 y al segundo la combinación I2.

El I1 y el I2, se dividieron respectivamente en 4 actividades. De tal forma, que a las actividades se les consignó como código, la letra A, seguida de un número arábigo, asignado de acuerdo a la aparición de cada actividad dentro del instrumento que la contenía. Por lo que, el I1 y el I2, estuvieron integrados por sus respectivas A1 A2, A3 y A4. Por ejemplo, el código que denotó a la A1 dentro del I1, se realizó señalando primero al código del instrumento, seguido de un punto y posteriormente se colocó la clave de la actividad, quedando de la siguiente manera: I1.A1. Otros ejemplos son: la A4 dentro del I2, que se denotó como I2.A4 o el A3 dentro del I1, como I1.A3.

Así mismo, dentro de los 2 instrumentos, cada pregunta se denotó con la letra P mayúscula y posteriormente se le añadió un número arábigo, asignado de acuerdo al criterio de orden de aparición. Por ejemplo la pregunta P1, de la A1 del I1, se codificó como I1.A1.P1 o la P5 de la A2 del I2, se codificó como I2.A2.P5. En el caso particular del I2, algunas de las preguntas, comprendían incisos, los cuales fueron señalados con las letras Inc, seguidas de la letra minúscula que indicaba el inciso en cuestión. Por ejemplo: el Inca de la P4 de la A2 dentro del I2, el cual se codificó como I2.A2.P4.Inca, o bien el Incb de la P6 en la A4 del I2, señalado como I2.A4.P6.Incb.

Una vez establecida la codificación de ambos instrumentos, se inició con la categorización de las respuestas obtenidas por cada una de las preguntas planteadas. En el caso del I1, dicha categorización se realizó atendiendo a la idea principal de cada una de las respuestas emitidas por los estudiantes, las cuales, fueron presentadas en tablas o figuras (gráficos circulares), donde se señalaron tres ítems, el primero de ellos como ya se mencionó, se refirió a la idea principal, seguido del número y porcentaje de alumnos que coincidían con dicha idea. En cuanto al I2, se seleccionó a los casos particulares que manifestaron procesos cognitivos relevantes para dar respuesta a los objetivos de investigación. La codificación de cada caso particular, se realizó de la siguiente manera: primero, se asignó el prefijo CP para denotar que se trataba de un caso particular, posteriormente, se consideraron las iniciales del nombre completo del estudiante, comenzando por su nombre o nombres, seguido de sus apellidos.

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN LINEAL

4.1 Presentación

El presente capítulo muestra la información derivada de la aplicación de los instrumentos de recolección de datos presentados en el capítulo 3 (instrumento 1: análisis de los elementos de la función lineal a través del uso de GeoGebra e instrumento 2: análisis y exploración de los elementos de la función lineal en lápiz y papel). Para una mejor compresión, dicha información, se presenta agrupada de acuerdo a su utilidad para dar respuesta a los objetivos planteados en el capítulo 1. De tal forma, que él presente capítulo titulado análisis de la información, se dividió en tres apartados: apartado 1, variable independiente y variable dependiente; apartado 2, pendiente y ordenada al origen; y apartado 3, los elementos de una función de primer grado.

4.2 Variable independiente y variable dependiente

La presentación de la información se inició con el análisis del I1.A1, referente al reconocimiento por parte del alumno de Bachillerato de la variable independiente y variable dependiente de la función lineal. Dicha actividad fue encabezada por el planteamiento 1, el cual mencionaba: un grupo de estudiantes de primer grado de preparatoria reciben 5 puntos por cada pregunta que hubiesen contestado correctamente en su examen de álgebra. Para un mejor manejo de los datos, el número de aciertos logrados estará representado por la literal m y el número de puntos obtenidos par la literal n. Analicemos la información con ayuda del software Geogebra.

En el punto 1.1 y 1.2 del I1.A1, con ayuda del software Geogebra, se le guío al estudiante en el manejo de la vista tabular para construir una tabla, donde se representara a la variable independiente y la variable dependiente del planteamiento 1, considerando los parámetros fijados por dicho planteamiento. Al ejecutar la tarea señalada se pretendía que el alumno reconociera a ambas variables y analizara la relación de dependencia entre ellas, partiendo de la identificación de dos conjuntos, uno de entrada (domino) y otro de salida (codominio). Dado lo anterior, se le proporcionó un intervalo de ítems (de 0 a 6), que representaban al conjunto aciertos logrados.

Una vez concluida la tarea en cuestión, en el I1.A1.P1, se solicitó a los estudiantes establecieran, basados en su experiencia en la elaboración de la tabla señalada el punto 1.1 y en el 1.2 del I1.A1, cuál sería el posible método para lograr la trasformación de los ítems de entrada a un conjunto de salida. Las respuestas de los alumnos se dividieron en 5 grupos, 4 de ellos enmarcados respectivamente por una idea, y el grupo restante conformado por los estudiantes que no llegaron a ninguna conclusión. 3 ideas centrales diferentes fueron mencionadas respectivamente por 11 alumnos y una idea central más, fue señalada por 5 estudiantes. Asimismo, 9 jóvenes no establecieron su posición al respecto del cuestionamiento señalado.

El primer grupo conformado por 11 alumnos, estableció que para lograr la trasformación del dominio a codominio, era necesario, conocer y/o establecer una fórmula. El segundo grupo de la misma cantidad de estudiantes, mencionó que la base central de la trasformación era conocer los valores que integran al dominio. El tercer grupo de 11 alumnos determinó que la regla de trasformación del planteamiento correspondía específicamente a una multiplicación. Por otro lado, 9 estudiantes, no establecieron ninguna conclusión al respecto. Así mismo, 5 alumnos consideraron que la transformación del codominio se podía llevar a cabo gracias a la intervención de Geogebra.

Por otro lado, el I2 fue diseñado con el objeto de que los estudiantes de Bachillerato dieran muestra de los procesos cognitivos que llevaron a cabo al tratar de identificar de los elementos de la función lineal fuera del ambiente del software Geogebra. De tal forma, que una vez ejecutadas por parte de los alumnos las tareas planteadas en dicho instrumento, se observaron los procesos cognitivos que llevaron a cabo al tratar de identificar de los elementos de la función lineal fuera del ambiente del software Geogebra. Posteriormente, se eligieron algunos CP, los cuales fueron seleccionados atendiendo a su relevancia con respecto al cumplimiento de los objetivos del presente trabajo. Los CP seleccionados para presentar la información emanada del I2 correspondieron a los alumnos: Yaretzy Gonzalez Solano a quien de aquí en adelante nombraremos como CPYGS y Jesús Salvador Ramírez Mejía a quien lo mencionaremos como CPJSRM.

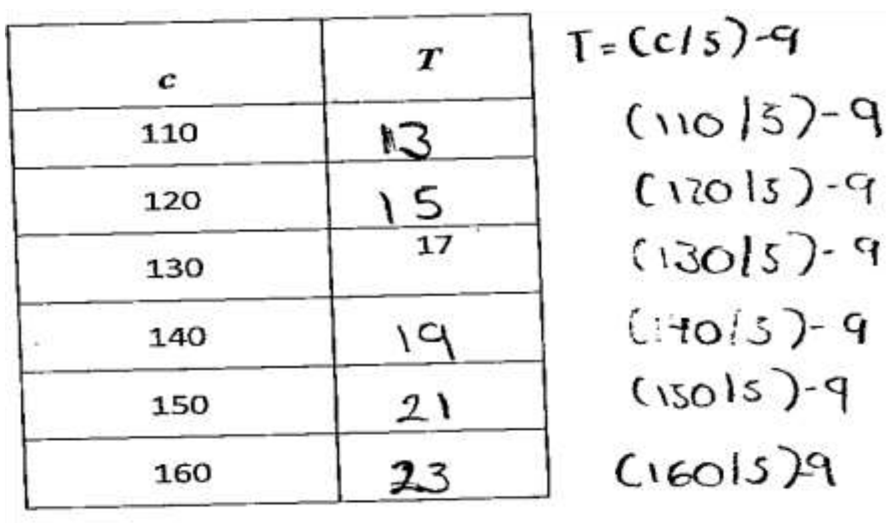
Asimismo, el I2, se integró de 4 actividades, la primera de ellas, I2.A1, estuvo integrado por los cuestionamientos I2.A1.P1 y I2.A1.P2, enfocados hacia la identificación de la variable independiente y la variable dependiente de la función lineal. En dichos cuestionamientos, se establecieron situaciones expresadas verbalmente que los estudiantes analizarían para identificar a dichas variables en cada planteamiento señalado. Del mismo modo, los alumnos debían reflexionar sobre la relación de dependencia entre las variables a través de la búsqueda de valores presentados en una tabla. Para cerrar dichas tareas, representarían las situaciones de manera gráfica.

Acotando en la tarea del I2.A1.P1, esta se dividió en 2 incisos. En el primero de ellos, el inciso a, los estudiantes debían completar los valores de una tabla considerando los parámetros de la problemática planteada. En la figura 14 se muestra el proceso que siguió CPYGS al ejecutar dicha tarea. De acuerdo a la entrevista 1, la estudiante mencionó haber establecido como punto de referencia para la identificación de las variables, la relación de dependencia explícitamente mencionada en el planteamiento, cabe mencionar que dicha relación se hacía visible a través de su expresión algebraica, lo que ella y un grupo de 11 estudiantes en el I1.A1.P1, denominaron como una fórmula.

Figura 14. Resolución del I2.A1.P1.Inca realizado por el CPYGS

1. Se ha comprobado que diferentes animales realizan ciertas actividades en función de la temperatura ambiental, por ejemplo: los grillos cantan más a mayor temperatura y la temperatura puede calcularse $T = (c/5) - 9$, Donde: (T) estará en $°C$ y c en cantos por minuto.

a) ¿Qué datos faltan en la tabla?



c	*T*
110	13
120	15
130	17
140	19
150	21
160	23

T=(c/5)-9
(110/5)-9
(120/5)-9
(130/5)-9
(140/5)-9
(150/5)-9
(160/5)-9

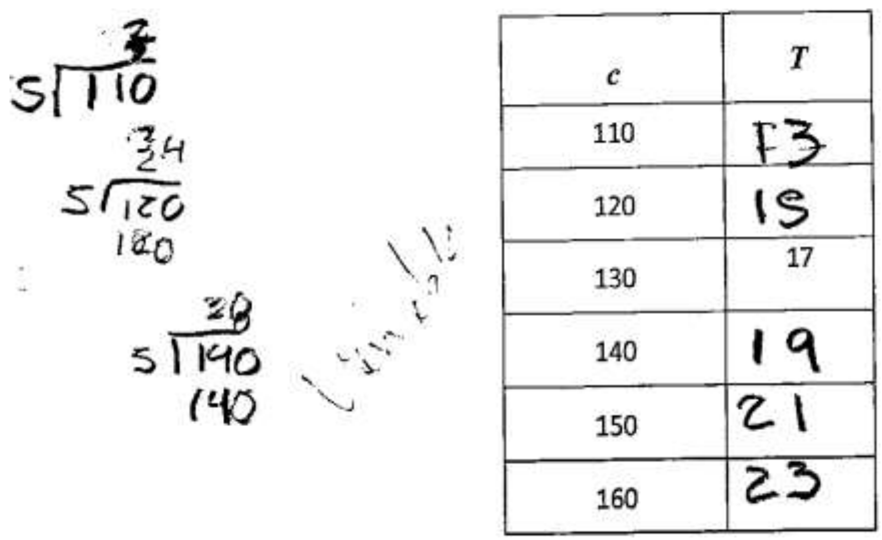
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

En la resolución de la tarea del I2.A1.P1.Inca como se muestra en la figura 15, el CPJSRM, de acuerdo a la entrevista 2, trató de establecer la relación de las variables, aludiendo a la idea de fórmula, sin embargo, en el proceso cognitivo que plasma a lápiz y papel, también se ve reflejada la idea de una aplicación meramente aritmética, relacionada con lo ejecutado en el punto 1.1 y 1.2 del I1.A1, donde la relación entre las variables se expresó a través de la multiplicación. En la observación de la ejecución de las tareas fue visible que dicho alumno, intentó en varias ocasiones obtener los resultados aritméticos correctos, sin embargo, su proceso reflejó, que su enfoque estuvo mayormente en lo procedimental y no en lo analítico.

Figura 15. Resolución del I2.A1.P1.Inca realizado por el CPJSRM

1. Se ha comprobado que diferentes animales realizan ciertas actividades en función de la temperatura ambiental, por ejemplo: los grillos cantan más a mayor temperatura y la temperatura puede calcularse $T = (c/5) - 9$, Donde: (T) estará en $°C$ y c en cantos por minuto.

a) ¿Qué datos faltan en la tabla?



c	T
110	F3
120	15
130	17
140	19
150	21
160	23

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Avanzando en el I1. A1 se plantearon los cuestionamientos I1.A1.P2 e I1.A1.P3, ambos enfocados en la identificación de la variable independiente y la variable dependiente, así como la relación de dependencia entre ambas variables, transitando de la representación verbal a la representación tabular. En el I1.A1.P2, a través del cuestionamiento ¿qué representan los valores obtenidos en la columna n?, los estudiantes analizaron la relación entre los valores obtenidos en dicha columna de la vista tabular de Geogebra, con los parámetros señalados verbalmente en el planteamiento 1. En cuanto a las respuestas emitidas por los alumnos ante tal interrogante, 13 de ellos refirieron haber relacionado a la literal n con los puntos obtenidos de acuerdo a los aciertos logrados.

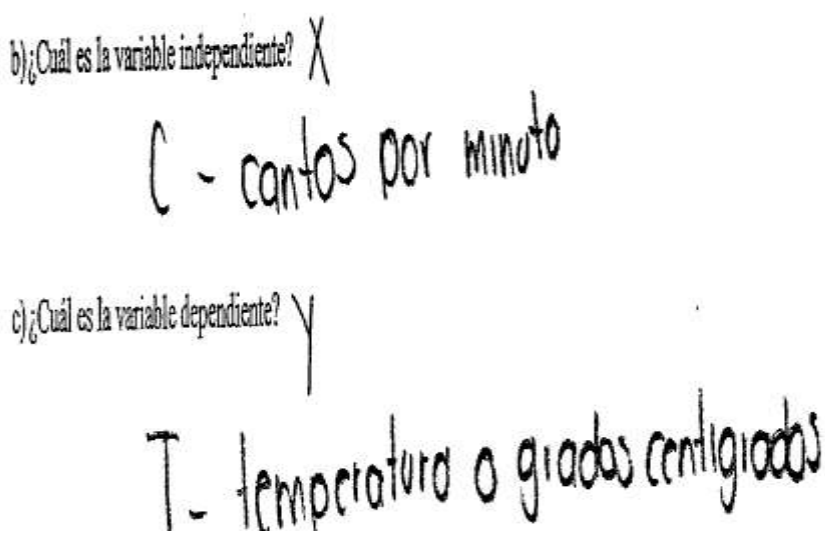
Así mismo, 11 estudiantes consideraron que la literal n se refería a los aciertos logrados, dando muestra de que hasta ese momento de la aplicación del I1, no tenían aún claro cuál era la relación de dependencia entre las variables, y por consecuencia tampoco tenían clara la diferencia entre una y otra variable. De la misma forma, 9 estudiantes asociaron la relación de dependencia con el procedimiento del I1.A1.P1, no llevándolo a lo analítico. Por su parte, 9 alumnos, relacionaron los ítems obtenidos después de la regla de dependencia como el mero resultado de una fórmula. No así, 5 estudiantes no proporcionaron una respuesta.

El cuestionamiento *I1.A1.P3,* se planteó con el objeto de favorecer en los estudiantes la reflexión en cuanto a la relación de dependencia entre las variables. En esta pregunta, se introdujo la palabra *depende*, enfatizando en el papel que juegan dichas variables dentro de la relación de dependencia. Así, los alumnos identificaron que variable dependía de la otra en el contexto de la representación verbal de las mismas De tal modo, que 24 de ellos dieron muestra de haber reconocido la relación de dependencia dentro del planteamiento establecido, identificando que para lograr cierta cantidad de puntos era necesario tener cierta cantidad de aciertos.

Por otra parte, 9 alumnos, aludieron al procedimiento ejecutado para llegar al codominio de la situación planteada, estableciendo que para conocer dicho conjunto solo era necesario aplicar una multiplicación, esto en apego a lo construido en la vista tabular de Geogebra en el *I1.A1.P1*. En el mismo sentido, otros 9 estudiantes, identificaron a la relación de dependencia como la aplicación de un proceso matemático, aludiendo al uso de una fórmula, lo cual, no es del todo erróneo, considerando que algebraicamente también se puede representar una relación de dependencia. Sin embargo, se hizo evidente que los estudiantes requerían de algunas otras tareas matemáticas que lo guiaran para comprender la naturaleza y causas de dicha relación. Por otro lado, 5 alumnos no dieron respuesta al cuestionamiento *I1.A1.P3*.

Para dar muestra de cómo los alumnos establecieron la relación de dependencia sin ayuda de la herramienta Geogebra, en el I2.A1,P1.Incb e Incc, el cual se desarrolló en lápiz y papel, se solicitó a los estudiantes que de acuerdo a los parámetros del planteamiento 1 del I1.A1, identificaran la variable independiente y la variable dependiente. Como se muestra en la figura 16, el CPYGS de acuerdo a la entrevista 1, se apoyó de la representación algebraica de la relación de dependencia $T = (c/5) - 9$, para identificar a dichas variables. La estudiante relacionó a la literal c , con la variable independiente cantos por minuto y a la literal T con variable dependiente, temperatura o grados centígrados.

Figura 16. Resolución del I2.A1.P1.Incb e Incc realizado por el CPYGS

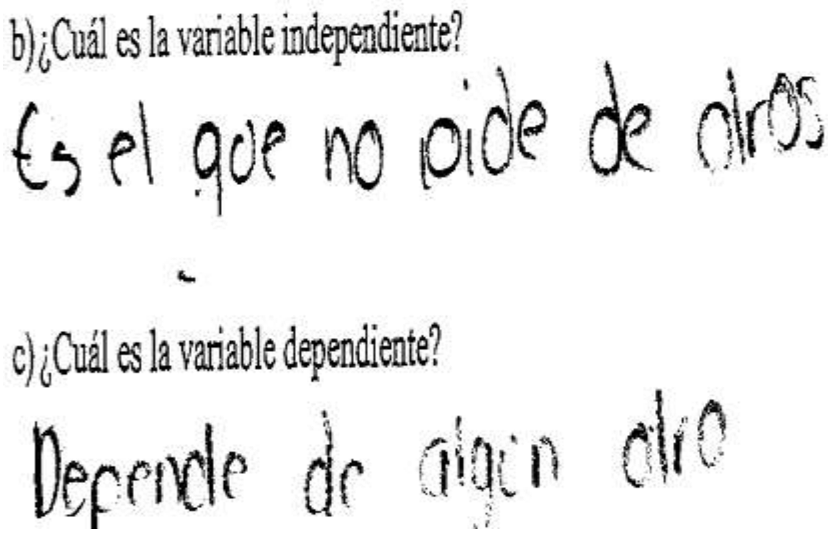


Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

De la misma forma, en la resolución del I2.A1.P1.Incb e Incc, el CPJSRM, según lo mencionado en la entrevista 2, distinguió a la variable independiente como un elemento de carácter autónomo, pues el alumno consideró que esta variable existía aún sin la necesidad de otro elemento. Como se muestra en la figura 17, el estudiante declaró: la variable independiente es la que no pide de otros. En cuanto a la variable dependiente, en la entrevista 2, el alumno señaló haberse apoyado de su propia definición sobre la palabra dependencia, y así respondió: la variable dependiente es aquella que depende de algún otro. En la redacción de su respuesta al hacer uso de la palabra, otro, podemos notar que el estudiante mostraba claridad de ideas en cuanto a que las variables son elementos distintos, con naturaleza y características propias.

Si bien, el uso de la palabra depende, bien pudo haber sido inducido por la palabra dependiente que contiene la pregunta; con el empleo de las palabras no necesita, utilizada cuando se le cuestionó sobre la variable independiente, se evidencia que el CPJSRM, identificó la relación de dependencia entre las variables. Considerando que para que la variable independiente exista, se necesita de un hecho o fenómeno primigenio que desemboca en otro hecho o fenómeno distinto a la inicial. Sin embargo, aunque las respuestas del estudiante resultaron por demás enriquecedoras para el presente trabajo de investigación, resaltó el hecho de que el joven no aterrizó dichas respuestas en el contexto del planteamiento 1, tal como se le solicitó en la tarea señalada.

Figura 17. Resolución del I2.A1.P1.Incb e Incc realizado por el CPJSRM



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Avanzando en el I1.A1, en el punto 1.3, a través de la herramienta lista de puntos, se introdujo al alumno al estudio de la representación gráfica de la variable independiente y de la variable dependiente, así como al análisis gráfico de la relación de dependencia que existe entre dichas variables, todo esto, sin dejar a un lado las tareas ejecutadas anteriormente, relativas a la representación tabular de la función lineal. Ya que los datos contenidos en la tabla construida en el punto 1.1 y 1.2 del I1.A1, llevadas a cabo en la vista tabular de Geogebra, fueron la fuente de información para la visualización de la lista de puntos relativa al planteamiento 1. La lista de puntos, no es más que la representación gráfica de pares ordenados que representan la relación de dependencia entre las variables, lo cual se hace observable en la vista grafica de Geogebra.

En el punto 1.3 del I1.A1, el mismo instrumento guió a los estudiantes para que graficaran con ayuda de Geogebra la lista de puntos correspondiente al planteamiento 1. Posteriormente, en el I1.A1.P4, con el cuestionamiento, ¿qué indican las coordenadas C, D, E, F, G, respectivamente?, se invitó a los alumnos a analizar la representación gráfica de las variables, así como, la relación de dependencia que existe entre las mismas, la cual también era observable en el ambiente gráfico. Las respuestas de los estudiantes en cuanto al cuestionamiento planteado fueron las siguientes: 20 de ellos consideraron que las coordenadas graficadas, se referían a los puntos obtenidos de acuerdo a los aciertos logrados. Así mismo, 9 estudiantes, estimaron que la lista de puntos representaba los puntos obtenidos en relación a los aciertos logrados.

En la respuesta de estos 2 grupos, resulta notorio que la representación gráfica fue útil para que los alumnos tuvieran más elementos de análisis y por lo tanto una visión más amplia en cuanto al proceso para identificar a las variables independiente y dependiente, así como la relación que existe entre ellas. Con respecto al segundo grupo integrado por 9 alumnos, destaca el uso de la palabra relación, esto es, que la representación gráfica resulto útil para que el estudiante a través de la observación identificara el vínculo o correspondencia, que existía entre el dominio y el condominio de la función. Por su parte, 8 alumnos, lograron transitar exitosamente entre la representación tabular y la representación gráfica de la función con ayuda del software Geogebra.

Dicho grupo de estudiantes determinó de manera correcta la lista de puntos ordenados, sin embargo, su respuesta se limitó a lo operacional, dejando de lado el análisis necesario para responder al cuestionamiento I1.A1.P4. Así mismo, 5 alumnos realizaron la tarea señalada en el punto 1.3 del I1.A1, no obstante, su proceso operacional no fue exitoso, pues solo declararon los valores de los puntos coordenados que integraba la lista de puntos, los cuales no fueron representados gráficamente de manera correcta. Probablemente, esto haya sido una limitante para que ellos realizaran el análisis de la situación planteada. Por otro lado, 5 estudiantes no emitieron respuesta alguna.

Continuando con el estudio de la representación gráfica de la variable independiente y de la variable dependiente, en el cuestionamiento I1.A1.P5, los estudiantes observaron, analizaron y establecieron el eje del plano cartesiano donde fue representado el dominio de la variable independiente, el cual, de acuerdo a los parámetros señalados en el planteamiento 1, correspondía al valor de los puntos obtenido. Cabe señalar, que en el ambiente gráfico del software Geogebra, al hacer uso de la herramienta lista de puntos, automáticamente se muestran las coordenadas que reflejan la relación de dependencia entre las variables, tomando los valores numéricos introducidos previamente en la tabla construida en la vista tabular.

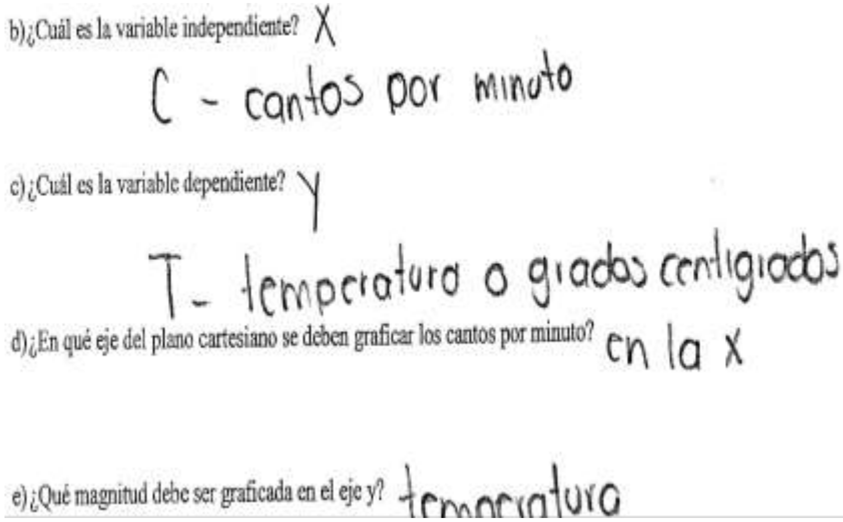
Considerando lo anterior, y basándose en la experiencia de los estudiantes al trabajar en la determinación del dominio y codominio de la función en la vista tabular de Geogebra, así como, en la observación de la lista de puntos representada en la vista grafica de dicho software, se planteó el cuestionamiento I1.A1.P5, el cual mencionaba: ¿en qué eje del plano cartesiano se representa el valor de los aciertos logrados? Al respecto, los estudiantes respondieron de la siguiente manera: 32 de ellos, consideraron que la variable independiente (aciertos logrados), fue representada en el eje de las abscisas. Por su parte, 10 alumnos consideraron que dicha representación, tuvo lugar en el eje de las ordenadas. Así mismo, 5 estudiantes no pudieron identificar el vínculo entre el dominio de la función y la representación del mismo en los ejes coordenados.

En ese mismo orden de ideas, en el cuestionamiento I1.A1.P6, se les solicitó a los estudiantes observaran y analizaran lo trabajado en los puntos 1.1, 1.2 y 1.3 del I1.A1. Después, establecieran en que eje del plano cartesiano fueron representados los valores numéricos correspondientes al condominio de la función, es decir, la variable dependiente; que de acuerdo a los parámetros señalados en el planteamiento 1, correspondía a los puntos obtenidos. De tal forma, que 32 alumnos consideraron que el codominio de la variable dependiente, estaba representado en el eje de las ordenadas. Por su parte, 10 estudiantes, establecieron que dicha representación tuvo lugar en el eje de las abscisas. Así mismo, 5 alumnos no lograron identificar la relación entre los valores numéricos que comprendían el codominio de la función y su representación en el plano cartesiano.

Retomando el I2.A1.P1 los estudiantes también trabajaron con la representación gráfica de la función lineal en lápiz y papel. De tal forma, que ellos mismos debían trazar los objetos gráficos necesarios para representar la situación señalada en el planteamiento 1 de dicho instrumento. Antes de empezar con la construcción de la gráfica de la función, les fueron planteadas 2 interrogantes (el I2.A1.P1.Incd y el I2.A1.P1.Ince). Se esperaba que dichas interrogantes les sirvieran de antecedente para identificar el eje del plano cartesiano en donde debía tener lugar la representación gráfica de cada una de las variables.

Por su parte, en el I2.A1.P1.Incd, se cuestionó a los estudiantes sobre en qué eje del plano cartesiano debía ser representada la variable independiente. La cual, de acuerdo al planteamiento 1 del I2.A1, correspondía a los cantos por minuto (c). Así mismo, en el I2.A1.P1.Ince se les preguntó sobre en qué eje del plano cartesiano debía ser representada la variable dependiente, que de acuerdo al mismo planteamiento del I2.A1, correspondía a la temperatura (T). Como se muestra en la figura 20 y en concordancia con la entrevista 1, el CPYGS respondió que los cantos por minuto (c), es decir la variable independiente debía ser representada en el $eje\ x$. Así mismo, la estudiante estableció que en él $eje\ y$ debía ser representada la temperatura (T).

Figura 18. Resolución del I2.A1.P1.Incd e I2.A1.P1.Ince realizado por el CPYGS


b) ¿Cuál es la variable independiente? X

C - cantos por minuto

c) ¿Cuál es la variable dependiente? Y

T- temperatura o grados centigrados

d) ¿En qué eje del plano cartesiano se deben graficar los cantos por minuto? en la X

e) ¿Qué magnitud debe ser graficada en el eje y? temperatura

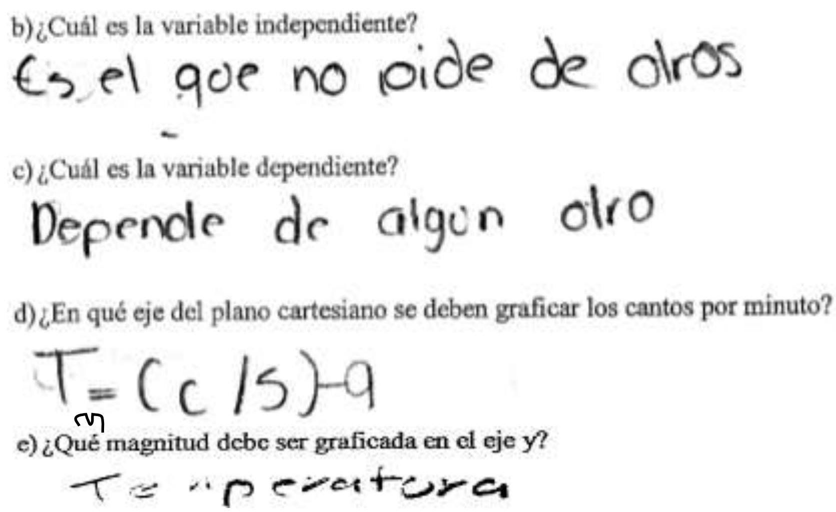
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Así mismo, el CPYGS en la entrevista 1, refirió que sus respuestas emitidas con respecto al cuestionamiento I2.A1.P1.Incd, así como al cuestionamiento del I2.A1.P1.Ince, se fundamentaron en el análisis que realizó para identificar la variable independiente y la variable dependiente en tres de sus representaciones. De tal forma, que el proceso cognitivo que siguió el CPYGS, para relacionar las variables con el eje del plano cartesiano en que estas debían ser representadas, fue el siguiente: inicialmente, la alumna estableció la representación algebraica de dichas variables de acuerdo a las literales asignadas para cada una de ellas en el planteamiento 1 del I2.A1. Después les asignó un significado de acuerdo a la representación verbal de las mismas. Posteriormente las relacionó con el eje del plano cartesiano en el cual les correspondía ser representadas.

Continuando con el estudio de la representación de las variables en el plano cartesiano, se presenta el caso del CPJSRM. Como se muestra en la figura 21 y de acuerdo a lo mencionado en la entrevista 2, con respecto a la resolución del I2.A1.P1.Incd, dicho alumno, estableció que los cantos por minuto (c), es decir la variable independiente, debía ser graficada haciendo uso de la representación algebraica de la función, la cual se encuentra expresada explícitamente en el planteamiento 1 del I2.A1. Así mismo, en cuanto I2.A1.P1.Incd, el CPJSRM consideró que la temperatura (T) debia ser representada en el $eje\ y$ o eje de las ordenadas.

Analizando las respuestas a los cuestionamientos I2.A1.P1.Incd e I2.A1.P1.Ince emitidas por el CPJSRM y relacionándolas con las respuestas establecidas anteriormente por el mismo alumno en la entrevista 2 con respecto a los cuestionamientos I2.A1.P1.Incb e I2.A1.P1.Incc, se observó que él estudiante manifestó diferenciar entre la variable independiente y la variable dependiente. Así mismo, mostró identificar la relación que existe entre dichas variables. Por lo que, al establecer $T\ = (c/5) - 9$, como respuesta para el I2.A1.P1.Incd, no se puede considerar que dicha respuesta este del todo errada, ya que gracias a esta fórmula es que se obtienen los valores del dominio de la función, que posteriormente serán representados en el eje de las abscisas. Dado lo anterior, tiene lógica cuando el alumno identifica a la variable dependiente, la temperatura, como lo que debe ser representado en el eje de las ordenadas.

Figura 19. Resolución del I2.A1.P1.Incd e I2.A1.P1.Ince realizado por el CPJSRM


b) ¿Cuál es la variable independiente?
Es el que no pide de otros
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
Depende de algun otro
d) ¿En qué eje del plano cartesiano se deben graficar los cantos por minuto?
$T = (c/5) - 9$
e) ¿Qué magnitud debe ser graficada en el eje y?
Temperatura

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

A la mitad de la ejecución de la A1 del I1, la cual se diseñó con el objeto de que los estudiantes identificaran a la variable independiente y la variable dependiente de la función lineal, así como también, con el objeto, de que los alumnos lograran identificar la relación de dependencia que existe entre dichas variables, transitando entre las distintas representaciones de la función con ayuda de las vistas de Geogebra; y una vez que dichos estudiantes ejecutaron tareas que les permitieran lograr los objetivos mencionados, surge la interrogante del I1.A1.P7. La cual, introduce el término función, con el propósito de conocer hasta qué punto los estudiantes han construido la noción de dicho término.

La interrogante en cuestión citaba lo siguiente: ¿en función de que esta el número de puntos obtenidos? A lo que 33 alumnos mencionaron haber notado que la palabra función refería a la relación de dependencia entre las variables, por lo que su respuesta a la pregunta, fue aciertos logrados, ya que de acuerdo a los parámetros señalados en el planteamiento 1 del I1.A, los puntos obtenidos dependían de los aciertos logrados. Por otro lado, 10 estudiantes consideraron que el término función se refería al proceso algorítmico que se da a un conjunto de números (dominio) para llegar a otro conjunto diferente al primero (codominio), por lo que establecieron que el mejor proceso para lograr ese objetivo era la multiplicación. Así mismo, 4 estudiantes, no establecieron una postura al respecto.

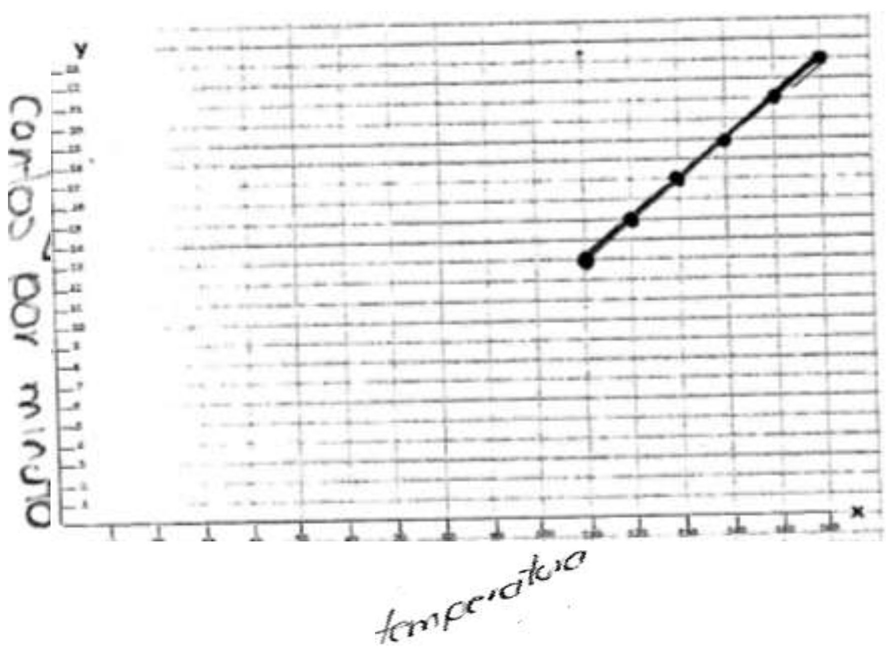
Por su parte, con el cuestionamiento I1.A1.P8, se pretendía que los alumnos se concretaran en el análisis de los elementos de la función lineal en sus distintas representaciones. Por lo que se les solicitó, establecieran las características que observaron en común entre la representación tabular y la representación gráfica de la situación establecida en el planteamiento 1 del I1.A1. En cuanto a las repuestas de los estudiantes ante dicha interrogante, 20 de ellos consideraron que los valores comprendidos en la tabla construida en la vista tabular de Geogebra referente a dicho planteamiento, establecían una relación que podía ser denotada como puntos coordenados, sin embargo no hicieron mención alguna acerca de la relación de dichos puntos con la representación gráfica de la función.

Así mismo, 7 alumnos mencionaron que los valores comprendidos en la tabla construida en la vista tabular de Geogebra fueron representados en los ejes del plano cartesiano. Del mismo modo, 7 estudiantes identificaron un aumento en los valores de la tabla, considerando que dicho aumento también era observable en la representación gráfica de la situación planteada. Por otro lado, 7 estudiantes no emitieron respuesta alguna. Un grupo de 4 alumnos identificaron una relación de cambio entre los valores de las variables presentados en la tabla, asimismo, consideraron que dicha relación también era observable en la graficación de los puntos coordenados determinados por los valores. Para 2 estudiantes les fue más significativa la representación gráfica de la función, por lo que declararon haber identificado la formación de una línea en la vista gráfica.

Por otro lado, para concretar el análisis de las variables de la función lineal en sus distintas representaciones y teniendo como reflexión previa las tareas ejecutadas en los incisos del a al e, presentes en el cuestionamiento I2.A1.P1, es que en el Incf del mismo cuestionamiento se solicitó a los alumnos trazar la representación gráfica del planteamiento 1 de dicho instrumento. Como se muestra en la figura 22, en el trazo elaborado por el CPYGS, se puede observar la identificación de la relación entre dichas variables por parte de la alumna, donde la estudiante como comento en la entrevista 1, formó puntos coordenados con los valores presente en la tabla elaborada anteriormente. Así mismo, en dicha gráfica, destacan la identificación de las variables, a través del vínculo entre la presentación verbal de las mismas y los ejes cartesianos que comprenden el dominio y codominio de la variable independiente y dependiente respectivamente.

Figura 20. Resolución del I2.A1.P1.Incf realizado por el CPYGS

f) Traza la gráfica.

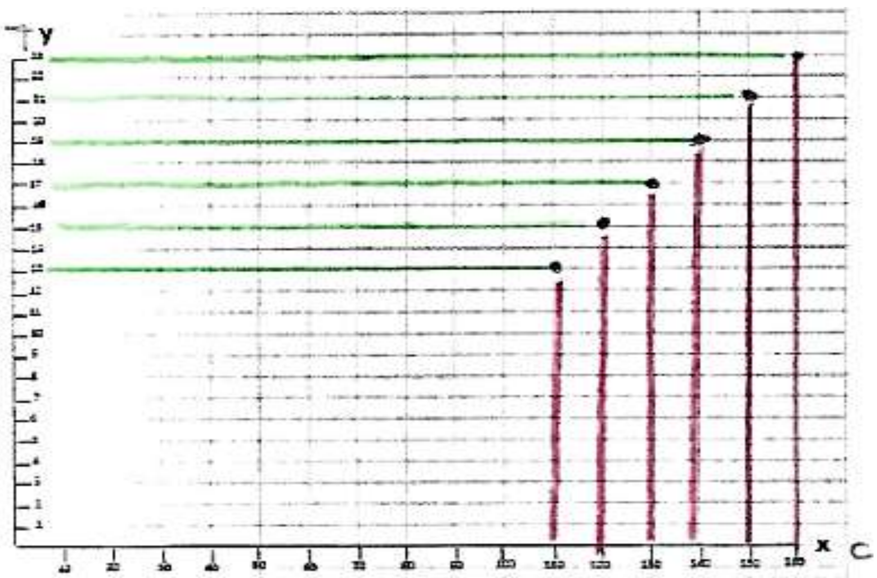


Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Por su parte el CPJSRM, representó gráficamente la situación establecida en el planteamiento 1 del I1.A1.P1, como se muestra en la figura 23, en donde identificó a las variables como dos elementos distintos, lo cual hizo evidente al trazar líneas de colores para diferenciar entre una y otra variable. Por otro lado, de acuerdo a la entrevista 2, destaca la connotación que el alumno dio a la representación algebraica de la función, con el uso de la literal c para el eje cartesiano x (variable independiente) y con la literal T para el eje cartesiano y (variable dependiente). De la misma forma, el alumno dio muestra que identificó la relación entre las variables, construyendo puntos coordenados con los datos provenientes de la tabla elaborada anteriormente en la vista gráfica de Geogebra.

Figura 21. Resolución del I2.A1.P1.Incf realizado por el CPJSRM

f) Traza la gráfica.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Teniendo como antecedente de análisis las tareas ejecutadas en los puntos 1.1 al 1.4 del I1.A1, y con la guía del punto 1.5 y 1.6 del I1.A1, así como con la ayuda del software Geogebra, los estudiantes diseñaron la representación algebraica de la función del planteamiento 1 del I1.A1, la cual, al ser representada gráficamente en la vista grafica de Geogebra, se trazó como una recta que pasaba por encima de los puntos coordenados representados anteriormente en la misma vista de dicho software. Posteriormente, se les cuestionó a los estudiantes en el I1.A1.P9 sobre las posibles causas por las cuales consideraban que dicha recta pasaba por los puntos coordenados trazados anteriormente.

Las respuestas de los estudiantes al cuestionamiento I1.A1.P9 fueron las siguientes: 13 de ellos, consideraron que dicha recta tan solo fue la unión de los puntos coordenados trazados. Asimismo, 11 alumnos, mencionaron que esta recta representaba la relación entre las variables (puntos obtenidos y aciertos logrados). 9 estudiantes, declararon haber observado la recta continua que se plasmó en la vista gráfica de Geogebra, por lo que consideraron existían otros puntos coordenados que definían a la función, además de los conocidos por medio de los cálculos de la representación tabular. Por otro lado, 7 estudiantes proporcionaron respuestas poco precisas, por lo que no fue posibles categorizarlas. Por último, 7 alumnos no emitieron respuesta alguna.

Al cierre de la A1 del I2, relativa al estudio de la variable independiente y la variable dependiente, se plantea la P2, donde el alumno abordo nuevamente pasó a pasó el análisis de dichas variables en lápiz y papel, transitando entre las distintas representaciones de las mismas. En el I2.A1.P2.Inca se solicitó a los estudiantes que tomando en consideración la información proporcionada en el planteamiento de la pregunta 2, completaran la tabla señalada, en la cual, solo se mostraba un solo elemento del dominio de la función. En el inciso b y c de la misma pregunta, se requería identificaran la variable independiente y dependiente respectivamente, así mismo, en el inciso d y e, los estudiantes determinarían en que eje del plano cartesiano se representaría gráficamente cada variable, dando así, paso al trazo de la representación gráfica de la función en el inciso f.

En cuanto a la resolución por parte del CPYGS del I2.A1.P2, en la figura 24 podemos observar que la estudiante en el inciso a de dicho cuestionamiento, completó los valores faltantes de la tabla indicada de manera correcta. Como consta en la entrevista 1, en la resolución de este inciso destaca como la alumna estableció como puntos de referencia a la literal x, colocándola con el encabezado de la tabla titulado número de revistas, así como, a la literal y, sobre la columna relativa al precio de las mismas. Lo que más tarde le sería útil para identificar a las variables, así como, para establecer el vínculo de las mismas con los ejes cartesianos como preámbulo de su representación gráfica elaborada en el inciso f.

Figura 22. Resolución del I2.A1.P2 realizado por el CPYGS

2. Juan Antonio compró 3 revistas del mismo precio para compartirlas con sus amigos y pagó por ellas $39.00, ¿Cuánto pagará si compra 1, 2, 3, 5, 10 revistas?

a) Completa la tabla

x y

No. Revistas	Precio
1	13
2	26
3	39
5	65
10	130

b) ¿Cuál es la variable independiente?

No. de Revistas

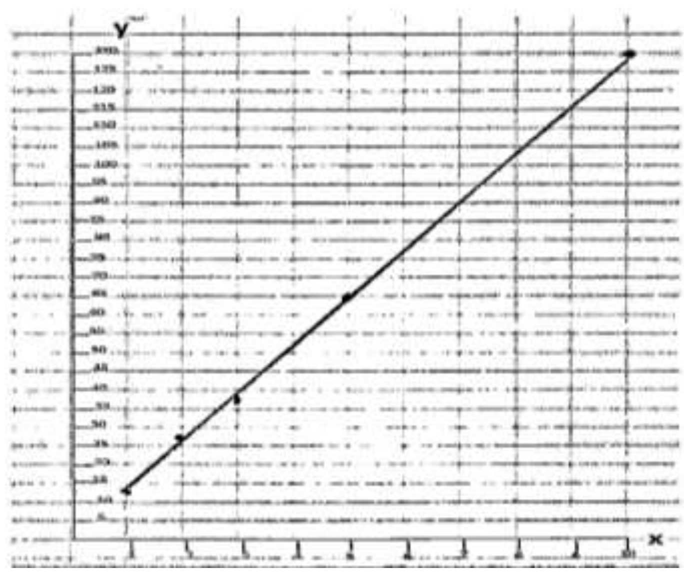
c) ¿Cuál es la variable dependiente?

Precio.

d) ¿En qué eje del plano cartesiano se deben graficar el precio de las revistas? en la y

e) ¿Qué magnitud debe ser graficada en el eje x?

f) Traza la gráfica



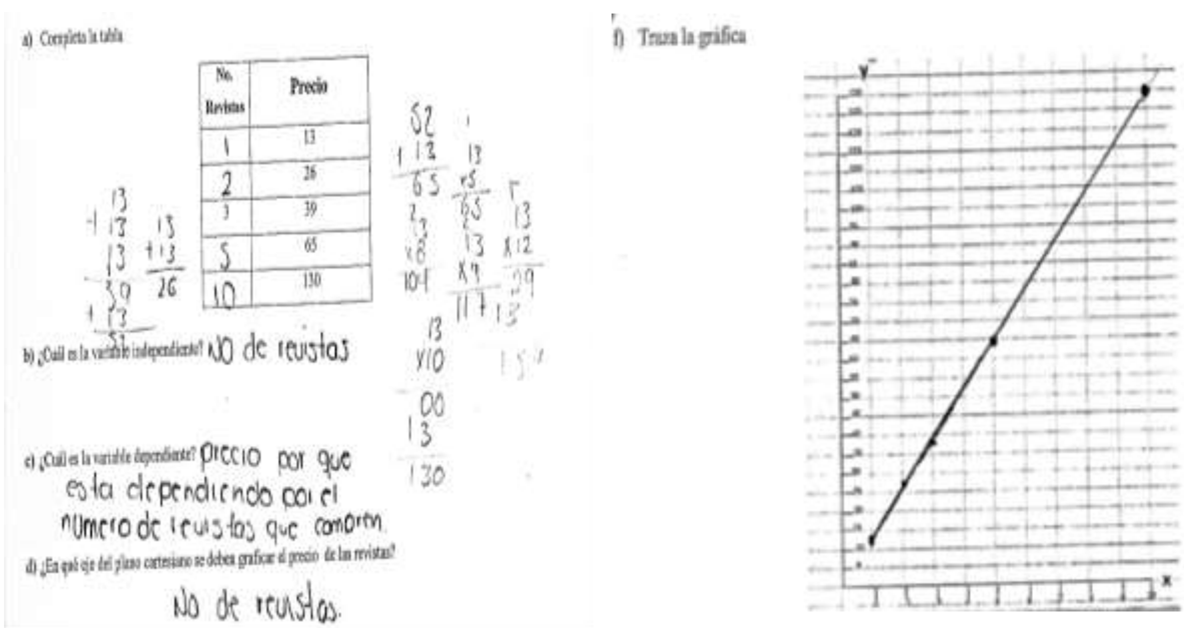
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Por su parte, en la resolución del I2.A1.P2, el CPJSRM, como se observa en la figura 25 completó los valores del dominio de la función en la primera columna de la tabla del inciso a, cuya representación tabular correspondía al número de revistas que se debían comprar para obtener las cantidades contenidas en la segunda columna (codominio de la función), las cuales indicaban el precio de compra de dichos artículos. En la entrevista 2, el alumno declaró, haber realizado sumas progresivas y multiplicaciones sobre el precio de la revista, hasta llegar a los valores señalados en la columna precio.

En el inciso b de la misma pregunta, el estudiante identificó a la variable independiente como el número de revistas que Juan Antonio compró. En el I2.A1.P2.Incc, el CPJSRM consideró que la variable dependiente estaba indicada por el precio, pues este dependía del número de revistas compradas. No obstante, en la resolución del inciso d y e del I2.A1.P2, relativos a la identificación de los ejes cartesiano en los cuales debían ser representadas gráficamente cada una de las variables, las respuestas del alumno no fueron precisas. Sin embargo, en el I2.A1.P2.Incf, se puede observar que el trazo de la representación gráfica de la función lo realizó de manera correcta.

Figura 23. Resolución del I2.A1.P2 realizado por el CPJSRM

2. Juan Antonio compró 3 revistas del mismo precio para compartirlas con sus amigos y pagó por ellas $39.00, ¿Cuánto pagará si compra 1, 2, 3, 5, 10 revistas?



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Para cerrar la A1 del I1 se plantearon dos últimos cuestionamientos, el I1.A1.P10 y el I1.A1.P11, en donde los estudiantes darían muestra de haber o no identificado la variable independiente y la variable dependiente del planteamiento 1 de la A1.I1, así como, de haber comprendido o no, la relación de dependencia entre dichas variables. Por lo que, en el I1.A1.P10 se les cuestionó: ¿Qué variable consideras es dependiente de la otra? Así mismo, se pidió sustentara su respuesta. En cuanto a dichas respuestas, los estudiantes comentaron lo siguiente: 35 de ellos, identificaron que los puntos obtenidos (n), dependían de los aciertos logrados (m), en contra parte, 12 alumnos consideraron que los aciertos logrados (m), dependían de los puntos obtenidos (n).

Al sustentar su respuesta, 17 estudiantes refirieron que la variable que seleccionaron dependía de otra, porque esta, estaba subordinada a otro valor numérico fijado previamente. De la misma forma, 12 alumnos, establecieron que la dependencia de la variable elegida se daba en términos de la existía previa de otra variable. No así, 6 estudiantes consideraron que la variable que eligieron dependía de la otra, porqué la primera representaba el valor de y. 6 jóvenes más, no emitieron respuesta alguna. Así mismo, 6 alumnos consideraron que la variable elegida por ellos dependía de la otra, porqué cuando el valor de una de ellas se modificaba el valor de la otra también lo hacía.

Posteriormente, fue el turno de identificar a la variable independiente, por lo que en el I1.A1.P11, se les cuestionó a los estudiantes, ¿Que variable consideras es independiente de la otra? Así mismo, se solicitó sustentaran su respuesta. De tal modo, que 37 alumnos en su respuesta, consideraron que la variable independiente comprendía a los aciertos logrados, representados algebraicamente por la literal m, mientras que, 10 alumnos establecieron que la variable independiente eran los puntos obtenidos, representados algebraicamente por la literal n. Al explicar su respuesta, los estudiantes comentaron lo siguiente: 13 de ellos, eligieron a una variable como independiente por considerar, esta representaba una cantidad que no se modificaba.

De la misma forma, 7 estudiantes concluyeron que el valor de la variable seleccionada por ellos como variable independiente, existía sin necesidad de tener otro número. 7 alumnos, consideraron que la variable independiente adoptaba distintos valores. Por otro lado, 6 estudiantes, no emitieron respuesta. No así, 3 alumnos, estimaron que el valor de la variable independiente no se veía afectado si la otra variable cambiaba de valor. 3 jóvenes, opinaron que la variable independiente es el valor de x. También, 3 jóvenes, estimaron que la variable independiente es el valor de y. 2

juzgaron que dicha variable no necesita de nadie. Otro grupo de 2 estudiantes reflexionaron sobre que la variable en cuestión dependía de ella misma. Finalmente, un alumno conceptuó a la variable independiente como la que se determina a sí misma.

4.3 Pendiente y ordenada al origen

En esta sección se describe cómo el alumno de Bachillerato determinó la pendiente y la ordenada al origen en una función lineal. En cuanto a la información que se muestra con respecto a la pendiente, esta fue recaba a través de la aplicación del I1.A2, el cual se llevó a cabo en el ambiente de Geogebra. También, se considera información del I2.A2, donde los estudiantes emplearon para la resolución del mismo, lápiz y papel. Por otro lado, se examina la ordenada al origen. La información presentada respecto a dicho elemento de la función lineal, proviene del I1.A3, que como se mencionó anteriormente, se auxilia de la herramienta Geogebra. También, se muestra información proveniente de la aplicación del I2.A3 ejecutado por los estudiantes en lápiz y papel.

En la aplicación de los instrumentos, el estudio de la pendiente por parte de los estudiantes inició con el punto 2.1 del I1.A2, el cuál retoma al punto 1.6 del I1.A1, en donde los alumnos con ayuda del software Geogebra, trazaron la recta que representaba gráficamente a la función establecida verbalmente en el planteamiento 1 del I1.A1. Por su parte, el punto 2.1 del I1.A2, guío a los alumnos en el trazó gráfico de la pendiente de la recta, en la vista gráfica de Geogebra. En la ejecución de dicha tarea, se mantuvieron visibles la vista algebraica y la vista tabular de dicho software. Las cuales, al estar vinculadas automáticamente reflejaron simultáneamente las modificaciones en los parámetros de la función que los estudiantes manipularon en la vista gráfica.

De tal forma, que en el I1.A2.P1 se pidió a los alumnos trazaran la pendiente de la recta con ayuda de Geogebra. Posteriormente, observaran lo sucedido en las tres vistas de dicho software. Así mismo, expresaran que cambios notaron en dichas vistas al elegir la opción pendiente. Al respecto, los estudiantes expresaron lo siguiente: 8 de ellos, notaron marcarse un punto de referencia en la gráfica. 8 más, refirieron se mostraba la coordenada (1,5) donde el valor de $s = 5$. Asimismo, 6 estudiantes observaron el trazó de un área sombreada. No así, 5 alumnos no lograron detectar los cambios que se reflejaron en las vistas de Geogebra. Por otro lado, un grupo conformado por 4 jóvenes, notaron que las medidas eran iguales en las tres vistas. Probablemente, refiriéndose a los parámetros de la función reflejados en las distintas representaciones de la función lineal.

De la misma forma, 4 alumnos notaron el valor de pendiente representado en la vista gráfica, pues establecieron que $s = 5$. Un grupo conformado por 3 estudiantes, consideró que las medidas estaban conectadas, refiriéndose probablemente a los valores numéricos de la función representados en las tres vistas. 2 alumnos, declararon haber observado las coordenadas de la pendiente, aunque no refirieron específicamente en cuál o cuáles de las vistas se reflejaba el hecho mencionado. 2 más, mencionaron que las coordenadas del área eran los mismos números que se observaban en la vista algebraica donde apareció s. Asimismo, 2 estudiantes, notaron se marcaba un ángulo, refiriéndose evidentemente a la vista gráfica. 2 alumnos, plantearon la representación del valor de n, en el eje y. Finalmente, un estudiante declaró que los valores se relacionaban, pues el valor 5 estaba presente en las tres vistas.

Una vez que los estudiantes reflexionaron sobre la representación de la pendiente en las tres vistas presentes en Geogebra, se procedió al análisis de dicho elemento de la función lineal desde la representación verbal, por lo que se retomaron los datos del planteamiento 1 del I1.A1. Es así, que en el cuestionamiento I1.A2.P3, se les solicitó a los alumnos observaran nuevamente las tres vistas de dicho software e interpretaran el significado de la representación gráfica de la pendiente, referida como un área sombreada.

De tal forma que, 18 alumnos interpretaron a dicha área, como un punto coordenado en donde $x = 1$ y $y = 5$. De igual manera, 12 estudiantes, consideraron que el área en cuestión, indicaba un punto coordenado. Asimismo, 7 alumnos, estimaron que el área sombreada con respecto al eje x, se refería a los aciertos logrados, mientras que la misma área con respecto al eje y, representaba los puntos obtenidos. No obstante, 5 estudiantes, al observar la representación gráfica de la pendiente reflexionaron sobre la relación de dependencia entre las variables, estableciendo que tanto los aciertos logrados como los puntos obtenidos sufrían un aumento. Por otro lado, 5 alumnos no emitieron respuesta.

En el punto 2.2 del I1.A2 se guío a los estudiantes para que con ayuda de Geogebra trazaran la pendiente de la recta de manera diferente a un área sombreada, esta vez como un ángulo. Lo que permitió que en el punto 2.3 del mismo instrumento y de la misma actividad, se graficara la pendiente como un ángulo presente en cada uno de los puntos coordenados visibles dentro de la recta que representaba gráficamente a la función. Dicha tarea, tuvo como propósito que los estudiantes observaran y reflexionaran sobre el valor constante de la pendiente, como un factor determinante para la inclinación de la recta.

En el cuestionamiento I1.A2.P6, se pidió a los alumnos observaran la vista gráfica de Geogebra, analizaran los valores numéricos que acompañaban a los ángulos trazados y consideraran los datos del planteamiento 1 I1.A1. Posteriormente, establecieran su interpretación de la gráfica trazada en los puntos 2.2 y 2.3 del I1.A2. Al respecto, los estudiantes comentaron lo siguiente: 25 de ellos, centraron su atención en la magnitud de los ángulos, considerando que dichos ángulos son iguales pues miden lo mismo. Por otro lado, 12 alumnos, establecieron que cada ángulo representaba el aumento constante de las variables. En contraste, 5 estudiantes no establecieron respuesta alguna. No así, 5 alumnos mencionaron que cada punto coordenado representado en la gráfica tenía un mismo ángulo.

En la ejecución de la tarea del punto 2.4 del I1.A2, los estudiantes analizaron el incremento y decremento del valor numérico de la pendiente. Para lograr lo anterior, el alumno de manera independiente trabajó bajo el mismo esquema del planteamiento 1 del I1.A1, donde el número de aciertos logrados estaba representado la literal m y el número de puntos obtenidos por la literal n. A diferencia del planteamiento 1 del I1.A1, donde solo se abordaba un caso, en la tarea encomendada en el punto 2.4 del I1.A2, se plantearon 3 casos distintos, otorgando diferente valor numérico a los puntos obtenidos por acierto logrado. Bajo los nuevos lineamientos los estudiantes debían construir en el ambiente de Geogebra, la representación, tabular, gráfica y algebraica de cada uno de los casos señalado.

Una vez ejecutada por parte de los estudiantes la tarea señalada en el punto 2.4 del I1.A2, se dio paso al cuestionamiento I1.A2.P8, solicitando a los alumnos, concluyeran que recta tenía una mayor pendiente. Además, mencionaran que indicios los llevaron a establecer dicha conclusión. Al respecto, los estudiantes concluyeron lo siguiente: 23 de ellos, mencionaron que la recta que poseía la mayor pendiente, era aquella cuya área sombreada media 20, pues dicho valor numérico era mayor a los otros 2 valores numéricos fijados para los otros casos. De la misma forma, 15 alumnos, también consideraron que la recta con mayor pendiente era aquella cuya área sombreada media 20, sustentaron su respuesta, sosteniendo que dicha recta era la que se observaba más inclinada.

Así mismo, 6 alumnos, consideraron no tener respuesta alguna para la interrogante. Mientras que 3, mencionaron que la recta de mayor pendiente, era aquella cuya área sombreada media 2, pues opinaban, esta era la que se observaba más inclinada. En la categorización de las respuestas para la interrogante I1.A2.P8, destaco el hecho de que todos los estudiantes, aun cuando trabajaron en las tres vistas de Geogebra, recurrieron a la representación gráfica de la función para sustentar su respuesta.

En el I2.A2, los estudiantes también analizaron el incremento y/o decremento del valor numérico de la pendiente fuera del ambiente de Geogebra, haciendo uso de lápiz y papel. En el I2.A2.P3.Inca los alumnos trabajaron con 2 funciones lineales, expresadas algebraicamente. Posteriormente, les fueron proporcionadas 2 tablas, una por cada función, de tal forma, que considerando el dominio señalado dentro de las mismas y siguiendo la regla de correspondencia fijada por las expresiones algebraicas, los estudiantes debían completar dichas tablas con los valores numéricos correspondientes al codominio de la función. Como se muestra en la figura 28, y en concordancia con la entrevista 1, en la resolución de dicho cuestionamiento el CPYGS, identificó sin problema la regla de correspondencia que establecía cada una de las funciones. Así mismo, mostró un buen manejo de las operaciones matemáticas con fracciones, logrando establecer el codominio de la función de manera correcta.

Figura 24. Resolución del I2.A1.P3.Inca realizado por el CPYGS

3. Realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las tablas.

$f(x) = -\frac{1}{3}x$

x	$f(x)$
3	$-\frac{1}{3}(\frac{3}{1}) = -\frac{3}{3} = -1$
2	$-\frac{1}{3}(\frac{2}{1}) = \frac{-2}{3}$
1	$-\frac{1}{3}(\frac{1}{1}) = \frac{-1}{3}$
0	$-\frac{1}{3}(\frac{0}{1}) = \frac{-0}{3}$
-1	$-\frac{1}{3}(\frac{-1}{1}) = \frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{3}(\frac{-2}{1}) = \frac{2}{3}$
-3	$-\frac{1}{3}(\frac{-3}{1}) = \frac{3}{3} = 1$

$f(x) = 3x$

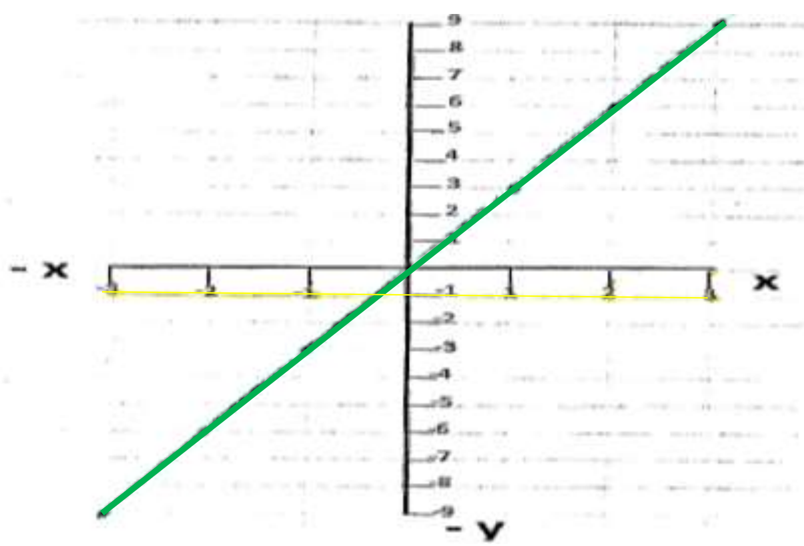
x	$f(x)$
3	$3(3) = 9$
2	$3(2) = 6$
1	$3(1) = 3$
0	$3(0) = 0$
-1	$3(-1) = -3$
-2	$3(-2) = -6$
-3	$3(-3) = -9$

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Posteriormente, fue momento de representar gráficamente las funciones lineales señaladas. De tal forma, en el I2.A2.P3.Incb, los estudiantes trazaron en un mismo plano cartesiano las rectas que representaban a cada una de dichas funciones. El CPYGS, después de haber determinado el dominio y codominio de la función reflejado en la representación tabular de la misma, estructuró puntos coordenados, cuyo trazo es fácilmente visible en la figura 29. Siguiendo dicha línea de puntos la estudiante representó adecuadamente la recta con pendiente positiva y valor numérico entero ($f(x) = 3x$), la cual se muestra en la figura 29 de color verde. Por otro lado, el CPYGS según expresó en la entrevista 1, tuvo dificultades al graficar puntos coordenados con fracciones, lo que la limitó en el trazo de la recta con pendiente negativa y fraccionaria ($f(x) = -\frac{1}{3}x$), representada de color amarillo en la figura antes señalada.

Figura 25. Resolución del I2.A1.P3.Incb realizado por el CPYGS

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $f(x) = -1/3x$ con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función $f(x) = 3x$. Posteriormente, indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.



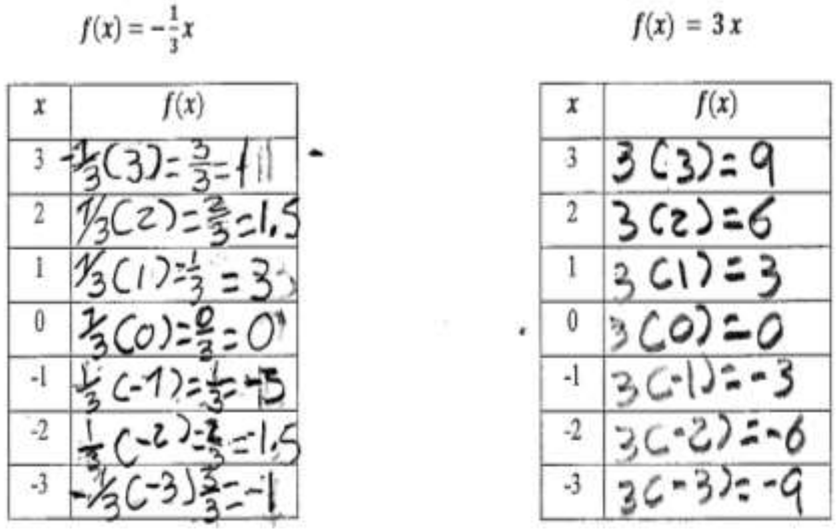
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Por otro lado, en la resolución del I2.A1.P3.Inca, por parte del CPJSRM, el estudiante determinó de manera correcta los valores que representaban al codominio de cada una de las funciones señaladas. Sin embargo, en la entrevista 2, el alumno declaró que al tratar de representar los números fraccionarios pertenecientes al codominio de la función $f(x) = -\frac{1}{3}x$ en el plano cartesiano, tuvo dificultades, por lo que regresó a la representación tabular de la misma y convirtió los valores fraccionarios en números decimales, hecho que tuvo repercusiones en la representación gráfica de dicha función. En cuanto a la función lineal $f(x) = -3x$, el alumno calculó el codominio de la función de manera correcta y sin mayor problema.

Figura 26. Resolución del I2.A1.P3.Inca realizado por el CPJSRM

3. Realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las tablas.



$f(x) = -\frac{1}{3}x$

x	$f(x)$
3	$-\frac{1}{3}(3) = \frac{3}{3} = -1$
2	$\frac{1}{3}(2) = \frac{2}{3} = 1.5$
1	$\frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3} = 3$
0	$\frac{1}{3}(0) = \frac{0}{3} = 0$
-1	$\frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{3} = -5$
-2	$\frac{1}{3}(-2) = \frac{2}{3} = -1.5$
-3	$-\frac{1}{3}(-3) \frac{3}{3} = -1$

$f(x) = 3x$

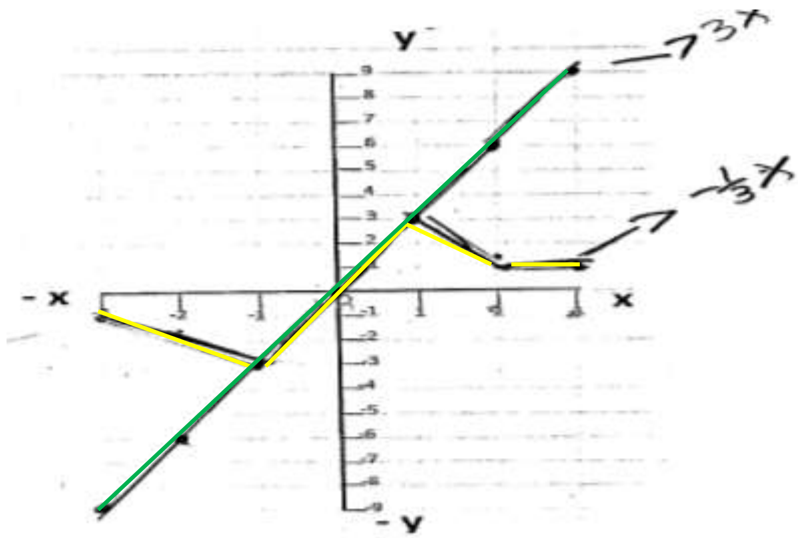
x	$f(x)$
3	3(3) = 9
2	3(2) = 6
1	3(1) = 3
0	3(0) = 0
-1	3(-1) = -3
-2	3(-2) = -6
-3	3(-3) = -9

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

En la representación gráfica de las funciones $f(x) = -\frac{1}{3}x$ y $f(x) = -3x$, solicitada en el I2.A2.P3.Incb, el CPJSRM gráfico correctamente la segunda de dichas funciones ($f(x) = -3x$). La cual, contaba con pendiente positiva y valor numérico entero. El trazo de dicha recta se observa en la figura 31, con la línea de color verde. Por otro lado, en la representación gráfica de la primera función $f(x) = -\frac{1}{3}x$, con pendiente negativa y fraccionaria, el estudiante inició por trazar el primer y último punto coordenado formado por el dominio y codominio de la función. Sin embargo, en la entrevista 2, el alumno declaró haber tenido dificultades para ubicar en el plano cartesiano, los puntos coordenados que contenían valores numéricos fraccionarios. Hecho que se evidencia en la figura 31, con la línea poligonal de color amarillo, donde dicha línea pierde el carácter continuo que distingue a la típica representación gráfica de una función lineal.

Figura 27. Resolución del I2.A1.P3.Incb realizado por el CPJSRM

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $-1/3x$ con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función $-3x$. Posteriormente, indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Posteriormente, en el I1.A2.P9, basándose en lo experimentado en la ejecución de las tareas realizadas en los puntos 2.1 al 2.4 del I1.A2, los alumnos expresaron con sus propias palabras lo que ellos consideraban era la pendiente. Al respecto 12 estudiantes, comentaron que la pendiente era un área sombreada, 9, consideraron no tener los elementos necesarios para emitir una opinión sobre lo solicitado, 6, identificaron a la pendiente como la inclinación de la recta, 6, establecieron que dicho elemento de la función lineal era un ángulo medible en grados, 6, establecieron que la pendiente era ángulo de la recta que inicia en sus puntos coordenados, 4, estimaron que la pendiente era un triángulo y 4, juzgaron que la pendiente es la recta que se dibuja al introducir valores en la vista algebraica.

Con el propósito de analizar el carácter negativo y positivo de la pendiente, se introdujo el planteamiento 2: El profesor ha decidido disminuir la calificación de los estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra. De tal forma que: la literal r, representaba a los aciertos logrados y la literal s, a los puntos disminuidos. En el punto 2.5 del I1.A2 se pidió a los estudiantes que atendiendo a los parámetros fijados por el planteamiento 2, construyeran con la ayuda del software Geogebra, la representación tabular, gráfica y algebraica de dicho planteamiento. Posteriormente, en el punto 2.6 del I1.A2, los estudiantes introducirían en las 3 vistas de Geogebra los datos necesarios para representar nuevamente al planteamiento 1 del I1.A1. Lo anterior, con el propósito de realizar un análisis comparativo de ambos planteamientos.

Una vez concluidas las tareas asignadas en los puntos 2.5 y 2.6 del I1.A2, en los cuestionamientos del I1.A2.P11 al I1.A2.P15, los estudiantes compararon y analizaron las distintas representaciones de ambos planteamiento. Dicha comparación, inició en I1.A2.P11 con la representación algebraica de la función. Donde, los estudiantes comentaron al respecto lo siguiente: 35 de ellos, consideraron que la diferencia entre las representaciones algebraicas de ambos planteamientos, era el uso del número 5 para la expresión algebraica del planteamiento 1, y -5 para la expresión algebraica del planteamiento 2. Por otro lado, 10 estudiantes mencionaron que la diferencia radicaba en el signo que acompañaba al 5 dentro de la representación algebraica de dichos planteamientos. Así mismo, un estudiante, no notó diferencias entre ambas expresiones algebraicas y un alumno más, no estableció respuesta alguna.

El segundo referente de análisis fue la representación en la vista gráfica de Geogebra del planteamiento 1 del I1.A1 y la representación del planteamiento 2 del I1.A2. De acuerdo al cuestionamiento I1.A2.P12, los estudiantes debían expresar las diferencias que notaron en la representación gráfica de dichos planteamientos. Las opiniones de los alumnos al respecto, fueron las siguientes: 22 de ellos, notaron diferenciación con respecto al área sombreada y/o ángulo de cada recta. 12 estudiante, establecieron que la principal diferencia radicaba en la dirección de cada una de las rectas. Así mismo, 10 alumnos, identificaron que cada recta con su respectiva pendiente pasaban por distintos cuadrantes. Mientras que 3 jóvenes, no expresaran respuesta alguna.

Continuando con el análisis de la representación gráfica de la pendiente, se pidió a los estudiantes observaran las rectas trazadas con ayuda del software Geogebra, de acuerdo a las tareas solicitadas en los puntos 2.5 y 2.6 del I1.A2. Posteriormente, en el cuestionamiento I1.A2.P14 de acuerdo a lo observado y lo ejecutado en tareas anteriores por parte de los estudiantes, se solicitó determinaran por cuales cuadrantes del plano cartesiano pasaba la recta que representaba gráficamente al planteamiento 1 del I1.A2. Los comentarios de los estudiantes al respecto de dicho cuestionamiento fueron los siguientes: 21 de ellos, expresaron no conocer que nombre recibe cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano.

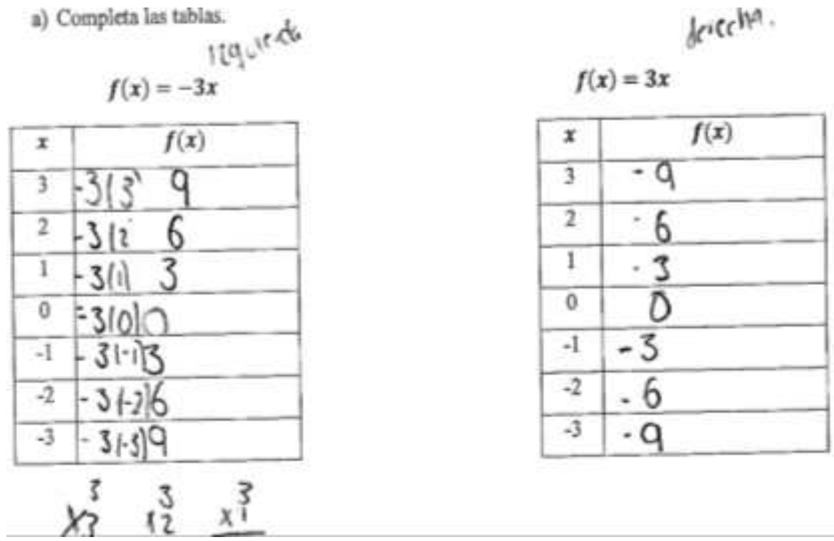
Mientras que, 19 alumnos, determinaron que la recta del planteamiento 1, pasaba por los cuadrantes I y III. De la misma forma, 7 estudiantes, no emitieron respuesta alguna. Del mismo modo, llegó el turno del I1.A2.P15, el cual pedía a los estudiantes refirieran porque cuadrantes del plano cartesiano pasaba la representación gráfica del planteamiento 2 del I1.A2, a lo que los alumnos respondieron de la siguiente manera: 21 de ellos, expresaron no conocer el nombre de cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano, Mientras que 19 estudiantes, consideraron que la recta que representaba gráficamente al planteamiento 2 del I1.A2, pasaba por los cuadrantes II y IV. Así mismo, 7 no emitieron respuesta alguna.

En el I2.A2 los estudiantes también analizaron a la pendiente considerando el valor numérico positivo o negativo de dicho elemento de la función lineal. El análisis de la pendiente por parte de los alumnos se llevó a cabo a través del uso de lápiz y papel, fuera del ambiente de Geogebra. En el I2.A2.P4 los alumnos transitaron entre las distas representaciones de la función, iniciando con el análisis de expresiones algebraicas de funciones lineales, que más tarde se encargarían de representarlas en forma tabular y gráfica. El I2.A2.P4.Inca mostró dos funciones lineales la primera de ellas $f(x) = -3$, la segunda $f(x) = 3$.

De tal modo que los estudiantes considerando el dominio de la función de -3 a 3, fijado por el instrumento, debían calcular el codominio de dicha función. En la figura 32 se observa el proceso cognitivo seguido por el CPYGS, al dar respuesta al cuestionamiento I2.A2.P4.Inca. Asimismo, en la entrevista 1, la alumna mostró haber ignorado algunas reglas de las leyes de los signos que debían ser aplicadas en cálculo aritmético del codominio de la función. Situación que más tarde repercutiría en la elaboración de la representación gráfica de las funciones señaladas. Sin embargo, un hecho que llamó la atención, fue que la estudiante identificó a cada función con una palabra. $f(x) = -3$, la relacionó con la palabra izquierda y a $f(x) = 3$, con la palabra derecha.

Figura 28. Resolución del I2.A2.P4.Inca realizado por el CPYGS

4. Con cada una de las funciones lineales que se muestran a continuación, realiza las actividades que se te piden.


a) Completa las tablas.

izquierda

$f(x) = -3x$

x	$f(x)$
3	-3(3 9
2	-3(2 6
1	-3(1) 3
0	-3(0) 0
-1	-3(-1) 3
-2	-3(-2) 6
-3	-3(-3) 9

derecha.

$f(x) = 3x$

x	$f(x)$
3	-9
2	-6
1	-3
0	0
-1	-3
-2	-6
-3	-9

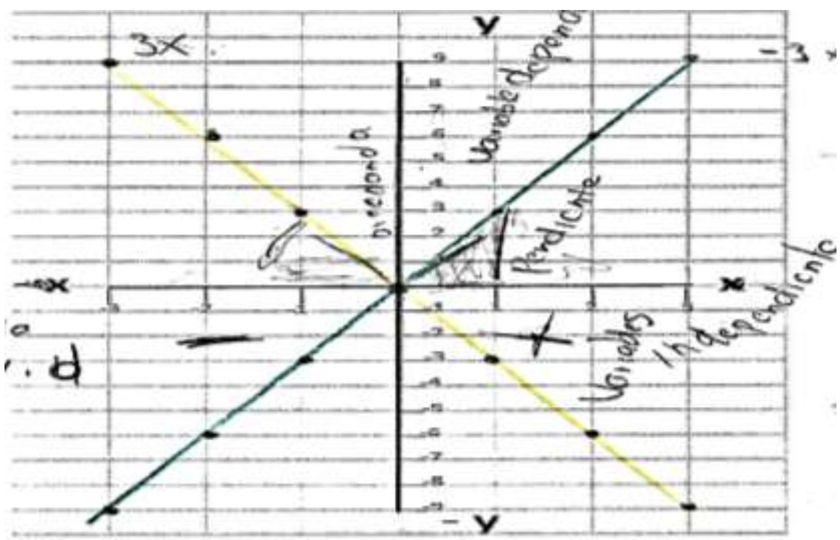
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

En el I2.A2.P4.Incb se solicitó a los estudiantes elaboraran la representación gráfica de las siguientes funciones: $f(x) = -3$ y $f(x) = 3$. Donde la primera de ellas debía ser traza de color amarillo y la segunda de color verde, así mismo, los alumnos debían indicar gráficamente la pendiente de cada recta dentro del mismo plano cartesiano, pudiendo elegir para dicha representación entre el trazo de un ángulo de inclinación o un área sombreada, sin olvidar señalar el valor numérico de dicho elemento de la función lineal. Como se observa en la figura 33, el CPYGS, trazó las rectas que representaban a cada función, con su respectiva línea de puntos, apegándose a las instrucciones indicadas por el cuestionamiento. La alumna señaló en el lado izquierdo del plano cartesiano el signo menos, mientras que en el lado derecho colocó el signo más.

Lo anterior, se relaciona con las anotaciones que previamente había realizado sobre las tablas del I2.A2.P4.Inca. Así mismo, en la entrevista 1, la estudiante declaró haber identificado a cada recta de acuerdo a los colores señalados (de color amarillo $f(x) = -3$ y de color verde $f(x) = 3$). Prosiguiendo con la resolución I2.A2.P4.Incb, el CPYGS representó a la pendiente como un área sombreada, sin embargo, no indicó el valor numérico de dicho elemento de la función lineal. Por otro lado, es importante mencionar que dentro del plano cartesiano proporcionado, la alumna tomó como puntos de referencia a la representación gráfica de las variables, así como a la ordenada al origen (elemento que para ese momento que ya había sido estudiando en el I1). Finalmente, la estudiante colocó las expresiones algebraicas de las funciones ($f(x) = -3$ y $f(x) = 3$) en la parte superior de cada recta, sin embargo, dicha asignación la realizó de forma invertida.

Figura 29. Resolución del I2.A2.P4.Incb realizado por el CPYGS

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función -$3x$ con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función $3x$. Posteriormente indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Por otro lado, en la figura 34, se observa el proceso cognitivo que siguió el CPJSRM, en la resolución del I2.A2.P4.Inca. De acuerdo a lo declarado por el estudiante en la entrevista 2; en la representación tabular de las funciones lineales: $f(x) = -3$ y $f(x) = 3$, el alumno completó las tablas considerando a la relación de dependencia entre las variables (reflejada en la representación algebraica de dichas funciones), como una simple fórmula en donde se debían sustituir valores, lo que evidenció que el estudiante no había identificado hasta ese momento la relevancia de la variable independiente (dominio) para la determinación de los valores que integran al conjunto que representa a la variable dependiente (codominio).

Figura 30. Resolución del I2.A2.P4.Inca realizado por el CPJSRM

4. Con cada una de las funciones lineales que se muestran a continuación, realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las tablas.

$f(x) = -3x$

x	$f(x)$
3	(x)=-3x3
2	(x)=-3x2
1	(x)=-3x1
0	(x)=-3x0
-1	(x)=-3x-1
-2	(x)=-3x-2
-3	(x)=-3x-3

$f(x) = 3x$

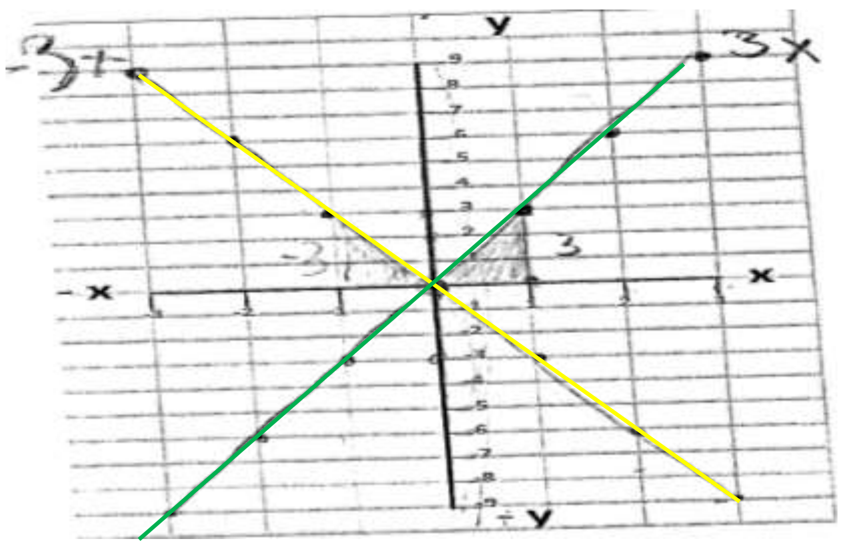
x	$f(x)$
3	x=3x3
2	x=3x2
1	x=3x1
0	x=3x0
-1	x=3x-1
-2	x=3x-2
-3	x=3x-3

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Con respecto a la representación gráfica de las funciones lineales: $(x) = -3$ y $f(x) = 3$, que los estudiantes debían trazar de acuerdo a los requerimientos del cuestionamiento I2.A2.P4. El CPJSRM en la entrevista 2, declaró haber llevado a cabo el siguiente proceso: primero, indicó en el plano cartesiano los puntos coordenados por donde pasarían las líneas que presentaban a cada función. Posteriormente, trazó cada recta con el color indicado en las instrucciones antes señaladas (de color amarillo $f(x) = -3$ y de color verde $f(x) = 3$). En cuanto al trazó de la pendiente. el estudiante representó a este elemento de la función lineal como un área sombreada, propia de cada una de las rectas presentes en el plano cartesiano. Así mismo, indicó el valor numérico de cada área sombreada. Del mismo modo, a la recta de color amarillo que pasaba por el cuadrante II y IV, la nombró con la expresión algebraica $f(x) = -3$, mientras que la que pasó por los cuadrantes I y III con la expresión algebraica $f(x) = 3$.

Figura 31. Resolución del I2.A2.P4.Incb realizado por el CPJSRM

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función -$3x$ con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función $3x$. Posteriormente indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Por otra parte, la ordenada al origen es el segundo elemento de la función lineal que ocupa al presente apartado. Por lo que, de aquí en adelante, se describirá cómo el alumno de Bachillerato determinó la ordenada al origen en dicha función. Para llevar a cabo dicho cometido, se recopiló información proveniente de tareas ejecutadas por los estudiantes, a través de la resolución de 2 instrumentos de recolección de información. El primero de ellos, el I1, el cual, se desarrolló en la interfaz de Geogebra. Con la ayuda de dicho software, en la A3 del I1, titulada ordenada al origen, la cual comprendió 3 planteamientos y 10 cuestionamientos, se guío a los estudiantes en la ejecución de distintas tareas, las cuales, se esperaba les permitieran analizar dicho elemento de la función lineal en sus distintas representaciones.

En un segundo momento se aplicó el I2, con el uso de lápiz y papel. En la A3 de dicho instrumento, la cual incluía un solo planteamiento y un solo cuestionamiento (este último dividido en 2 incisos), los estudiantes trabajaron con la ordenada al origen, transitando entre sus distintas representaciones y reflexionando sobre los cambios en sus parámetros. Regresando con la aplicación del I1.A3, esta inició con el planteamiento 3, el cual mencionaba lo siguiente: un grupo de estudiantes de primer grado de preparatoria reciben 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado correctamente en su examen de álgebra. El día que se realiza dicho examen todos los alumnos llegaron tarde, por lo que el profesor los reprende quitándoles 5 puntos.

Para un mejor manejo de los datos, el número de aciertos logrados se representaron por la literal o y el número de puntos obtenidos por la literal p. Luego se analizó la información con ayuda del software Geogebra. Una vez analizada la representación verbal de la función expuesta en el planteamiento 3, correspondía a los estudiantes realizar la tarea indicada en el punto 3.1 del I1.A3, la cual solicitaba la elaboración de una tabla, una lista de puntos con su respectiva recta, así como, representar la pendiente como un área y como un ángulo. En dicho punto también se establecía el dominio de la función, el cual comprendía un rango de 0 a 6. Así pues, terminando la tarea encomendada, se dio paso al cuestionamiento del I1.A3.P1.

En dicho cuestionamiento se preguntaba a los alumnos sobre la manera en que consideraron la diminución de los 5 puntos en la representación tabular de la función, tomando en cuenta que de acuerdo al planteamiento 3, el profesor disminuiría dicha cantidad de puntos, de la calificación de sus alumnos. Al respecto, los estudiantes enunciaron las siguientes respuestas: 21 alumnos mencionaron haber incluido dicha disminución en la columna p, que representaba los puntos obtenidos por los estudiantes, cambiando el valor de 5 por el valor -5. Otros 19 estudiantes, declararon que en la columna p, restaron 5 a todos los valores de dicha columna. Por otro lado, 7 alumnos afirmaron no contar con los elementos de reflexión necesarios para saber cómo incluir dicha disminución en la tabla correspondiente.

El análisis de la representación algebraica del planteamiento 3 por parte de los estudiantes, tuvo lugar en el cuestionamiento I1.A3.P2, donde se les solicitaba a los alumnos expresaran como incluyeron la disminución de los 5 puntos mencionados en dicho planteamiento en el diseño de la expresión algebraica de la función. De tal forma, que los estudiantes expresaron lo siguiente: 21 de ellos mencionaron haber cambiado en la fórmula el valor de 5 por -5. Por su parte, otro grupo integrado por 19 alumnos, refirieron haber restado 5 al monomio $5x$. Así mismo, 7 estudiantes consideraron no tener los suficientes elementos de reflexión para poder incluir la disminución de los 5 puntos en el diseño de la representación algebraica de la función en cuestión.

El estudio de la representación gráfica del planteamiento 3 por parte de los estudiantes, tuvo lugar en el cuestionamiento I1.A3.P3, donde se les pidió a los alumnos, observaran la gráfica elaborada en el punto 3.1 del I1.A3 y posteriormente expresaran qué cambios habían notado en dicha gráfica con respecto a las gráficas trazadas en apartados anteriores. Al responder dicha interrogante, algunos estudiantes expresaron más de una idea, siendo las siguientes las más citadas por ellos: con 21 menciones, la opinión más aludida fue con respecto a la ubicación de la pendiente en el cuadrante IV. La siguiente idea más nombrada con 19 menciones fue relativa a la recta, considerando que esta, no pasa por el centro del plano cartesiano. De la misma forma, con 10 menciones la siguiente idea señalada refirió, que la recta tocaba al eje y en $(0, -5)$. También con 10 menciones se posicionó la idea: la recta tiene un valor negativo (-5). Finalmente, 5 alumnos no emitieron respuesta.

En el planteamiento 3, el estudiante trabajó la ordenada al origen con valor negativo, es decir, la recta que representaba gráficamente a dicho planteamiento, se intersecto con el eje y en -5, valor numérico que indicaba la diminución que realizó el profesor sobre los puntos obtenidos por los alumnos que llegaron tarde al examen. Por otra parte, siguiendo con el desarrollo del I1.A3, se introdujo el planteamiento 4, donde en contraste, los estudiantes ejecutarían tareas considerando una ordenada al origen con valor positivo. Dicho planteamiento establecía lo siguiente: el profesor ha decidido disminuir la calificación de los estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra. Sin embargo, les otorga 5 puntos por llegar puntualmente al examen.

Para un mejor manejo de los datos señalados en el planteamiento 4, el número de aciertos logrados se representó con la literal o y el número de puntos obtenidos con la literal p. Subsecuentemente, en el punto 3.2 del I1.A3, considerando lo establecido por el planteamiento en cuestión, se pidió a los estudiantes construyeran una tabla con su respectiva lista de puntos, diseñaran la expresión algebraica que representaba a la función y graficaran la pendiente como un área y como un ángulo. Así mismo, se fijó como dominio de la función un intervalo de 0 a 6. Una vez ejecutada la tarea establecida en el punto 3.2 del I1.A3, se dio paso a 3 cuestionamientos que se pretendía favorecieran el análisis de las representaciones elaboradas por parte de los estudiantes con la ayuda del software Geogebra.

Acto seguido, se dio lugar al cuestionamiento I1.A3.P4, donde se interrogó a los estudiantes acerca de cómo incluyeron en la tabla construida, el aumento de los 5 puntos otorgados por el profesor a los estudiantes que llegar puntualmente al examen. Los comentarios de los alumnos al respecto de dicha interrogante fueron: 21 de ellos, señalaron haber cambiado el valor -5 por 5 en la columna p (puntos obtenidos). 19 expresaron haber sumado 5 a todos los valores de la columna p. Mientras que 7 consideraron no contar con los elementos de análisis necesarios para ejecutar la tarea solicitada.

La siguiente referencia de análisis por parte de los estudiantes se dirigió a la representación algebraica del planeamiento 4 del I1.A3, donde en el cuestionamiento I1.A3.P5, se solicitó a los alumnos establecieran, cómo incluyeron el aumento de los 5 puntos en el diseño de la expresión algebraica de la función. Las opiniones de los estudiantes al respecto de dicho cuestionamiento, reflejaron lo siguiente: 21 alumnos, mencionaron haber cambiado el valor de -5 por 5, en lo que ellos consideraban era una fórmula. Mientras que, 19 señalaron haber sumado 5 a la expresión $-5x$. Finalmente, 7 estudiantes, considerando no saber cómo ejecutar la tarea señalada.

Avanzando en el análisis de la ordenada al origen, en el cuestionamiento I1.A3.P6, se solicitó a los estudiantes observaran y compararan la gráfica elaborada en el punto 3.2 del I1.A3, la cual contaba con un valor numérico negativo para el elemento de la función lineal en cuestión, con la gráfica realizada en el punto 3.1 del I1.A3, donde la ordenada al origen fue un valor numérico positivo. Posteriormente, señalaran que cambios notaron en la segunda representación gráfica con respecto a la primera. Los estudiantes expresaron sus opiniones, algunos de ellos, con 2 o más ideas centrales. Entre las más mencionadas se encuentran las siguientes: la pendiente está en el cuadrante I, con 21 menciones, luego, con 10 señalamientos, la recta toca al eje y en $(0,5)$. También, con 10 menciones los alumnos se refirieron a la dirección de la recta. 5 estudiantes, comentaron haber observado que la recta pasaba por los cuadrantes II y IV. 5 alumnos no emitieron respuesta.

El análisis comparativo también fue considerado en el diseño del planteamiento 5 del I1.A3, donde, se presentaron a los estudiantes 3 escenarios. En el primero de ellos, el profesor señalado en el planteamiento en cuestión, disminuiría la calificación de sus estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra, sin embargo, les otorgaría 5 puntos extras a los alumnos que tuviesen hasta 5 inasistencias durante el curso.

Considerando, también la disminución de 5 puntos por cada pregunta contestada de forma incorrecta, se expuso el segundo y tercer escenario, donde los estudiantes recibirían 30 puntos extras a los que solo faltaron una vez y 50 puntos a los que nunca faltaron.

Así pues, teniendo en cuenta lo anterior, en el punto 3.3 del I1.A3, se solicitó a los estudiantes que con ayuda de Geogebra, construyeran una tabla con su respectiva lista de puntos, para los estudiantes que tuvieron hasta 5 inasistencias durante el curso, otra para los que solo faltaron una vez y una más para los que nunca faltaron. Las tres tablas, debían considerar a aquellos estudiantes que obtuvieron 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respuestas correctas. Así mismo, debían diseñar la expresión algebraica de la función que representaba a cada situación. Además, trazar la representación gráfica de cada escenario expuesto, señalando la pendiente como un área y como un ángulo.

Una vez ejecutada la tarea enunciada en el punto 3.3 del I1.A3, en el cuestionamiento I1.A3.P7, se pidió a los alumnos observaran la vista gráfica de Geogebra y posteriormente establecieran en que puntos coordenado se intersectaban cada una de las rectas con el eje de las ordenadas. En el mismo orden de ideas, en el cuestionamiento I1.A3.P8, se solicitó a los estudiantes relacionaran los puntos identificados, con cada uno de los escenarios señalado en el planteamiento 5 del I1.A3. De tal modo, que los estudiantes al respecto comentaron lo siguiente: 20 de ellos, refirieron que las intersecciones de las rectas correspondían al mismo valor numérico fijado en los puntos extras. Por otro lado, 19 consideraron que la relación existente entre las intersecciones de las rectas con el eje y, y los incrementos en los puntos extra, tenía que ver con los valores 5,30, 50. Mientras que, 8 alumnos, no expresaron respuesta alguna.

El siguiente foco de análisis se direccionó a la representación algebraica de cada uno de los escenarios señalados en el planteamiento 5 del I1.A3. Por tanto, en el cuestionamiento I1.A3.P9, se cuestionó a los estudiantes sobre como realizaron la representación algebraica de los incrementos de puntos señalados en cada situación expuesta en el planteamiento en cuestión. De tal forma, que las respuestas de los estudiantes se concentraron en tres grupos. El primero de ellos compuesto por 39 alumnos, los cuales mencionaron haber incluido cada incremento de puntos extra, sumando el valor numérico señalado en cada situación al final de la fórmula. En contraste, 5 estudiantes, declararon no saber cómo incluir dicho incremento. Así mismo, 3 jóvenes no emitieron respuesta alguna.

Para cerrar el I1.A3, dedicado al estudio de la ordenada al origen y después de que los estudiantes a través del desarrollo de una serie de tareas elaboradas con ayuda de la herramienta Geogebra, interactuaran con dicho elemento del a función lineal; en el cuestionamiento I1.A3.P10, se les pidió establecieran su noción sobre la ordenada al origen dentro de una función lineal. Las respuestas de los jóvenes fueron variadas, como se muestra en la tabla 10. En consecuencia, la categorización de dicha respuesta dio lugar a 7 ideas centrales. En la primera de ellas, 12 alumnos consideraron que la ordenada al origen era un valor ubicado en el eje y.

En la segunda, 12 estudiantes opinaron que dicho elemento de la función lineal era la unión de la recta con el eje y. En la tercera, 11 alumnos, consideraron era un punto dentro de la recta. En la cuarta, 9 jóvenes se centraron en la representación algebraica y establecieron que dicho elemento de la función lineal era la parte final de una fórmula. En la quinta, un estudiante, señalo que la ordenada al origen era un punto que da movimiento a la recta en el eje y. En la sexta un estudiante mencionó que la ordenada al origen era un elemento que ayuda a determinar otros elementos, como la pendiente. En la séptima, un estudiante estableció que dicho elemento de la función lineal era un valor en el eje x.

Tabla 8. Categorización del I1.A3.P10 ¿Define que es la ordenada al origen dentro de una función lineal?

Idea central	No. de alumnos	% de alumnos
Un valor ubicado en el eje y	12	26
Es la unión de la recta con el eje y	12	26
Es un punto de la recta	11	23
Parte final de una fórmula	9	19
Un punto que da movimiento a la recta en el eje y	1	2
Un elemento que te ayuda a determinar otros elementos como la pendiente	1	2
Un valor en el eje x	1	2
Total	47	100

Fuente: Elaboración propia

A su vez, en el I2.A3, con el uso de lápiz y papel, los estudiantes, también recorrieron distintos puntos de reconocimiento de la ordenada al origen de la función lineal. De tal forma, que en el I2.A3.P5.Inca, se presentaron a los alumnos la representación algebraica de 3 diferentes funciones lineales, cuya única variante era el valor de la ordenada al origen, no así, los valores numéricos que integraban el dominio fijado para las mismas, pues para las 3 funciones, se consideró un intervalo de -3 a 3. De ahí que, tomando en consideración dichas expresiones algebraicas, los estudiantes debían construir una tabla para cada una de ellas.

Como resultado de la resolución de dicho cuestionamiento, y en concordancia con lo señalado en la entrevista 1, en la figura 36 podemos observar que el CPYGS, obtuvo con gran facilidad los valores de la primera tabla, donde el valor numérico de la ordenada al origen era igual a 0, esto, sin la necesidad de establecer la regla de correspondencia dentro de la misma tabla, sin embargo, no fue así de sencillo para ella realizar los cálculos aritméticos de las otras 2 reglas de correspondencia, donde el valor de la ordenada al origen era distinto a 0. Concretamente, en la construcción de las representaciones tabulares de las 2 últimas funciones lineales, la estudiante mostró inconsistencias al aplicar las leyes de los signos, lo que sin duda, repercutió en la determinación de los valores del codominio de dichas funciones.

Figura 32. Resolución del I2.A2.P5.Inca realizado por el CPYGS

5. Realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las tablas de las funciones que se muestras a continuación.

$f(x) = 2x$ cero

x	$f(x)$
3	-6
2	-4
1	-2
0	0
-1	2
-2	4
-3	6

$f(x) = 2x + 2$

x	$f(x)$
3	3(2)+2 = 8
2	2(2)+2 = 6
1	1(2)+2 = 4
0	0 2
-1	1(2)+2 = -0
-2	2(2)+2 -2
-3	3(2)+2 = -4

$f(x) = 2x - 2$

x	$f(x)$
3	3(2)-2 = 4
2	2(2)-2 2
1	1(2)-2 0
0	0(2)-2 2
-1	1(2)-2 4
-2	2(2)-2 = -6
-3	3(2)-9-6

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

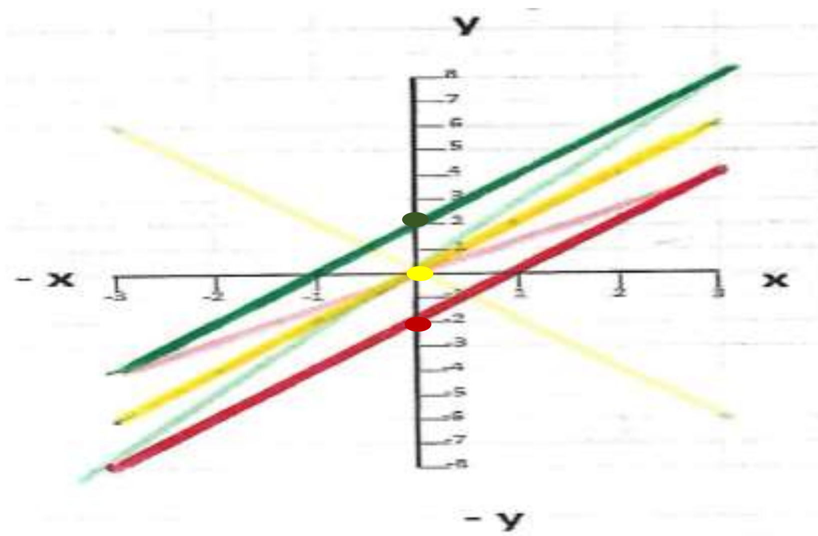
Continuando, en el I2.A3.P5.Incb tuvo lugar la representación gráfica de las funciones señaladas en el I2.A3.P5.Inca. Donde, según las instrucciones indicadas en el primer cuestionamiento mencionado en este párrafo, cada representación gráfica de la función debía ser trazada dentro del mismo plano cartesiano, utilizando un color específico para el diseño de cada recta (color amarillo para $f(x) = 2x$, color verde para $f(x) = 2x$+2 y color rojo para $f(x) = 2x - 2$). En la figura 37, se muestra la resolución del I2.A3.P5.Incb, ejecutado por el CPYGS. En dicha figura se observa, que las dificultades en cuanto al manejo de las leyes de los signos, a las que se enfrentó la estudiante, al elaborar la representación tabular de las funciones indicadas, tuvieron consecuencias en la representación gráfica de las mismas.

En la entrevista 1, el CPYGS, declaró haber iniciado el proceso de representación gráfica, considerando los valores de la primera tabla elaborada en el I2.A3.P5.Inca, cuyo valor de la ordenada al origen era igual a 0, señalando únicamente los puntos coordenados de los extremos de la recta, en los cuadrantes II y IV, posteriormente, trazó un tercer punto en el origen del plano cartesiano, luego, unió los 3 puntos. Siguiendo el mismo proceso continuó con la representación gráfica de $f(x) = 2x$+2. Pronto, se percató que los puntos coordenados para la primera función estaban trazados de forma incorrecta, por lo que procedió a rectificar.

La estudiante mostraba tener claro, cuáles eran los puntos por donde debían intersectarse cada una de las rectas con el eje y, por lo que las tres intersecciones las señaló con un punto dentro del plano cartesiano, esto, antes de construir la recta que representaba a cada caso. De este modo, continuó con el trazo de los puntos extremos de las rectas $f(x) = 2x$+2 y $f(x) = 2x$-2, lo que la llevó a percatarse que sus cálculos aritméticos en las tablas de la representación tabular, habían sido incorrectos. Tras varios intentos y correcciones, en la representación gráfica, la estudiante finalizó la tarea de manera favorable, indicando nuevamente las intersecciones de las rectas con un punto coordenado por encima de la recta que lo comprende.

Figura 33. Resolución del I2.A2.P5.Incb realizado por el CPYGS

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $2x$ con color amarillo, con color verde, traza la gráfica de la función $2x + 2$ y con color rojo, traza la función $2x - 2$. Posteriormente, indica en qué punto coordenado se intersectan cada una de las rectas con el eje y.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Mientras tanto, en la resolución del mismo cuestionamiento, el CPJSRM, en la entrevista 2, declaró haber construido las tablas requeridas, tomando como guía para la elaboración de las mismas, la regla de correspondencia plasmada en la representación algebraica de las funciones indicadas en el I2.A3.P5.Inca, lo que llevó a dichas reglas al interior de su respectiva tabla. El alumno, elaboró sin dificultad la representación tabular de $f(x) = 2x$. Sin embargo, en el cálculo aritmético del condominio de $f(x) = 2x + 2$ y $f(x) = 2x - 2$, el CPJSRM tuvo problemas para manejar las leyes de los signos. En la figura 38, se muestra el proceso cognitivo que dicho estudiante, llevó a cabo en la elaboración de la representación tabular de cada función enunciada.

Figura 34. Resolución del I2.A2.P5.Inca realizado por el CPJSRM

5. Realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las tablas de las funciones que se muestras a continuación.

$f(x) = 2x$

x	$f(x)$
3	2(3)=6
2	2(2)=4
1	2(1)=2
0	2(0)=0
-1	2(-1)=-2
-2	2(-2)=-4
-3	2(-3)=-6

$f(x) = 2x + 2$

x	$f(x)$
3	2(3)+2=8
2	2(2)+2=6
1	2(1)+2=4
0	2(0)+2=2
-1	2(-1)+2=-4
-2	2(-2)+2=-6
-3	2(-3)+2=-8

$f(x) = 2x - 2$

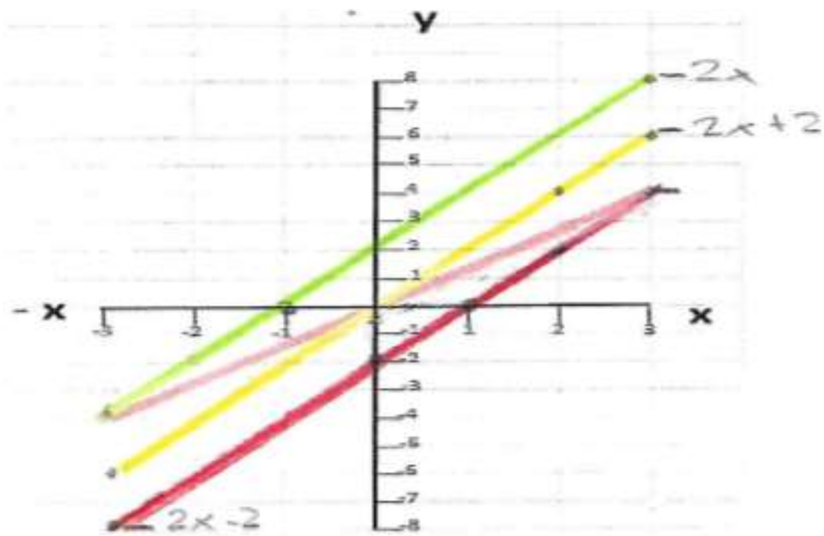
x	$f(x)$
3	2(3)-2=4
2	2(2)-2=2
1	2(1)-2=0
0	2(0)-2=2
-1	2(-1)-2=0
-2	2(-2)-2=2
-3	2(-3)-2=4

Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Acto seguido, en el I2.A3.Incb, el estudiante se dio a la tarea de trazar la representación gráfica de cada una de las funciones señaladas, donde como se observa en la figura 39, en la resolución de dicho cuestionamiento, la confusión en cuanto al manejo de los signos, presente en la elaboración de la representación tabular, tuvo efectos, pues al graficar las líneas de puntos proveniente de cada tabla, el CPJSRM, notó que había inconciencias en cuanto a sus cálculos aritméticos. Luego, trajo a un lado del plano cartesiano a las 3 expresiones algebraicas que representaban a las funciones en cuestión, tomándolas como referencia, indicó los puntos por donde cada recta debía intersectarse con el eje y y haciendo uso de la regla, trazó una recta por encima de cada punto indicado, posteriormente les asigno una expresión algebraica a cada una de dichas rectas.

Figura 35. Resolución del I2.A2.P5.Incb realizado por el CPJSRM

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $2x$ con color amarillo, con color verde, traza la gráfica de la función $2x + 2$ y con color rojo, traza la función $2x - 2$. Posteriormente, indica en qué punto coordenado se intersectan cada una de las rectas con el eje y.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

4.4 Los elementos de una función de primer grado

El presente apartado está dedicado a analizar los elementos que identificó el alumno de Bachillerato en una función lineal a través del uso de GeoGebra. Por lo tanto, se muestra la información proveniente de las tareas ejecutadas por los estudiantes al tratar de identificar los elementos de la función lineal como parte de un sistema. Para tal efecto, se diseñaron 2 fuentes de recopilación de información, por un lado el I1, el cual se desarrolló en el ambiente del software Geogebra y el I2, ejecutado con el uso de lápiz y papel. Cada instrumento contó con una actividad específica donde los estudiantes interactuaron con todos los elementos que integran a la función lineal en forma simultánea. En el I1, en la cuarta de sus actividades, titulada, todos los elementos de función lineal trabajando juntos, los alumnos exploraron los elementos de la función lineal trabajando en conjunto dentro del ambiente de Geogebra.

En dicha actividad se establecieron 2 planteamientos y 2 tareas, así como, 10 cuestionamientos que guiaron a los estudiantes en el proceso de identificación de los elementos de la función lineal. Más tarde el I2, elaborado en papel y a resolver por los estudiantes a lápiz, también se desarrolló una actividad expresamente diseñada para la identificación de todos los elementos de dicha función, los cuales aparecerían trabajando en conjunto. Para tal efecto, la actividad en cuestión se integró por 2 cuestionamientos, que partieron de la representación gráfica de la función, e invitaban a los estudiantes a transitar entre las formas de representación de la misma.

De tal forma, se inicia con la presentación de la información de I1.A4, donde tuvo lugar el planteamiento 6, el cual mencionaba lo siguiente: Miguel trabaja como vendedor en una tienda de pinturas para inmuebles. Su salario fijo diario es de $110 y recibe una comisión de $20 por cada bote de pintura que venda. De ahí, que en el punto 4.1, se solicitará a los estudiantes, que con ayuda del software Geogebra, diseñaran una función que representará el salario de un día cualquiera de las ventas de Miguel. Así mismo, realizaran una tabla con su respectiva línea de puntos donde se reflejara el salario del trabajador, cuando este vende 0, 5, 12, 17, 24 y 33 botes de pintura.

Luego, graficaran la pendiente de la recta como un área y como un ángulo. Posteriormente, una vez que los estudiantes concluyeron con dicha tarea, en el I1.A4.P1, se pidió establecieran cuál era la variable independiente de acuerdo al escenario del planteamiento 6. En la categorización de las respuestas de los estudiantes al respecto de dicho cuestionamiento, 32 de ellos, establecieron que la variable independiente estaba representada verbalmente por las ventas. Mientras, que 10 alumnos consideraron que dicha variable comprendía el salario total del Miguel. Asimismo, 3 estudiantes no emitieron respuesta. Por otro lado, un alumno consideró que dicha variable estaba representada por el salario fijo del empleado. Finalmente, un alumno más determinó, que la variable independiente se refería a la comisión que recibía el trabajador.

En el mismo orden de ideas, dentro del mismo cuestionamiento, se solicitó a los estudiantes expresaran el porqué de su respuesta. De tal forma, que categóricamente la réplica de los estudiantes al respecto de dicho cuestionamiento fue la siguiente: 26 de ellos expresaron que su respuesta partió de la idea de que el salario de Miguel depende de las ventas que el mismo realice. Por otro lado, 17 alumnos consideraron que la cantidad que recibirá el trabajador como salario está en función del número de botes de pintura que pudiese vender. En tanto, 3 alumnos, no emitieron respuesta. No así, uno, refirió que el empleado recibía comisión por los botes de pintura que vendía.

El segundo referente de análisis para los estudiantes dentro del contexto del planteamiento 6 del I1.A4, fue la identificación de la variable dependiente de la función lineal que representaba a dicho planteamiento. Por lo que, en el I1.A4.P2, se le cuestionó, sobre cuál era la variable dependiente. Al respecto, 39 estudiantes consideraron que la variable en cuestión estaba representada por el salario, 5 por la comisión que recibía Miguel y 3 no emitieron respuesta alguna. Así mismo, se pidió expresaran el porqué de su respuesta. Al respecto, comentaron lo siguiente: 39 estudiantes, consideraron que su contestación se sustentaba en el hecho, de que el salario que recibía Miguel dependía de las ventas que realizara. De la misma forma, 5 alumnos sustentaron su respuesta tomando como referente, la idea de que al trabajador recibía una comisión por los botes de pintura que vendía. Por otro lado, 3 estudiantes no emitieron respuesta.

Continuando en el escenario del planteamiento 6, el siguiente elemento de la función lineal por reconocer por parte de los estudiantes, fue la pendiente, la cual gráficamente había sido representada como un área sombreada, así como por un ángulo. Además, que Geogebra plasmaba en las 3 representaciones de la función, el valor numérico de la misma. De tal forma, que en el cuestionamiento I1.A4.P3, se pidió a los estudiantes explicaran que representaba el valor numérico del elemento de la función lineal en cuestión. Así, que, en los comentarios de los estudiantes sobre el cuestionamiento en mención, 40 de ellos expresaron que el valor de la pendiente se refería a la comisión. Por otro lado, 5 no emitieron respuesta y 2 establecieron que la pendiente dentro del caso señalado, representaba al número de botes de pintura.

El siguiente elemento de la función lineal que se puso a consideración de los estudiantes, fue la ordenada al origen. Siguiendo en el contexto del planteamiento 6, de acuerdo a lo requerido por el I1.A4.P4, los alumnos debían explicar que concepto representaba el valor numérico de la ordenada al origen. Por lo que, de acuerdo en la categorización de las ideas expresadas por ellos, 40 refirieron, que el valor numérico de dicho elemento de la función lineal, reflejaba el salario fijo diario del trabajador. Por otro lado, 5 estudiantes no emitieron respuesta. Mientras, que 2 consideraron que el valor numérico de la ordenada al origen se refería a la comisión.

Para cerrar con el tratamiento del planteamiento 6 del I1.A4, los estudiantes construirían la expresión algebraica de la función, referente al salario de un día cualquiera de ventas de Miguel. Posteriormente, en el I1.A4.P5, sustentarían la estructura de la función construida. Al respecto de dicho cuestionamiento, 28 alumnos, sostuvieron que la función que correspondía a un día cualquiera de las ventas de Miguel, era $20x + 110 = y$, sin embargo, no sustentaron su respuesta. Por otro lado, 10 estudiantes, construyeron la función $20x + 110 = y$, donde, identificaron a los elementos de la función lineal de la siguiente manera: $pendiente = 20$, $x =$ número de botes de pintura vendidos, $ordenada\ al\ origen$ =110, $y =$ sueldo diario total. Así mismo, 9 alumnos, no emitieron respuesta.

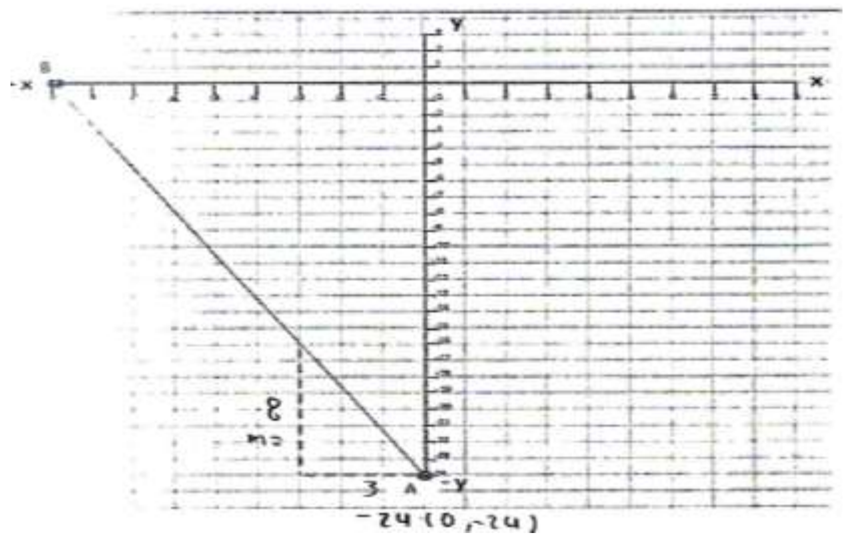
De forma similar el I2, también dedicó una actividad al manejo por parte de los alumnos de todos los elementos de la función lineal trabajando como un sistema. Así, que el I2.A4.P6 fue el encargado de guiar a los estudiantes en el análisis de dichos elementos trabajando en conjunto. Para tal efecto, el cuestionamiento mencionado, se dividió en 2 incisos. El primero de ellos, el I2.A4.P6.Inca, el cual partió de la representación gráfica de la función lineal, requiriendo a los alumnos observaran y analizaran dicha representación, luego, construyeran la representación algebraica de la misma.

De tal forma, que en la figura 42, se observa la resolución para dicho cuestionamiento, ejecutado por parte del CPYGS, en donde la estudiante identificó el valor numérico de la pendiente, basándose en la representación de la misma como un área. En la entrevista 1, la alumna declaró, haber colocado el número 3 para el desplazamiento del trazo del área en cuestión sobre el eje de las ordenadas y el valor numérico 8 para la elevación del trazo de la misma sobre el eje de las abscisas. Así mismo, identificó el punto coordenado donde la recta corta con el eje de las ordenadas, primero, colocando únicamente el número -24 y posteriormente, rectificando con la coordenada (0,-24). No obstante, aunque realizó la lectura de los elementos gráficos, no estructuró la expresión algebraica que representaba a la función lineal en cuestión.

Figura 36. Resolución del I2.A4.P6.Inca realizado por el CPYGS

6. Analiza la información que se te proporciona en cada inciso y realiza la actividad que se te requiere.

a) Partiendo de la representación gráfica de la función lineal que se muestra en el siguiente plano, construye la representación algebraica de la misma.



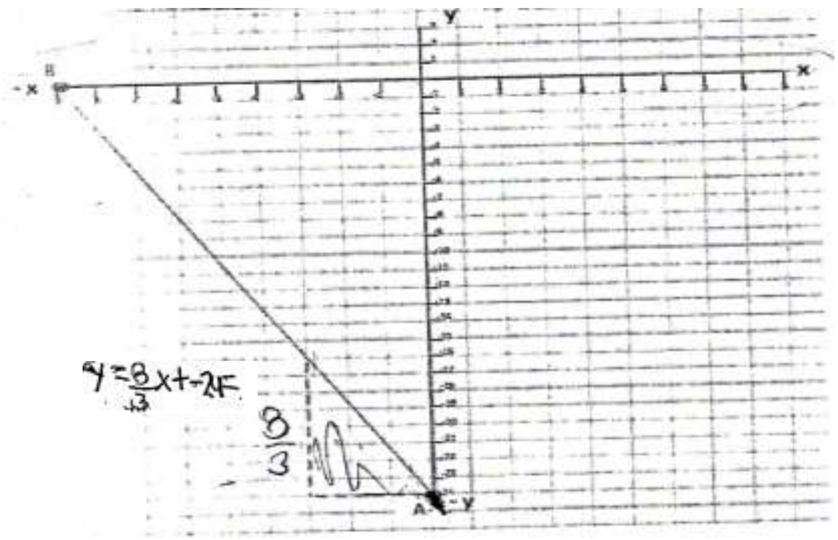
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Mientras tanto, como se observa en la figura 43, en la resolución de la misma problemática el CPJSRM, identificó en la gráfica proporcionada, el área que correspondía a la pendiente, sombreándola con su propio lápiz. Junto a ella, colocó el número fraccionario $\frac{8}{3}$. Por otro lado, en cuanto a la ordenada al origen, trazó esta intersección de la recta con el eje y, remarcando con el lápiz un punto sobre dicha intersección. Así, que al estructurar la representación algebraica de la función lineal en cuestión, determinó que dicha expresión correspondía a $y = \frac{8}{3}x + -24$, colocando 2 signos juntos dentro del modelo matemático diseñado y omitiendo el signo negativo que debía acompañar al valor numérico de la pendiente. En la entrevista 2, se evidencia que el estudiante no logro vincular del todo la dirección que seguía la recta sobre los ejes cartesianos II y IV, con el valor numérico de la pendiente.

Figura 37. Resolución del I2.A4.P6.Inca realizado por el CPJSRM

6. Analiza la información que se te proporciona en cada inciso y realiza la actividad que se te requiere.

a) Partiendo de la representación gráfica de la función lineal que se muestra en el siguiente plano, construye la representación algebraica de la misma.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

Regresando al I1.A4, tuvo lugar el planteamiento 7, como siguiente escenario sujeto análisis por parte de los estudiantes, donde nuevamente, los alumnos trabajarían con todos elementos de la función de manera conjunta. Dicho planteamiento, mencionaba lo siguiente: al momento de comprar una mini bocina, esta tiene un valor de $400 y posteriormente, cada año pierde $20 de su valor. De tal forma, que de acuerdo a lo enunciado, en el punto 4.2 del I1.A4, se solicitó a los estudiantes, usaran la herramienta Geogebra para diseñar una función que les permitiera determinar el valor de la mini bocina en cualquier año. Así mismo, realizaran una tabla con su respectiva línea de puntos, donde se reflejara el valor de la mini bocina en 0, 5, 15, y 20 años de uso. Posteriormente, graficaran la pendiente de la recta como un área.

Una vez concluida por parte de los estudiantes la tarea señalada en el punto 4.2 del I1.A4, se inició con una serie de preguntas que nuevamente guiarían a los alumnos en el análisis de los elementos de la función lineal trabajando como un sistema. El primero de dichos cuestionamientos fue I1.A4.P6, donde los alumnos debían establecer, cuál era la variable independiente dentro del escenario del planteamiento 7. El respecto, 29 estudiantes señalaron que dicha variable era representada verbalmente por los años de uso de la mini bocina. Por otro lado, 9 alumnos, consideraron que la variable en cuestión, se refería al precio de la misma. No obstante, 7 de los estudiantes, no emitieron respuesta. Mientras que 2, mencionaron que la variable independiente se refería a $400.

Así, que en el mismo cuestionamiento se pidió a los estudiantes expresaran la razón de su contestación. De tal forma, que las respuestas que sustentaron la opinión de los alumnos se dividieron en 3 categorías de acuerdo a su idea central. La primera de ellas, referida por 29 alumnos, que sostenían la idea, de que de acuerdo a los años de uso, cambiaba el valor de la mini bocina. Por otro lado, 10 de los estudiantes, consideraron que la variable en cuestión, era establecida de acuerdo al valor de la mini bocina, el cual iba cambiando en el trascurso del tiempo. No así, 8 estudiantes, no emitieron respuesta.

Después, fue turno de que los estudiantes establecieran la variable dependiente de acuerdo al escenario señalado en el planteamiento 7. Por lo que, en el I1.A4.P7, se les cuestionó al respecto. De tal forma, que los estudiantes comentaron lo siguiente: 34 de ellos, declararon identificar a la variable independiente como el valor de la mini bocina a través del tiempo. Mientras que, 11 estudiantes, no emitieron respuesta. Por otro lado, 2 consideraron que la variable independiente estaba representada por $400.

En el mismo cuestionamiento (I1.A4.P7), se pidió a los estudiantes, mencionaran, el porqué de su respuesta. Para un mejor manejo de la información, dichas respuestas se agruparon en 3 categorías, las cuales, se determinaron tomando en cuenta las diferentes ideas principales contenidas en la réplica de los alumnos a dicho cuestionamiento. La primera de dichas categorías concentró a 28 estudiantes, los cuales, consideraron que el valor de la mini bocina, dependía de los años de uso de la misma. Mientras que, la segunda categoría agrupó a 10 alumnos que no emitieron respuesta. Finalmente, en la tercera categoría 9 estudiantes, refirieron que el valor original de la mini bocina dependía de los años de uso.

El siguiente elemento de la función lineal por identificar dentro del marco del planteamiento 7, fue la pendiente. Por lo que en el I1.A4.P8, se pidió a los estudiantes explicaran con base a su experiencia previa en la ejecución de las tareas presentadas hasta el momento dentro del mismo instrumento, qué representaba el valor numérico de la pendiente dentro de dicho planteamiento. De tal forma, que 29 estudiantes explicaron que el valor de la pendiente representaba la disminución de cada año sobre el valor de la mini bocina. Por otro lado, 10 alumnos no emitieron respuesta. Mientras que 8, consideraron que el valor de la pendiente aludía al valor de la mini bocina.

Subsecuentemente, continuando en la representación verbal del planteamiento 7, se abordó la ordenada al origen. Dicho elemento de la función lineal, fue analizado por parte de los estudiantes con la guía proporcionada por el I1.A4.P9, donde con base en su experiencia al ejecutar las tareas señaladas anteriormente, explicaron que representaba el valor numérico de dicho elemento de la función lineal. De tal forma, que la categorización de las respuestas de los alumnos al respecto de dicho cuestionamiento fue el siguiente: 25 alumnos, explicaron que el valor numérico de la ordenada al origen, representaba el valor de la mini bocina en el momento que fue comprada. Así mismo, 15 estudiantes no emitieron respuesta alguna y 7 alumnos, consideraron que el valor numérico de la ordenada al origen correspondía al valor real de la mini bocina.

Al cierre del análisis del escenario del planteamiento 7, los estudiantes de acuerdo a lo requerido en el I1.A4.P10, construirían la representación algebraica de la función, que expresaría el valor de la bocina en cualquier año. Posteriormente, sustentarían su respuesta explicando la construcción del modelo algebraico. Así, las estructuras matemáticas de las expresiones algebraicas compuestas por los estudiantes y el significado que le otorgaron a cada elemento de la función lineal identificado fueron las siguientes: en primer término, cabe señalar que 14 alumnos, no emitieron respuesta. No así, 12 estudiantes, consideraron que la representación algebraica de la función, correspondía a $20x + 400 = y$.

Dónde expresaron los valores de cada elemento de la función lineal, de la siguiente manera: pendiente = 20, $x =$ años, ordenada al origen$=$ 400, $y =$ valor de la bocina. De la misma manera, 11 estudiantes, representaron algebraicamente el planteamiento 7, con la expresión $20x - 400 = y$, explicando los elementos de la función como sigue: pendiente$=$ 20, $x =$ años, ordenada al origen$=$ -400, $y =$ valor de la bocina. Otro grupo de alumnos, conformado por 10 de ellos, consideraron que el modelo matemático que expresaba a la función era $-20x + 400 = y$, dónde: la pendiente$=$ -20, $x =$ años, ordenada al origen$=$ 400, $y =$ valor de la bocina.

Dentro de este mismo apartado, en párrafos anteriores, se comentó el propósito del I2.A4.P6, el cual se encargó de guiar a los estudiantes en el análisis de los elementos de la función lineal trabajando en conjunto. También, se mencionó que dicho cuestionamiento se dividió en 2 incisos el primero de ellos I2.A4.P6.Inca (abordado anteriormente) y el I2.A4.P6.Incb, en el cual se ahonda en los siguientes párrafos. El segundo de dichos cuestionamientos, se planteó desde la representación gráfica de la función lineal, proporcionándoles a los estudiantes dos referentes de la recta que debían ser representados en el plano cartesiano para conocer la dirección e inclinación de la misma. Posteriormente, los alumnos construirían la representación algebraica de la función correspondiente a dicha recta.

En la resolución del I2.A4.P6.Incb, como se muestra en la figura 46 y en concordancia con la entrevista 1, el CPYGS, considerando el valor numérico positivo de la pendiente, identificó la dirección que debía seguir la recta, no así, mostró confusión al representar el punto coordenado indicado en la representación verbal de la función, la cual, hacía mención al par ordenado (-4,7). Sin embargo, la alumna representó (-4,0) y (0,7). Como resultado, obtuvo el trazo de una recta muy similar al área sombreada usada para representar la pendiente en la vista gráfica de Geogebra.

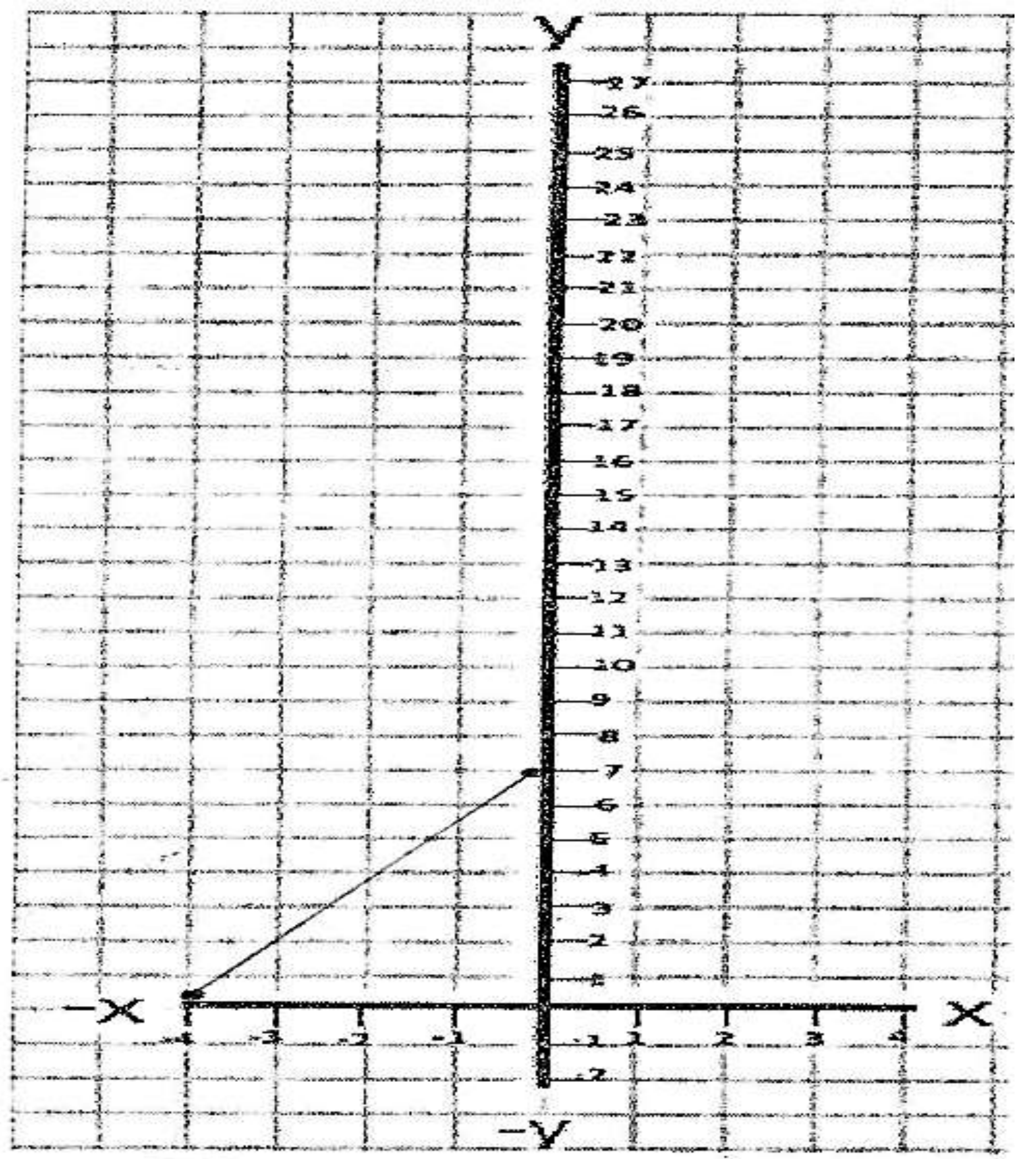
Lo que llevó a concluir que con tal información podía determinar el valor numérico de la pendiente. Así, que a la elevación de dicha área, le asignó el valor de 7 y al desplazamiento el valor 4. Por tanto, el valor numérico de la pendiente resulto ser $\frac{7}{4}$. En ese mismo orden de ideas, la alumna evidenció conocer el hecho de que la ordenada al origen, refería al punto donde la recta tocaba al eje y, por lo que determinó que el valor numérico de este elemento de la función lineal era igual a 7. En consecuencia, la construcción de la expresión algebraica representada quedó de la siguiente manera $y = \frac{7}{4} + 7$, omitiendo la variable independiente representada por x.

Figura 38. Resolución del I2.A4.P6.Incb realizado por el CPYGS

b) Gráfica la recta que pasa por el punto coordenado (-4,7) y cuya pendiente es igual a 5. Posteriormente, construye la representación algebraica de dicha función.

$m = \frac{7}{4}$
$b = 7$

$y = \frac{7}{4} + 7 = 28.$



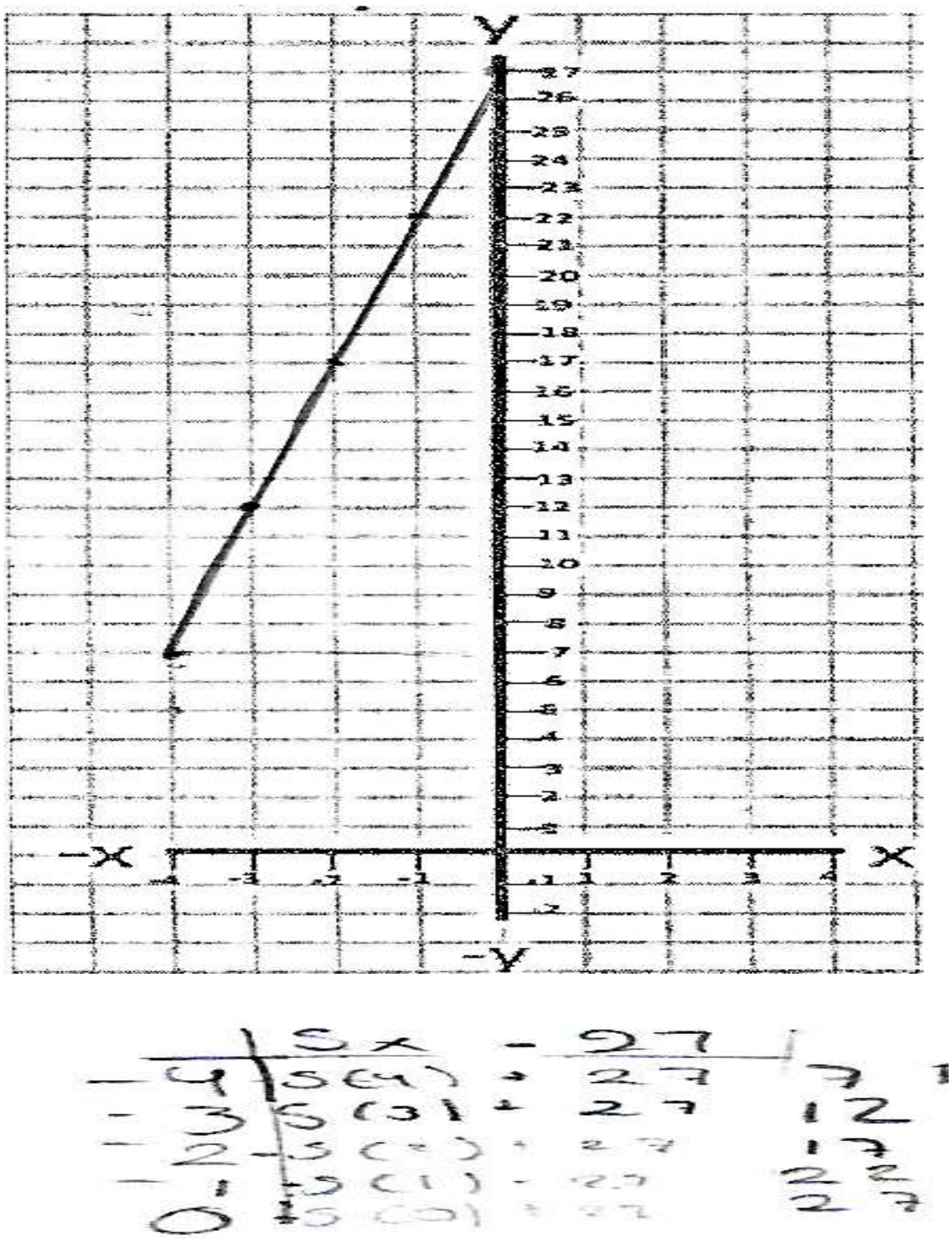
Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPYGS

Mientras tanto, el CPJSRM, elaboraba con ayuda de lápiz y papel, la resolución del I2.A4.P6.Incb. Disponiéndose a trazar los elementos gráficos señalados en la representación verbal de la función. Según lo declarado por el estudiante en la entrevista 2, este inició por indicar el punto coordenado (-4,7). Posteriormente, reflexionó sobre cuál debía ser la dirección de la recta. De tal forma, decidió ir hacia la derecha del plano cartesiano, y tomando como referencia el punto coordenado trazado anteriormente, desplazó su lápiz un espacio hacia la misma dirección y elevo al mismo 5 espacios hacia la parte superior de dicho plano. Una vez hecho esto, indicó un punto coordenado.

Luego, posicionó su regla sobre dichos puntos y trazó una recta, notando que esta se intersectaba con el eje de las ordenadas en la coordenada (0,27). Con la información recabada en el trazó de la recta, procedió a construir la representación algebraica de la función, la cual, conformó de la siguiente manera: $y = 5x + 27$. Dicha expresión algebraica, la llevó a la representación tabular de la función lineal, colocándola dentro de una tabla, en la cual, asignó como dominio de la misma un rango de -4 a 0. Una vez tabulada la regla de correspondencia, verificó que las coordenadas obtenidas se encontraran dentro de la recta trazada.

Figura 39. Resolución del I2.A4.P6.Incb realizado por el CPJSRM

b) Gráfica la recta que pasa por el punto coordenado (-4,7) y cuya pendiente es igual a 5. Posteriormente, construye la representación algebraica de dicha función.



Fuente: Instrumento 2 aplicado al CPJSRM

CONCLUSIONES

El presente texto, se desarrolló teniendo como fundamento teórico a la TRS de Duval (1999). En la cual, interactúan dos componentes esenciales, por un lado, un objeto matemático, que se hace tangible y manipulable desde un contexto representacional y por otro, un intérprete que otorga significado a dicho objeto a través de sus representaciones. A la par, se consideró al referente semiótico acotado en la relación tríadica de Peirce (1974). En tanto, que dicha triada, se conforma por un objeto referido; un significante, hablando de su representación; y un significado, entendido como el conocimiento adquirido por el intérprete sobre el objeto referido al interactuar con el significante. En ese mismo orden de ideas, el presente trabajo, se ocupó de estudiar desde la óptica de la TRS, a dicho proceso tríadico, colocando como objeto referido a la función lineal y sus elementos (la variable independiente, la variable dependiente, la pendiente y la ordenada al origen).

Así mismo, posicionó como significante a las distintas representaciones semióticas de la función (representación verbal, algebraica, tabular y gráfica); y finalmente analizó los distintos significados que atribuyeron los estudiantes al objeto referido. Los cuales se reflejaron en los procesos cognitivos de los intérpretes (en este caso, los estudiantes de Bachillerato), al interactuar con las representaciones de la función lineal y los elementos que la conforman, visibles y tangibles a través del software Geogebra. En consecuencia, se establecieron objetivos específicos y se diseñaron dos instrumentos de recolección de datos. El primer instrumento, se desarrolló en el ambiente del software matemático-educativo llamado Geogebra y el segundo se elaboró en papel para ser resuelto por los estudiantes a lápiz.

Así, que derivado de la ejecución y desarrollo de esta investigación, se identificó a la variable independiente y la variable dependiente que utiliza el alumno de Bachillerato en una función lineal. Al respecto, se comenta que de acuerdo a los datos recabados por los instrumentos de investigación, se identificó que los estudiantes de Bachillerato, utilizaban a dichas variables, principalmente como 2 elementos relacionados entre sí, a través de un proceso visible mediante representaciones, en este caso elaboradas en Geogebra. Reflejando, que los alumnos reconocieron a dichas variables como 2 objetos referidos distintos, cuyo significante en estricto sentido no era algo concreto, sino virtual. Con una idea muy a fin a la expresada por Faires & De franza (2001), donde las variables de una función se relacionan a través de una regla pormenorizada.

En cuanto al significado que los estudiantes le atribuyeron a la variable independiente fue diverso. La gran mayoría se apegó a Sobel & Lerner (1998), en cuanto a que dicha variable tiene un carácter de entrada fijo, otorgado de manera arbitraria. Pues mencionaron que la variable independiente es un valor numérico que existe por sí solo, sin la necesidad de tener relación con otro valor. Algunos, reconocieron a la variable independiente como un ente cambiante, susceptible de adoptar de manera manipulable cualquier valor numérico. Así mismo, otros menos, estimaron que la variable en cuestión, es la que no sufría algún tipo de efecto cuando la otra variable se modificaba. En contraste, algunos estudiantes, mostraron haber significado a la variable independiente desde su representación gráfica, pues no refirieron en absoluto, al valor numérico de la misma, declarando que la variable en cuestión se representa en x.

Con respecto a la variable dependiente, los alumnos señalaron que dicha variable estaba subordinada a otro valor numérico fijado previamente, y que la variable en cuestión se daba en términos de la existía previa de otra cantidad. Sin embargo, con respecto al análisis del objeto referido, algunos estudiantes, mostraron haber reflexionado sobre la relación de dependencia de las variables. En la entrevista 1, realizada a uno de los CP seleccionados en el I2, dicho CP, declaró haber analizado esta relación de dependencia, basándose en el mismo nombre de la variable, es decir, en el término, “dependiente”. Así, que el mismo CP y otros más de sus compañeros estudiantes, tanto en el I1 como en el I2, identificaron a la variable dependiente como la que dependía de otra variable, porqué cuando el valor de una de ellas se modificaba, el valor de la otra también lo hacía.

Un hecho que llamó la atención, es que si bien en el diseño de los instrumentos de recolección de datos, se procuró que mediante las actividades planteadas, los estudiantes transitaran entre las distintas representaciones de la variable independiente y dependiente; y considerando que tanto del I1, como el I2, contenían una importante carga de elementos gráficos, se esperaba que los proceso cognitivos de los estudiantes, plasmados en la resolución de ambos instrumentos, reflejaran la significación de las variables, partiendo de las distintas representaciones de la función, o bien, resultaba comprensible, que dichos procesos tuvieran una fuerte influencia de la representación gráfica. Sin embargo, no fue así, gran cantidad de la población objeto de estudio, se centró en el aspecto numérico y en segundo término, en el aspecto gráfico de las variables.

De la misma forma, el presente trabajo, describió cómo el alumno de Bachillerato determina la pendiente y la ordenada al origen en una función lineal. En cuanto a la determinación de la pendiente, es en este punto que se hizo por demás notorio lo que menciona Duval (1999), con respecto a que el conocimiento es pura posibilidad hasta que se pone en movimiento. Pues, en la entrevista 1 del I2, se pudo observar, que el alumno de Bachillerato, llevó a cabo un proceso cognitivo muy activo, para lograr la determinación de la pendiente. Iniciando por identificar a un mismo parámetro de dicho objeto matemático en sus distintas representaciones. Luego, localizó cuál era el valor numérico del parámetro seleccionado dentro de su significante algebraico.

Posteriormente, visualizó el signo de dicho valor numérico, lo cual lo llevó directamente a la representación gráfica, dándole la oportunidad de poner en juego los fundamentos semióticos de los objetos matemáticos adquiridos por las producciones en nuevos medios, como es el caso de Geogebra, tal como lo señala Kaput (1998). Pues el estudiante, dio muestras de evocar sus pasadas interacciones con dicho software matemático, en cuanto a la dirección que debía seguir la recta, y el trazo del área sombreada o ángulo al estilo de Geogebra. Así, el alumno regresó a la construcción de la representación tabular, e hizo uso de la máquina de trasformación a la que refiere Stewart et al., (2001), introduciendo ítems, en la regla de correspondencia indicada en el significante algebraico de la función previamente establecida.

Una vez obtenidos los ítems de salida transformados, formó puntos coordenados, que lo llevaron de nuevo a la representación gráfica, donde trazó dichos puntos, los cuales unió para formar una recta y finalmente marcar el área o ángulo, que según el estudiante significa a la pendiente. No obstante, en el desarrollo del proceso cognitivo descrito, destacó un hecho, pues si bien, los estudiantes significaron a la pendiente como un ángulo, gracias al significante construido en Geogebra, pocos de ellos mostraron haber significado a este ángulo como la inclinación propia de la recta que se desplaza de manera constante sobre el sobre el eje x y se eleva de la misma manera sobre el eje de las abscisas.

Continuando, se describió cómo el alumno de Bachillerato determina la ordenada al origen en una función lineal. Para esto, se describe como uno de los casos particulares seleccionados en el I2, realizó dicha determinación. Inicialmente, se considera necesario abordar un poco sobre el contexto donde tuvo lugar el proceso cognitivo que se expone. En la P5 del I2, se proporcionó, 3 funciones lineales representadas algebraicamente, además de 3 tablas, y un plano cartesiano. Se solicitó a los alumnos, completaran las tablas, trazaran las gráficas e indicaran en qué punto coordenado se intersectaba cada recta con el eje y. En respuesta a esto, el CP seleccionado, solo utilizó las tablas para obtener el primer y último punto coordenado de cada recta, unió dichos puntos, observó en que coordenada cada recta tocaba al eje de las ordenadas y señalo gráficamente con un punto cada una de las intersecciones.

De tal modo, en apego a la información expuesta, se procede a dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo identifica el alumno de Bachillerato los elementos que integran la función lineal a través del uso de GeoGebra? Con respecto a la variable independiente y la variable dependiente, los estudiantes identificaron dichas variables, como dos elementos distintos, uno asociado al otro, a través de una regla, a lo que ellos llamaron fórmula. En cuanto a la variable independiente la identificaron como un conjunto de números fijado de manera arbitraria, y la variable dependiente, como los ítems arrojados después de un proceso de trasformación. Sin embargo, según los datos recabados en ambos instrumentos de investigación, ningún estudiante hizo referencia a que, a uno y solo uno de los elementos que forman el conjunto de entrada (codominio), le corresponde uno y solo uno de los elementos del conjunto de salida (codominio).

En cuanto a la identificación de la pendiente, es importante mencionar, que el uso del software Geogebra como herramienta de representación, permitió hacer visible y manipulable a dicho elemento de la función lineal, a través de un área sombreada y/o un ángulo fácilmente obtenible con tan solo hacer un clic. Por lo que, con respecto al estudio de la pendiente, este hecho, hizo a la vista gráfica, potencialmente más atractiva para los estudiantes, con respecto a las otras vistas presentes en el mismo software. Así, que los alumnos de Bachillerato identificaron a dicho elemento de la función lineal, como un área sombreada o ángulo. Así mismo, los casos particulares en sus respectivas entrevistas, refirieron que en la A2 del I1, lograron observar, a través de la visualización de varios ángulos trazado en distintos puntos de la recta, el carácter constante de la pendiente.

De manera general, con respecto a cómo los estudiantes identificaron la ordenada al origen, cabe mencionar, que al igual que con la determinación de la pendiente, la representación gráfica potencializó el estudio de dicho elemento de la función lineal, al mostrar a través del movimiento, el desplazamiento de la recta sobre el eje de las ordenadas. Por lo que, algunos alumnos identificaron al elemento en cuestión, como la unión de la recta con el eje y, o bien, un punto que da movimiento a la recta sobre el mismo eje. Así mismo, solo un estudiante identificó a la ordenada al origen como un elemento necesario para determinar a la pendiente.

No obstante, este trabajo presenta algunas limitaciones. Tal es el caso, del sustento teórico, que si bien, centró sus bases en la TRS y se reforzó con los aportes de otros autores, dicho sustento era susceptible a ser ampliado por otros referentes, por lo que al dar respuesta a los objetivos de investigación, la información se obtuvo mayormente por los datos obtenidos de la aplicación de los instrumentos de investigación, propios del trabajo de campo. En cuanto al diseño de dichos instrumentos, donde los estudiantes debían transitar entre las distintas representaciones de la función y dado que se utilizó la herramienta Geogebra para facilitar en los alumnos dicha acción. Sin proponerlo, se relegó a la representación verbal con respecto a las otras de su mismo tipo. De la misma forma, si bien, en el diseño de algunas de las tareas de ambos instrumentos se partió de lo verbal hacia otras representaciones, en ninguna se inició de otras representaciones a lo verbal.

Por otro lado, la A1 del I1, dedicada exclusivamente al estudio de la variable independiente y la variable dependiente en la interfaz de Geogebra, no facilitó como se esperaba, la significación de dichas variables y su relación de dependencia, en especial la significación de la variable independiente. En el desarrollo de las entrevistas realizadas a los casos particulares seleccionados en el I2, los estudiantes refirieron haberse expresado en términos de dependencia hasta que abordaron el último apartado de I1, donde trabajaron con todos los elementos de la función lineal como un sistema. Así mismo, los procesos cognitivos que los estudiantes plasmaron en la resolución de ambos instrumentos de recolección de datos mostraron que el trabajar con las variables de forma separada con respecto a los demás elementos de la función lineal, no facilitó la notoriedad de la relación de dependencia existente entre dichas variables. Pues en la resolución del I1, elaborado con ayuda el software Geogebra, la mayoría de los alumnos se refirieron a dicha regla pormenorizada, como una simple fórmula aritmética.

Así mismo, en el I2 (elaborado a lápiz y papel), de acuerdo a las entrevistas realizadas a los casos particulares seleccionados, se observó que los alumnos consideraban a las variables como 2 elementos particulares, unidos por una regla aritmética. Por otro lado, en cuanto al estudio de la pendiente los casos particulares seleccionados en el I2, en sus respectivas entrevistas, opinaron, que durante el desarrollo de la secuencia didáctica ejecutada en el A2 del I1, no tuvieron la oportunidad de analizar el avance constante que tiene dicho elemento de la función lineal sobre ambos ejes del plano cartesiano.

En cuanto a las limitantes de la población y el contexto, se encuentra la falta de equipamiento, el deficiente manteniendo del mobiliario escolar y la inexiste posibilidad de conectividad dentro de las instituciones educativas públicas. Por tal situación, se buscaron otras alternativas para que los estudiantes desarrollaran las actividades previstas. Así, que los alumnos trabajaron desde su casa, donde la gran mayoría poseía un dispositivo electrónico y conectividad. Una vez solucionada dicha problemática, surgió otra limitante referente a las preconcepciones de algunos alumnos, pues consideraban que para ellos trabajar las matemáticas ya era de por si complejo, y resultaría aún más, si se combinaba a dichas actividades con conocimientos nuevos sobre un software, al principio desconocido para ellos. Sin embargo, conforme avanzó la aplicación del I1 este temor fue disminuyendo.

Por otro lado, surgió otra limitante con respecto a los conocimientos previos de los alumnos tanto en conceptos matemáticos básicos, como las leyes de los signos, jerarquía de operaciones, las operaciones con fracciones y el nombre formal de algunos referentes matemáticos, como es el caso de los ejes cartesianos, así como también, con respecto a sus habilidades digitales, pues mostraron dificultad para dar respuesta a problemáticas computacionales donde no era necesario aplicar algún tipo de conocimiento experto, tal es el caso de la descarga de software, la introducción de cifras en las columnas de una hoja de cálculo (no refiriéndose al caso específico de la introducción de fórmulas), además, del cambio de formato en un texto, desconocimiento de las posibles vías y rutas de almacenamiento en distintos tipos de dispositivos electrónicos, entre otras.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo, podrían resultar útiles para otros docentes en cuanto, a la reflexión sobre futuras investigaciones. En este sentido, la información hasta aquí expuesta puede ser un elemento inicial para estudiar la función lineal, resaltando el análisis de un hecho, fenómeno o problemática presente en el contexto actual y cotidiano de los estudiantes, y a partir de dicho análisis, dirigirse hacia las otras representaciones de la función, que expliciten de manera más amplia y enriquecedora al hecho o fenómeno, o bien, proporcionen los elementos necesarios para sustentar la solución viable de un problema.

De la misma forma, este texto puede resultar útil para aquellos docentes investigadores que deseen adentrarse, al estudio específico de alguno de los elementos de la función lineal, ya que cada elemento, cuenta con su naturaleza y características propias, que bien podrían ocupar toda una tesis. Así mismo, el presente trabajo podría servir como antecedente de investigación, para aquellos que estén interesados en estudiar la función lineal y sus elementos, estos últimos con la posibilidad de ser analizados por separado, desde la visión de la Geometría, donde el software Geogebra, resultaría de gran utilidad. De igual manera, para aquellos que estén atraídos por la idea o tengan la necesidad de introducir ambientes tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, y no solo en lo referente al caso de Geogebra, pues en el apartado de la justificación se mencionaron las características, cualidades y áreas de oportunidad de otros softwares que podrían ser retomados.

Recapitulando, surgen algunas recomendaciones para los docentes que estén interesados en estudiar o trabajar con la función lineal y/o Geogebra. Al respecto, se comenta que derivado de la pandemia por brote del virus COVID-19, mundialmente se ha generado la necesidad de incluir distintos recursos tecnológicos como medios para la enseñanza. Sin embargo, dadas las demandas de la sociedad del conocimiento, es evidente que los recursos tecnológicos, desde hace ya algunas décadas, llegaron para quedarse dentro de las aulas. A diferencia de otros campos del conocimiento, donde resultaría tal vez más compleja la introducción de dichas herramientas, en el caso del ámbito de la enseñanza de las matemáticas, la inclusión de distintas plataformas, software y aplicaciones, ha resultado por demás enriquecedora, pues brindan la posibilidad de abordar los objetos matemáticos, desde distintas perspectivas que no eran visibles dentro de las aulas tradicionales.

Por otro lado, para algunos profesores la introducción de recursos tecnológicos dentro de sus procesos de enseñanza ha sido complejo. Así, que el presente trabajo de investigación podría resultar útil como una posible guía para la introducción, manejo, análisis de las bondades y áreas de oportunidad del uso de entornos virtuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, no solo con respecto al análisis de la función lineal o con otro tipo de función, sino también con otros objetos matemáticos. Así mismo, se sugiere e invita a los docentes a explorar otros recursos útiles del software matemático-educativo Geogebra, como es el repositorio de actividades que posee dicho software, donde es posible encontrar una vasta cantidad de medios interactivos sobre cualquier tema relacionado con la matemática educativa, desde el nivel preescolar hasta la matemática aplicada.

También, Geogebra cuenta con applets, que son pequeñas aplicaciones que combinan gráficos animados, texto y cualquier otro elemento visual móvil. Las cuales proporcionan experiencias interactivas que permiten a los estudiantes de cualquier nivel educativo, analizar de manera divertida, diversos objetos matemáticos. Por otro lado, se sugiere, trabajar con Geogebra de forma vinculada con los formularios de Google, pues resulta por demás útil, para el proceso de evaluación de tareas asignadas a los estudiantes, ya que ofrece la posibilidad de manejar a dichos formularios como cuestionarios autoevaluables, que automáticamente generan informes y estadísticas sobre los resultados obtenidos. Finalmente, se comenta, que actualmente, dicho software, se encuentra vinculado con plataformas como Classroom, para el trabajo en el aula virtual de manera asincrónica, así como con Meet y Zoom, para el trabajo sincrónico.

REFERENCIAS

Bibliográficas

Alencar, E. M. L. S. (2007). O papel da escola na estimulação do talento criativo. En *Desenvolvimento de talentos e altas habilidades: orientação a pais e professores* (pp. 151–162). Brazil: ArtMed.

Ángel, A. (2007). *Álgebra elemental*. México: Pearson Educación.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (Primera, pp. 97–135). Colombia: Grupo editorial Iberoamérica.

Ausubel, D. P., Novak, J. Y. H. H., & Hanesian, H. (1976). Significado y aprendizaje significativo. En *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (pp. 53–106), México: Trillas.

Barnett, R. A. (1984). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Blumer, H. (1969). Symbolic interactionism: Perspective and method. *Englewood Cliffs: Prentice-Hal*.

Borjón, E., Torres, M. del R., & Sosa, L. (2015). *Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 con Excel*. En *XIV CIAEM-IACME* (pp. 1–8). Chiapas, México: CIAEM-IACME.

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. United States: Springer-Verlag.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra & I. Saíz (Eds.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Argentina: Paidós Ecuador.

Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En S. A. de C. Quinta del Agua Ediciones (Ed.), *La educación matemática en el siglo XXI* (pp. 191–216). México: IPN.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques. *Et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG. France. Université Joseph-Fourier*.

Cook, T. D., & Reichardt, C. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. En *Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipotesis sobre algunos factores que inhiben la devolución* (pp. 35–106). Barcelona España: Uno.

D'Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica de la didáctica de la matemática*. (Magisterio, Ed.). Bogotá: Dickson.

Dirección General de Bachillerato, (2013). Bachillerato no escolarizado para estudiantes con discapacidad de preparatoria abierta (BNEED). México: SEP.

Dolciani, M., Berman, L., & Freilich, J. (1979). *Álgebra moderna*. México: Publicaciones Cultura.

Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. En B. W. R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer (Ed.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 201–211). New York: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Artes gráficas univalle.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía. Colombia: Grupo de Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: Falmer Press.

Euler, L. (1748). *Introduction a l´analyse infinitesimale*. (M. M. Bousquet, Ed.). Suiza: Universidad de Lausanne.

Faires, D., & De franza, J. (2001). *Précalculo* (2a ed.). México: Thomson Learning.

Foro Consultivo Científico y Tecnológico, (2006). Conocimiento e innovación en México: hacia una política de estado. En *Elementos para el Plan Nacional de Desarrollo y el Programa de Gobierno 2006-2012*. México: CyT DES.

Gobran, A. (1990). *Álgebra elemental*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. K. & R. A. Lesh (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Goldin, G. A. (1992). Observing mathematical problem solving: perspectives on structured, task-based interviews. En *Center for Mathematics, Science, and Computer Education* (pp. 303–309). Piscataway, NJ: Rutgers University.

González, A., & Cantoral, R. (2014). Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de Geogebra. En Lestón. P (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 2151–2158). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, R. (2015). *Sesiones de pensamiento algebraico y de funciones* (1a ed.). México: EM2YLC.

Hildehza, O. M., Valdés, M. C., & Cabrera, L. M. (2018). *Estudio sobre algunos procesos cognitivos requeridos en la resolución de dos reactivos aplicados en el diseño muestral-matricial en Planea EMS 2017 del área de Lenguaje y Comunicación en Tendencias de investigación e innovación en evaluación educativa. Me*. (Autores, Ed.). México: Fondo

Sectorial de Investigación para la Evaluación de la Educación CONACyT-INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, (2015). *Plan nacional para la evaluación de los aprendizajes (PLANEA): Documento rector (1a ed.).* México: INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, (2016). *México en PISA 2015* (1a ed.). México: INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, (2018). *La educación obligatoria en México*: INEE.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding:The Notion of function as an Example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Canadá: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics Of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379–397). New York: Kluwer Academic Publishers.

Lehmann, C. (1981). *Álgebra*. New York: Limusa.

Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). España: Editorial Universidad de Granada.

Luzin, N. (1940). Function (in Russian). En Schmidt, O (Eds.) *The Great Soviet Encyclopedia*. (pp. 314–334). Moscú: Большая Российская энциклопедия.

Marcellán, F. (2012). *Las matemáticas en la sociedad del conocimiento*. *Discurso para el acto de recepción como académico*. España: ACMFQN de Granada.

Marqués, P. (1996). El software educativo. En Ferrés. J y Marqués, P. *Comunicación educativa y Nuevas Tecnologías* (pp.119-144). España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Morin, E. (2010). *La mente bien ordenada*. (Neyra, Ed.). Barcelona: Seix Barral.

Morin, E. (1996). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

Morris, C. (2005). *Fundamentos de la teoría de los signos*. *Trad. Laura Carmo Costa. Lisboa: Edições* (Vol. 70). Argentina: Planeta.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.*Washington, DC: N. A. Press.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics Of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 367–377).

New York: Kluwer Academic Publishers.

Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiotica*. Argentina: Nueva visión.

Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Prado, C., Santiago, R., & Aguilar, G. (2006). *Precálculo. Enfoque de resolución de problemas* (1a ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Puig, L. (1994). *Semiótica y Matemáticas* (pp. 1–21). España: *Eutopías Series*.

Rangel, L. (1991). *Funciones y relaciones* (5a ed.). México: Trillas.

Riviere, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En C. C. y J. P. Marchesi Alvaro (Ed.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (pp. 155–182). Madrid: Alianza.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. España: Aljibe.

Ruiz, H. L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Saussure, F. (1916). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot.

Secretaría de Educación Pública, (2006). *La estructura del sistema educativo mexicano*. *Unidad de planeación y evaluación de políticas educativas*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública del Estado de México, (2009). *Programa de estudios de la materia de Pensamiento Algebraico*. México: Secretaría de Educación Pública del Estado de México.

Secretaría de Educación, (2016). *Programa: Educación media superior*. México: GEM.

Secretaría de Educación Pública, (2018b). *Planea resultados 2017. Educación Media Superior*. México: SEP.

Sobel, M., & Lerner, N. (1998). *Precálculo* (5a ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Spivak, M. (1978). *Calculus* (2a ed.). New York: W.A.Benjamin Inc.

Stake, R. E. (1998). Investigación con estudio de casos. España: Morata.

Stewart, I. (2009). *Cartas a una joven matemática*. España: Grupo planeta.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). *Precálculo* (3a ed.). México: Thomson Learning.

Sullivan. (1997). *Precálculo* (4a ed.). México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. España: Paidós.

Toffler, A. (1973). *El "shock" del futuro*. España: Plaza & Janes, S. A.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. United States: H. U. Press.

Yin, R. K. (1989). Case Study Research (revised edition). United States: Sage.

Zecchetto, V. (2002). *La danza de los signos: Nociones de semiótica general* (Vol. 1).Ecuador: Abya-Yala.

Zenteno, A., & Mortera, F. J. (2011). El Proceso de Apropiación de las Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones (TIC) en la Educación Formal Media Superior o Nivel Bachillerato. En *Modelos, recursos tecnológicos y mecanismos de gestión del conocimiento en educación y formación* (p. 19). México: Tecnológico de Monterrey, Escuela de Graduados en Educación (EGE).

Hemerográficas

Alfaro, T. (2011). Desafío docente: el alumno postmoderno. *Docencia Universitaria*, *5*(1), 1–13.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: what makes it special?* Journal of teacher education, *59*(5), 389–407.

Butto, C., & Rojano, T. (2004). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría.* Educación Matemática, *16*(1), 113–148.

Butto, C., & Rojano, T. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo*. Educación Matemática, *22*(3), 55–86.

Carvajal, F., Rincón, E., & Zuñiga, L. (2017). *Uso del software Geogebra como estrategia de enseñanza para triángulos rectángulos de 30 ° - 60 ° dirigida a estudiantes de décimo grado*. Revista de investigación educativa de la escuela de graduados en educación, 7(14), 56–62.

Castillo, S. (2008). *Propuesta pedagógica basada en el Constructivismo para el uso óptimo de las tic en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 171–194.

Coelho, A., & Cabrita, I. (2015). *A creative approach to isometries integrating Geogebra and italc* *with paper and pencil environments.* Journal Of The European Teacher Education Network, (10), 71–85.

D´Amore, B., & Fandiño, M. (2002). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica".* Educación Matemática, 14(1), 48–61.

Dal Bianco, N., Martínez, S., Prieto, F., Ambrosino, M. L., & Juárez, M. A. (2014). *Interacción entre objetos matemáticos y representaciones situaciones didácticas.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 27, 409–416.

Díaz, J. L. (2013). *El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones*. El cálculo y su Enseñanza, 4, 13–25.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9, 143–168.

Edwin, P., Tafur, Y., & Martínez, J. (2015*). La conversión entre los registros de representación de la función lineal y criterios de congruencia entre algunas de sus representaciones.* Revista colombiana de matemática educativa, 1, 72–77.

Escalera, M. E., Moreno, E., García, A., & Córdova, A. (2016). *Factores que propician el nivel de ansiedad hacia la matemática en estudiantes de nivel medio superior en la región de rio verde san Luis potosí.* European Journal of Education Studies, 2(229), 8–22.

Farfán, R. M., & García, M. A. (2005*). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico.* Acta latinoamericana de matemática educativa, 18, 489–494.

Fernández, E., & Berch, M. (2016*). Explorando la dimensión afectiva entre el estudiante y el conocimiento matemático mediado por las TIC.* CINTED-UFRGS Novas Tecnologías na Educação, 14(1), 1–9.

Font, V. (1994). *Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. Suma*, 17(1), 10–16.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). *The brain's concepts: the role of the sensory*-motor system in *conceptual knowledge*. Cognitive Neuropsychology, 22 (3/4), 455–479.

Godino, J. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en didactique des Mathématiques, 22(2.3), 327–284.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325–335.

González, F. (1991). *Cognición matemática. ¿Modelo de Inteligencia o para el desarrollo de la* *inteligencia?* Ensino de Ciências e Matemática, 7–33.

González, G., & Franco, O. R. (2002). *Déficit de Atención con Hiperactividad*, Entramado, (1), 1–14.

Grisales, M. A. (2018). *Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas*. Entramado, 14(2), 198–214.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. Investigaciones en matemática Educativa, 245–264.

Hitt, F. (2001). *Representations and mathematics visualization. Proceedings of the Annual Meeting of the North American.* Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1–2(21), 53–66.

Hitt, F. (2003). *Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2), 213–223.

Hopenhayn, M. (2003). *Educación, comunicación y cultura en la sociedad de la información: una perspectiva latinoamericana*. CEPAL, 81(12), 175–1993.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003*). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education ?* Second International Handbook of Mathematics Education, 1–28.

Kaput, J. J. (1998). *Representations, inscriptions, descriptions and learning: a kaleidoscope of windows.* Journal of mathematical behavior, 17(2), 265–281.

Kleiner, I. (1989*). Evolution of the concept of function: a brief surve*y. College Mathematics Journal, 20(4), 282–300.

Llinares, S., & Godino, J. D. (1988). *El interaccionismo simbólico en educación matemática.* Revista educación matemática, 12, 70–92.

Maldonado, A. (2000). *Los organismos internacionales y la educación en México: el caso de la educación superior y el Banco Mundial*. Perfiles educativos, 22(87), 51–75.

Malik, M. (1980). *Historical and pedagogical aspects of the definition of function*. Journal of mathematics education in science and technology, 11(4), 489–492.

Mcalpine, L., & Weston, C. (2000). *Reflection : Issues related to improving professors'teaching and students ' learning.* Instructional Science, 28, 363–385.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019). *PISA 2018.* Resultados México, español. Nota país, I–III.

Oreja, M. B., & Vior, S. E. (2016). *La educación y los organismos internacionales de crédito. Préstamos y recomendaciones para América Latina (2000-2015).* Journal of supranational policies of education, 4, 18–37.

Ortiz, A. (2012*). GeoGebra como herramienta para la Enseñanza de la Matemática: Resultados de un curso de capacitación.* VIII Festival Internacional de matemática, (2008), 7–12.

Palmas, S. (2018). *La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas.* Revista Colombiana de Educación, 74, 25.

Pecharromán, C. (2014). *El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica*. Educación Matemática, 26(2), 111–133.

Pedersen, O. (1974*). Logistics and the Theory of Functions.* Arch. Intern & Hist. d Sciences., 24(94), 29–50.

Perrenoud, P. (2001). *La formación de los docentes en el siglo XXI*. Revista de Tecnología Educativa, XIV (3), 503–523.

Radford, L. (2006). *Semiótica y Educación Matemática. RELIME.* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, (2), 7–21.

Reid, M., Gioda, R. B., & Prieto, F. (2017). *Mandala : Otra forma de abordar conceptos geométricos.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (49), 217–230.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* IV Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 4(1), 219–311.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 135, 135–165.

Rüthing, D. (1984). *Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki.* Math. Intelligence, 6(4), 72–77.

Sánchez, J. (2003). *Integración curricular de tics concepto y modelos.* Revista enfoques educacionales, 5(1), 51–65.

Santana, N. M., & Climent, N. (2015). *Conocimiento especializado del profesor para la utilización de Geogebra en el aula de matemáticas*. Números, Revista de didáctica de las matemáticas, 88, 75–91.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). *El concepto de función a través de la Historia.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (16), 141–155.

Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.* Harvard educational review, 57(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching.* Educational

Researcher, 15(2), 4–14.

Tamayo, Ó. (2006). *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Revista Educación y Pedagogía, 18(45), 39–49.

Tello, E. (2008). *Las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC) y la brecha digital: su impacto en la sociedad de México*. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 4(2007).

Trahtemberg, L. (2000). *Impacto previsible de la tecnología.* La Revista Iberoamericana de Educación es una publicación monográfica cuatrimestral editada por la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), 1–28.

Ureña, N., Pérez, O. L., & Blanco, R. (2018). *Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje*. Revista Academia & Virtualidad, 11(1), 2–14.

Vallejo, V. (2011). *Coaching de plenitud: el camino hacia el desarrollo de las potencialidades.* Harvard Deusto Business Review, 199, 66–70.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en didactique des mathématiques, 10(2), 3.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, (2000). *Educación Científica, Tecnológica y Matemática: Una Perspectiva Global.* Boletín internacional de la UNESCO de educación científica, tecnológica y ambiental, XXV (3–4), 1–28.

Villanueva, Y. (2005). *Tendencias actuales en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación.* Acta Latinoamericana de matemática educativa, 18, 701–706.

Youschkevitch, A. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. History Exac t. Sci, 16(1), 37–85.

Electrónicas

Álvarez, Y. (2006). *¡Auxilio! No puedo con la matemática*. Recuperado el 19 de marzo de 2018, dehttp://ecotropicos.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/equisangulo/num2vol1/articulo11.htm

Campillo, S. (2019). *El que no sepa matemáticas va a tener un serio problema: la importancia de las habilidades matemáticas en el mundo laboral.* Recuperado el 31 de julio de 2019, de https://www.xataka.com.mx/investigacion/que-no-sepa-matematicas-va-a-tener-serio-problema-importancia-habilidades-matematicas-mundo-laboral.

Chevallard, Yves. (2013). *Teaching Mathematics in Tomorrow's Society : a Case for an Oncoming Counterparadigm.* Revista de Investigacion en didáctica de las Matemáticas, 2(2), 24. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Ciurana, E. R. (1990). *Complejidad: Elementos para una definición.* The Journal of Mathematical Behavior, 12(1) (May 2000), 9–47. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00036-5

Desmos, (2019). *Lo que hacemos.* Recuperado el 9 de septiembre de 2018, de https://www.desmos.com/about

Escuela de Administración, Finanzas e Instituto Tecnológico, (2019). *¿Por qué estudiar matemáticas?* Recuperado el 1 de agosto de 2019, de http://www.eafit.edu.co /escuelas/ciencias/ciencias-matematicas/servicios/Paginas/porque-estudiar-matematicas.aspx

Garrido, J., & Hansen, G. (2014). *Graphmatica 2.4 para Windows y Mac OS X.* Recuperado el 9 de agosto de 2019, de http://www.graphmatica.com/index.html?/espanol/

Geogebra, (2009). *¿Qué es GeoGebra?* Recuperado el 9 de agosto de 2019, de https://www.geogebra.org/about

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM*. The International Journal on Mathematics Education, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Googleplay. (2009). *MathAlly Calculadora Gráfica +*. Recuperado el 9 de agosto de 2019, de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.mathally.calculator.pro&hl=es_MX

Hohenwarter, M., (2018). *Software Geogebra.* Recuperado el 9 de agosto de 2019, de https://www.geogebra.org/?lang=es

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). *GeoGebra Búsqueda de Ayuda en GeoGebra, Manual Oficial de la Versión 3.2*. Recuperado el 9 de agosto de 2019, de https://www.geogebra.org/?lang=es

Lobo, A. (1998). *On conceptual obstacles linked with external representation in geometry.* The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 183–195. https://doi.org/https://doi.org /10.1016/S0364-0213(99)80058-5

Mesias, O. (1986*). La investigación cualitativa. Universidad central de Venezuela*. https://doi.org/10.1046/j.1432-1327.2000.01188.x

MyThemeShop. (2020). *Categorizar y codificar los datos en tesis cualitativas.* Recuperado el 13 de abril de 2020, de http://normasapa.net/categorizar-codificar-datos-tesis-cualitativas/

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, (2008). *La UNESCO presentará el 8 de enero en Londres sus Normas sobre Competencias en TIC para Docentes en la Conferencia "Hacer evolucionar las capacidades intelectuales de los jóvenes".* Recuperado el 1 de abril de 2018, de http://portal.unesco.org/es/ev.phpURL_ID=41553&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, (2016). Pisa 2015. *Resultados clave español.* Recuperado el 20 de marzo de 2018, de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, (2018). *¿Qué es la OCDE?* Recuperado el 22 de marzo de 2018, de https://www.oecd.org/centrodemexico/laocde/

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving* (revised). Paris: PISA, OECD. https://doi.org /http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en

Ortíz, M. (2019). *Exceltotal.* Recuperado el 13 de abril del 2020, de https://exceltotal.com/

Perdomo, D., & Camacho, H. (2010). *Pertinencia en las instituciones de Educación Superior en aras de la atención a la diversidad. Universidad Panamericana del Puerto*. Recuperado el 1 de agosto de 2019, de http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/vrac/documentos/Curricular_Documentos/Evento/Ponencias_4/Perdoma_Dayana. pdf.

Prada, R., Hernández, C. A., & Ramírez, P. (2016*). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería.* Revista Científica CIDC, (25), 188–205. https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Rius, M. (2012). *Las matemáticas nos rodean (y van a más).* Recuperado el 13 de abril de 2019, de https://www.lavanguardia.com/estilos-de-vida/20120601/54299368626/las-matematicas-nos-rodean-y-van-a-mas.html

Rodríguez, M. E. (2016*). La función social de la enseñanza de la matemática desde la matemática, cotidianidad y pedagogía integral.* Revista Eleuthera, 15, 34–45. https://doi.org/ 10.17151/eleu.2016.15.3.LA

Rojas, P. J. (2015). *Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos*. Enseñanza de las Ciencias, 33(1), 151–165. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1479

Secretaría de Educación Pública, (2017). *Planea 2016, Educación Media Superior*. Recuperado el 19 de marzo de 2018, de http://planea.sep.gob.mx/ms/resultados_anteriores/

Secretaría de Educación Pública, (2018a). *PLANEA en Educación Media Superior*. Recuperado el 1 de abril de 2018, de http://planea.sep.gob.mx/ms/

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Wenger, R. (2014). *Signos: definición, clasificación y su relación con las imágenes.* Recuperado el 4 de noviembre de 2019, de https://perspectivasesteticas.blogspot.com/2014/05/signos-definicion-clasificacion-y-su.html

Tesis

Forero, M. (2016). Medios semióticos de objetivación: Una alternativa en el aprendizaje de las matemáticas. (Tesis de maestría). Colombia: Instituto de Investigación en Educación (IEDU).

Gatica, S. L. (2017). Representaciones semióticas y visualización en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano. (Tesis de licenciatura). Chile: Universidad de Concepción.

Giraldo, H. (2012). Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín. (Tesis de maestría). Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Martínez, J. N. (2013). Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra. (Tesis de maestría). Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Ospina, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función. (Tesis de maestría). Colombia: Universidad Autónoma de Manizales.

ANEXOS

Anexo 1

Instrumento 1: análisis de los elementos de la función lineal a través del uso de GeoGebra

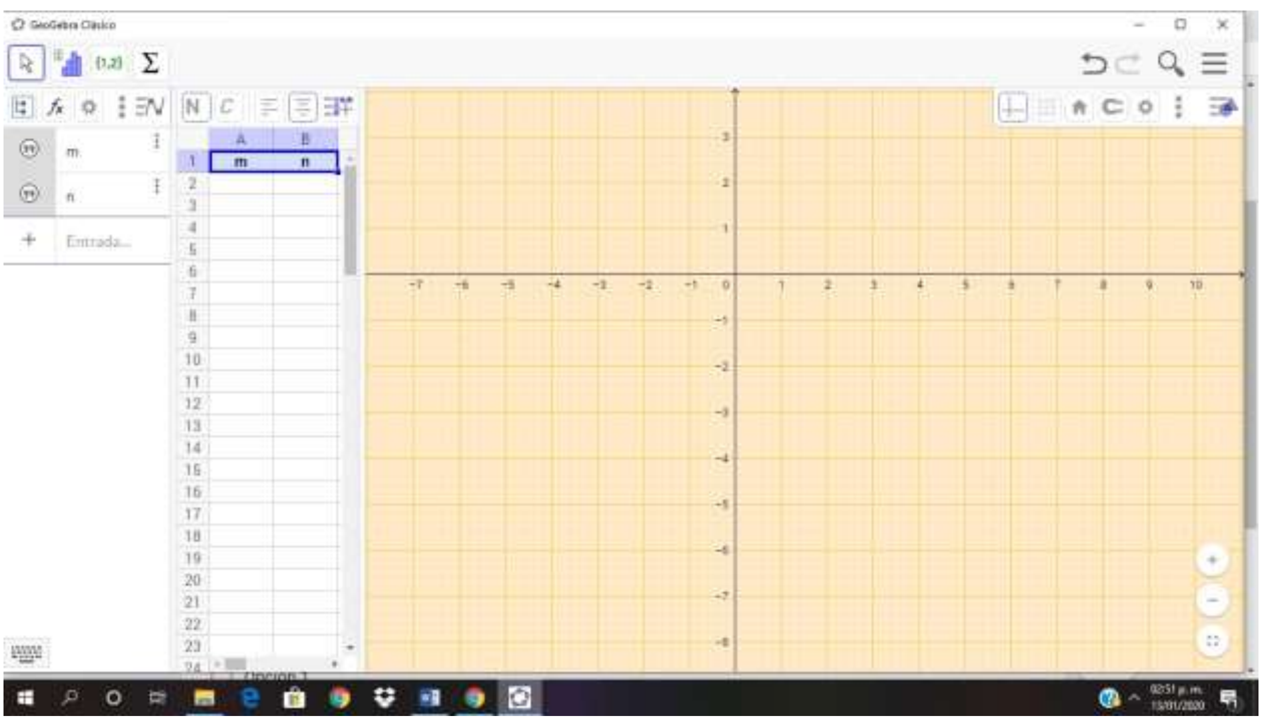
Objetivo: Analizar y explorar los elementos de la función lineal a través del uso de Geogebra.

Nombre del alumno: ____

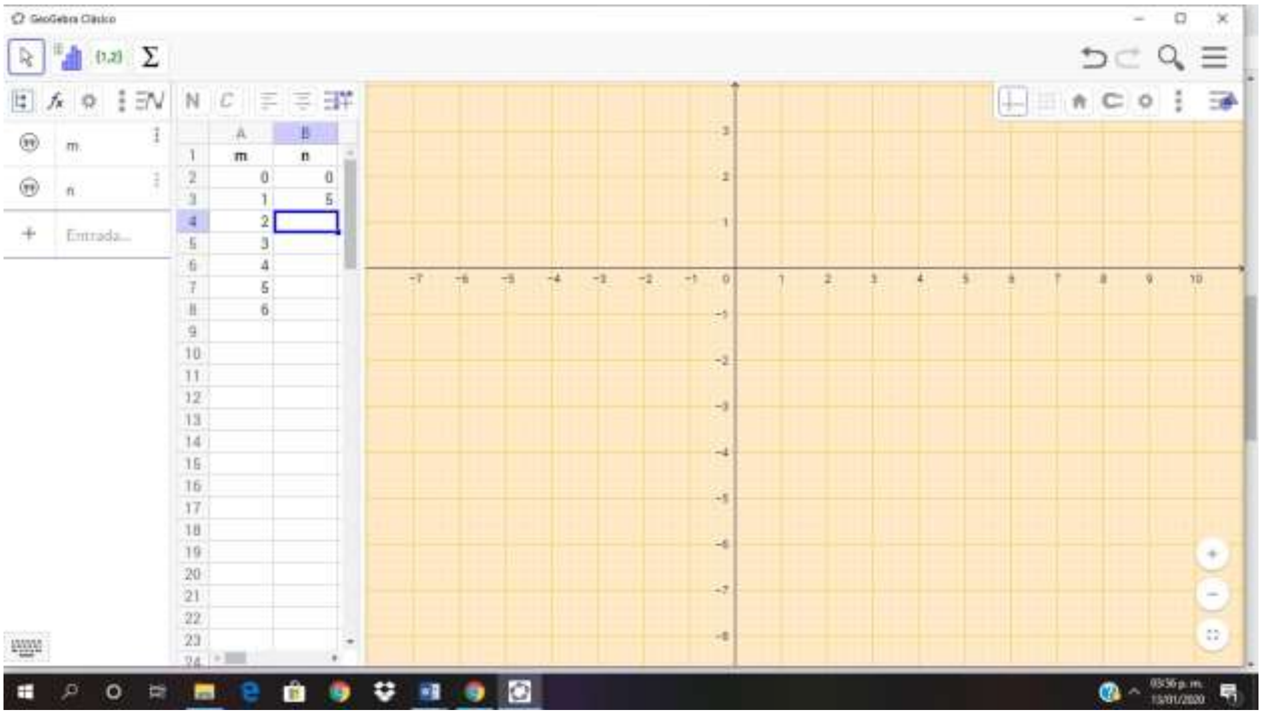
Actividad 1 Variable independiente y variable dependiente

Planteamiento 1: Un grupo de estudiantes de primer grado de preparatoria reciben 5 puntos por cada pregunta que hubiesen contestado correctamente en su examen de álgebra. Para un mejor manejo de los datos, el número de aciertos logrados estará representado por la literal m y el número de puntos obtenidos par la literal n. Analicemos la información con ayuda del software Geogebra.

1.1 En la vista tabular del software Geogebra nombraremos dos columnas, la primera de ellas representará el número de aciertos logrados (m) y la segunda los puntos obtenidos (n).



1.2 En los aciertos logrados (m), estableceremos un intervalo de 0 a 6. En los puntos obtenidos (n) iniciaremos con el número 0 seguido del número 5. Esto es, si un estudiante no obtuvo respuestas correctas por lógica no habrá obtenido puntos. En el caso de haber logrado un acierto, sus puntos obtenidos serán igual a 5. Esta relación la puedes observar en la tabla que estas construyendo en la vista tabular.



I1.A1.P1 ¿Cómo determinarías el valor de n, cuando m vale 2, 3, 4, 5, 6? Completa la tabla con los valores obtenidos.

I1.A1.P2 ¿Que representan los valores obtenidos en la columna n?

I1.A1.P3 ¿De qué depende el número de puntos obtenidos por los estudiantes?

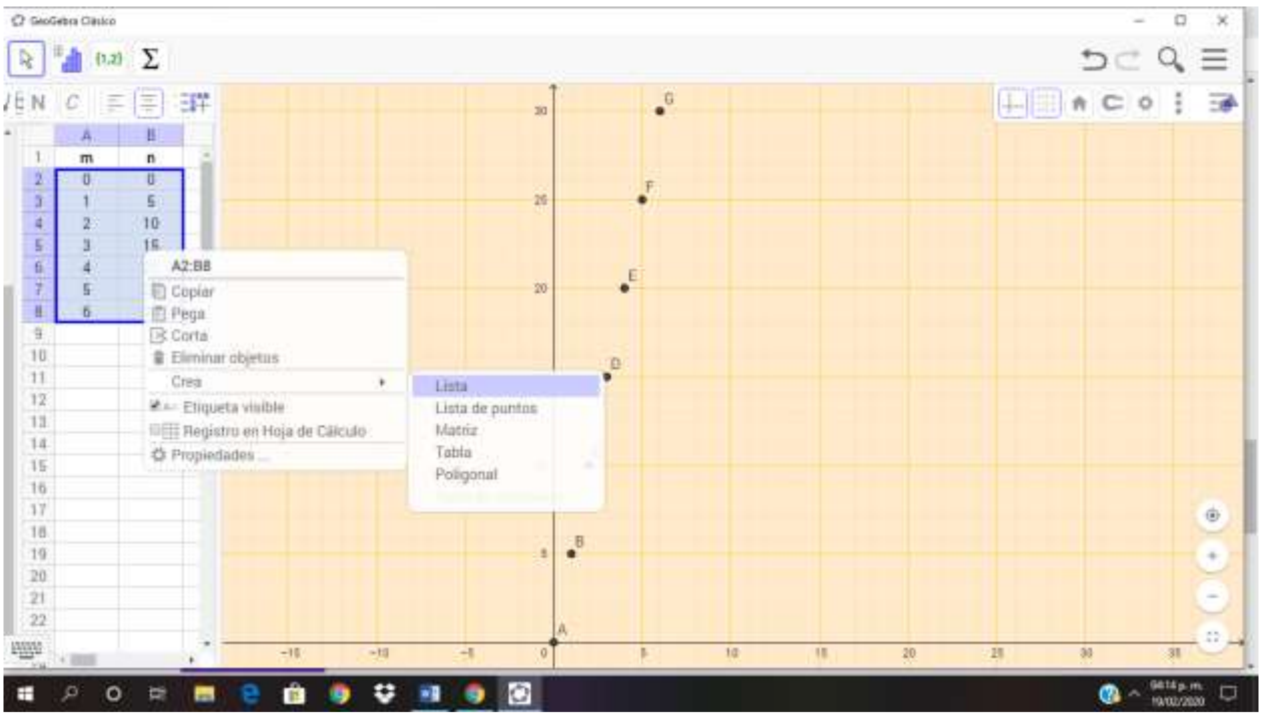
____

____

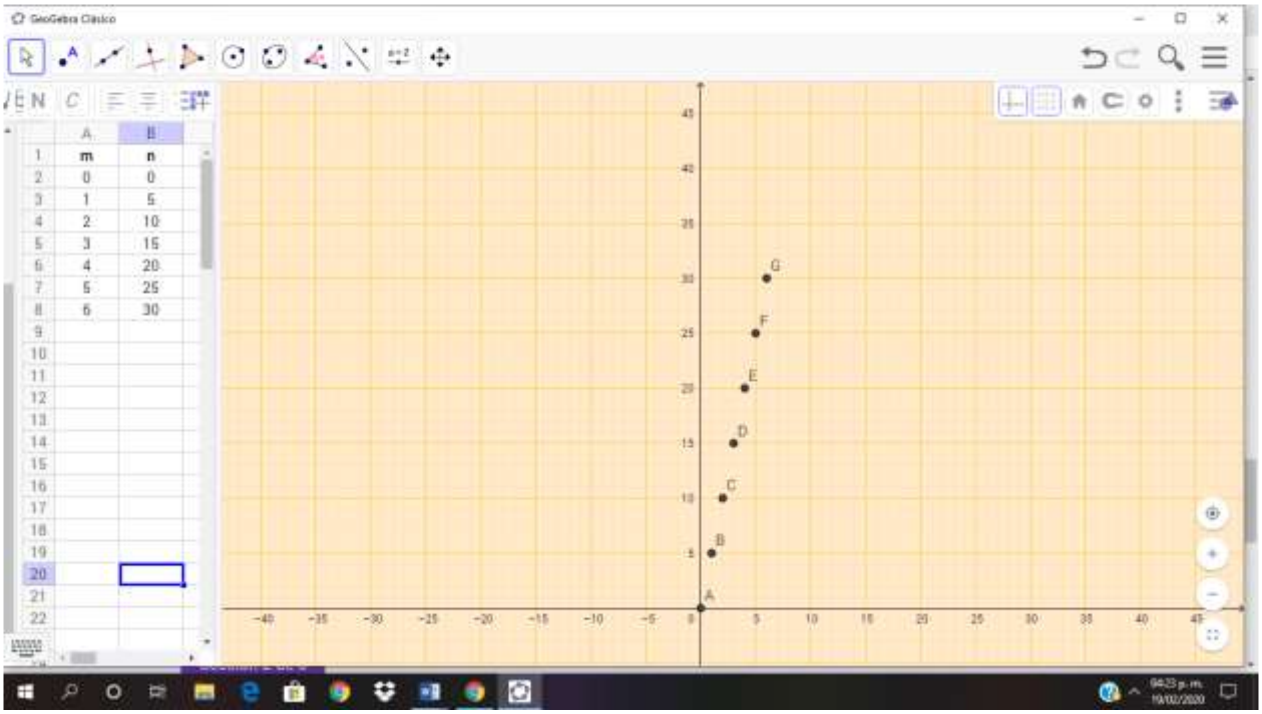
____

Una vez determinado el valor de los puntos obtenidos en función a los aciertos logrados, lo cual se ve representado en la tabla que construiste, analicemos otro tipo de representación del mismo planteamiento.

1.3 Selecciona los datos de la columna m y n. Da clic con el botón derecho del mouse. Se desplegará una lista, de la cual elegirás crear y posteriormente lista de puntos.



1.4 Como podrás observar en la vista gráfica se crearon una serie de coordenadas. Analicemos la gráfica de acuerdo con el planteamiento inicialmente señalado. El punto A, localizado en las coordenadas del plano cartesiano (0,0), indica que el alumno que no logró respuestas correctas obtuvo 0 puntos. El estudiante que logró 1 respuesta correcta, obtuvo 5 puntos, tal como se observa en el punto B (1,5).



I1.A1.P4 De acuerdo con el planteamiento 1, ¿qué indican las coordenadas C, D, E, F, G, respectivamente?

____

____

____

I1.A1.P5 ¿En qué eje del plano cartesiano se representa el valor de los aciertos logrados?

- ☐ x
- ☐ y
- ☐ otra____

I1.A1.P6 ¿En qué eje del plano cartesiano se representa el valor de los puntos obtenidos?

- ☐ x
- ☐ y
- ☐ otra____

I1.A1.P7 ¿En función de que esta el número de puntos obtenidos?

____

____

____

I1.A1.P8 ¿Qué características notas en común de la gráfica obtenida con respecto a la tabla anteriormente realizada?

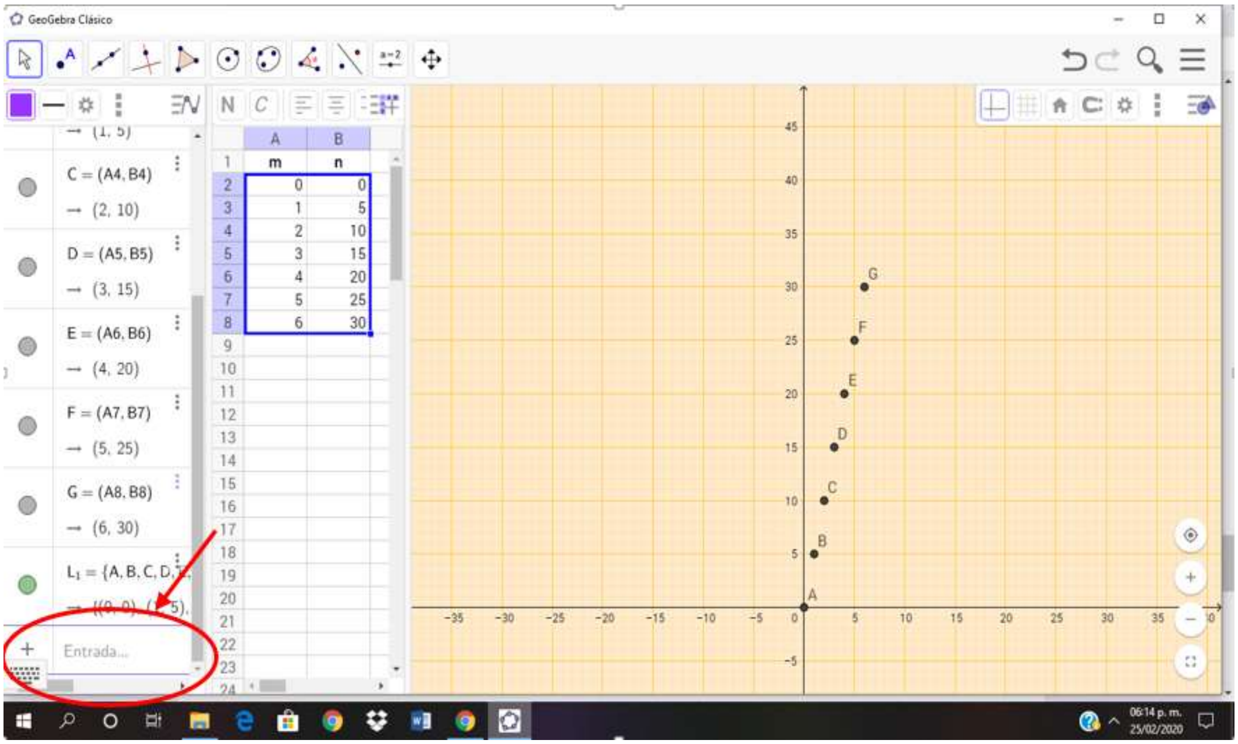
____

____

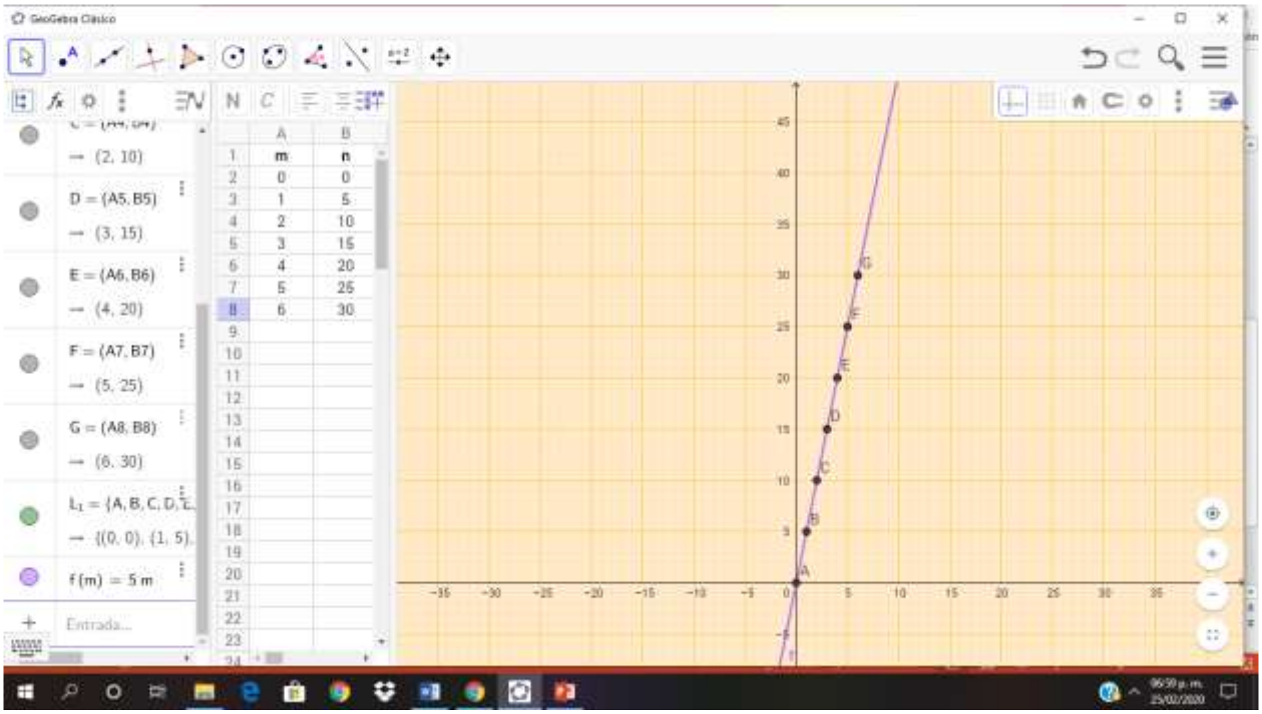
____

Considerando que existe una relación de dependencia del número de puntos obtenidos (n) con respecto al número de aciertos logrados (m) y sabiendo que para conocer los puntos obtenidos multiplicamos por 5 el número de aciertos logrados, podemos establecer esta relación de dependencia usando una fórmula, donde $n = 5 * m$. Por lo tanto, si remplazamos la palabra depende por la expresión *está en función*, podemos decir que n está en función de m. En matemáticas usamos la expresión $f(x)$, que quiere decir está en función de x, en este caso para indicar que n está en función de m, usaremos $n = f(m)$. Así mismo sabemos que $n = 5 * m$, por lo tanto $f(m) = 5 * m$. Cuando se usa la expresión $f(x)$ en alguna fórmula matemática, esta recibe el nombre de función. Geogebra cuenta con la vista algebraica donde se puede trabajar con funciones como la que hemos diseñado.

1.5 Si observas la vista algebraica podrás notar en primera instancia las coordenadas de los puntos representados en la vista gráfica. En la parte inferior de la misma se encuentra la entrada donde se ingresan datos o fórmulas algebraicas como $f(m) = 5 * m$. Ingresa los datos.



1.6 Como podrás observar al ingresar la función $f(m) = 5 * m$ automáticamente en la vista gráfica se traza una línea que en apariencia une los puntos anteriormente graficados, sin embargo la línea está pasando por encima de dichos puntos.



I1.A1.P9 ¿Por qué causas consideras que la recta pasa por sobre los puntos coordenados?

Como habrás notado las literales que se usan en las funciones, representan cantidades que son susceptibles adoptar distintos valores, por lo que también reciben el nombre de variables. En el caso del planteamiento señalado al inicio de la actividad existen dos variables: m que representa el posible número de aciertos logrados necesarios para obtener cierto número de puntos representados por n. Anteriormente reconocíamos la relación de dependencia entre ambas variables, entonces:

I1.A1.P10 ¿Qué variable consideras es dependiente de la otra?

- ☐ m Aciertos logrados
- ☐ n Puntos obtenidos

¿Por qué?

____

____

____

I1.A1.P11 ¿Qué variable consideras es independiente de la otra?

- ☐ m Aciertos logrados
- ☐ n Puntos obtenidos

¿Por qué?

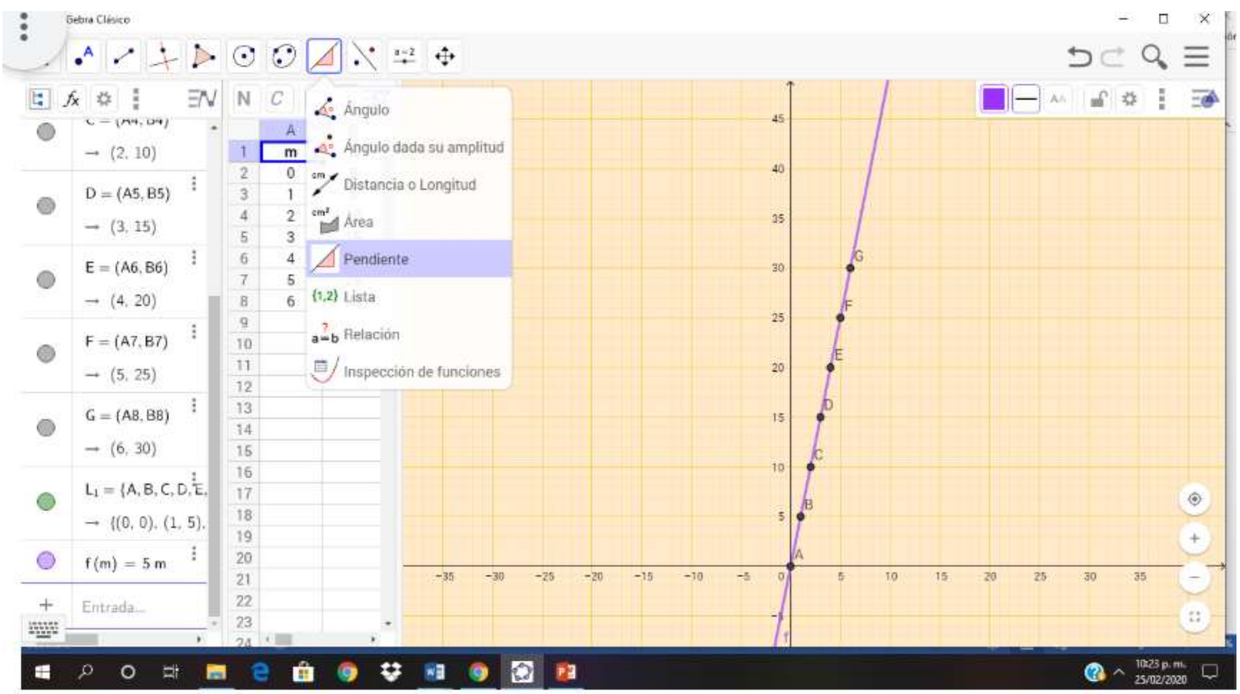
____

____

____

Actividad 2 La pendiente

2.1 Activa la barra de herramientas de la vista gráfica al dar clic sobre ella. Da clic sobre el botón ángulo y se desplegará una lista, elige pendiente.



I1.A2.P1 ¿Qué cambios notas en las tres vistas de Geogebra al elegir la opción pendiente?

____

____

____

I1.A2.P2 ¿Cuál consideras es la relación del valor de la pendiente que aparece en la vista algebraica con el área sombreada en la vista gráfica?

____

____

____

I1.A2.P3 Observa los valores de las tres vistas. Retomando el planteamiento 1 donde el número de aciertos logrados se representa en el eje x y el número de puntos obtenidos en el eje y, y así mismo, considerando los valores numéricos que acompañan al área sombreada ¿qué interpretación le darías a dicha área?

____

____

____

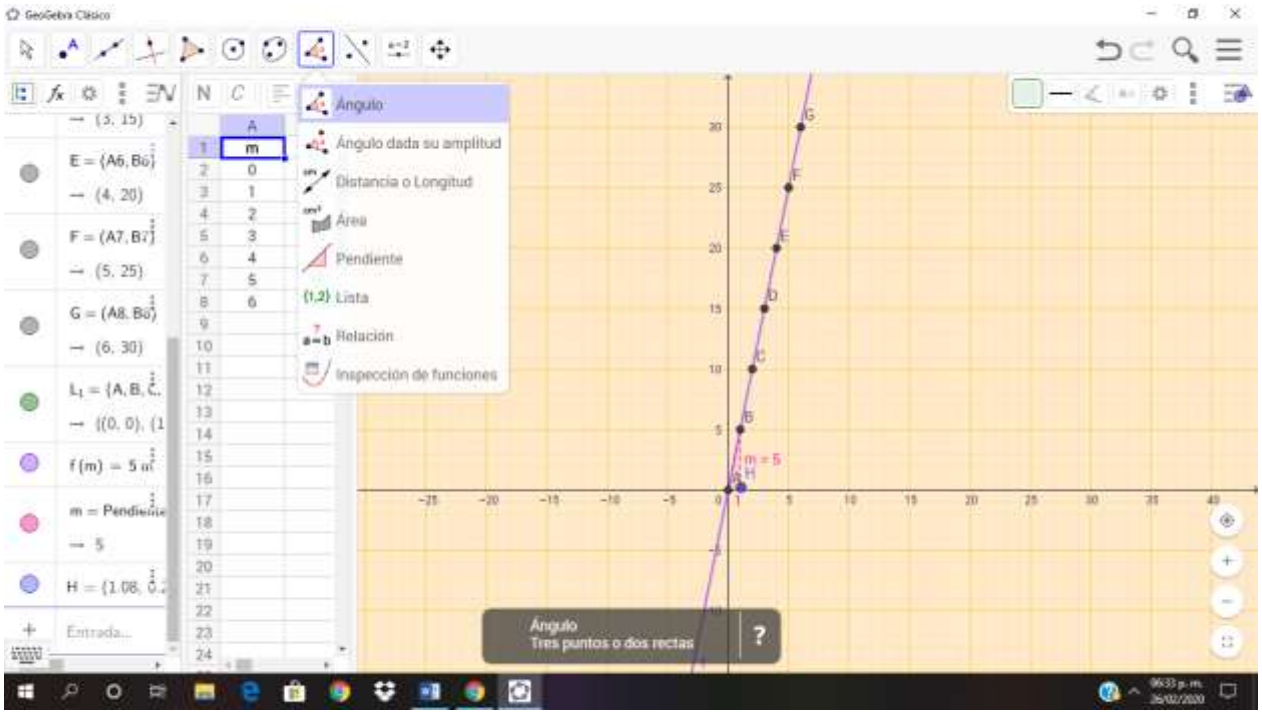
I1.A2.P4 Cuando el valor de m aumenta ¿qué pasa con el valor de n?

____

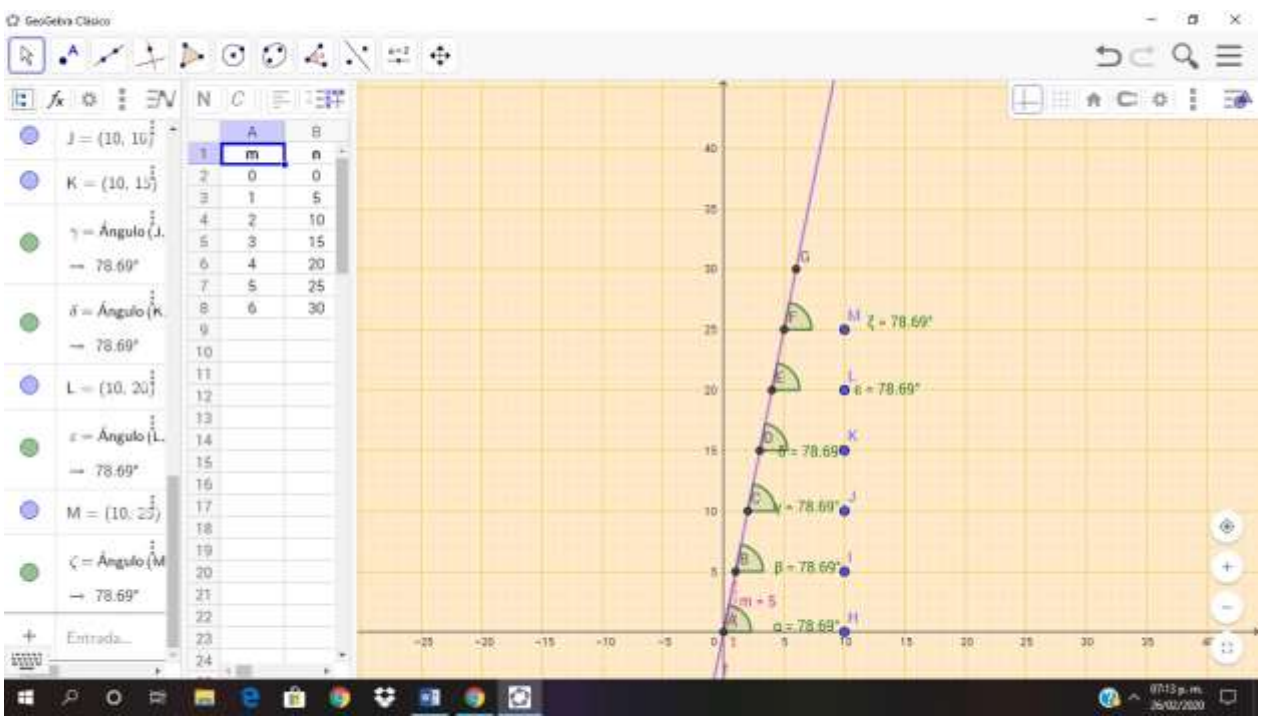
____

____

2.2 La relación entre variables que observaste, en el punto anterior también puede representarse como un ángulo. Para trazar dicho ángulo inserta un punto sobre el eje de las abscisas, frente al punto coordenado (0,0). Posteriormente, da clic en el icono ángulo de la barra de herramientas y de la lista desplegable elige la opción ángulo. Geogebra te solicitará que indiques tres puntos para fijar el ángulo a trazar. Inicia por seleccionar el punto que insertaste, luego da clic sobre el punto A (0,0) y por último en el punto B (1,5).



2.3 Después de haber trazado un ángulo, repite los mismos pazos realizados en la pantalla 2.2 de este material con cada uno de los puntos coordenados graficados unidos por la línea.



I1.A2.P5 Observa la vista gráfica, ¿qué notas en común sobre los ángulos trazados?

____

____

____

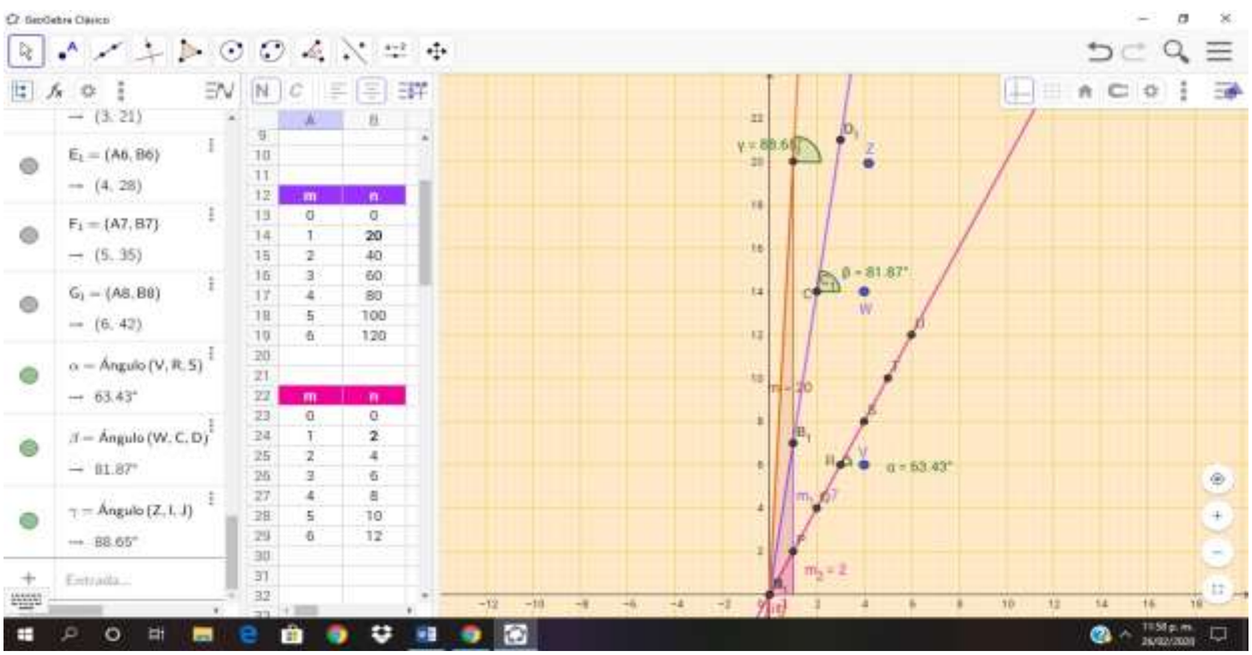
I1.A2.P6 Observa la vista gráfica. Considerando los datos del planteamiento 1, donde el número de aciertos logrados es representado en el eje de las x y el número de puntos obtenidos en el eje y, así como los valores numéricos que acompañan a los ángulos trazados ¿qué interpretación le darías a la gráfica anterior?

____

____

____

2.4 Retomando el planteamiento 1, donde el número de aciertos logrados está representado la literal m y el número de puntos obtenidos por la literal n. Construye 3 tablas, en la primera se otorgan 7 puntos por cada acierto logrado, en la segunda 20 por cada acierto logrado y en la última 2 puntos por cada acierto logrado. Posteriormente gráfica los puntos coordenados derivados de las tablas. Diseña e introduce en la vista algebraica la función que representa cada caso, gráfica la pendiente de cada recta y representarla también en grados.



I1.A2.P7 ¿Cómo se relacionan los puntos obtenidos en cada tabla con su respectiva función de forma algebraica y los valores representados en las áreas sombreadas de la vista gráfica?

____

____

____

I1.A2.P8 ¿Qué recta tiene una mayor pendiente? ¿Qué te llevó a concluir eso?

____

____

____

I1.A2.P9 Basándote en las actividades hasta aquí realizadas, ¿qué es la pendiente?

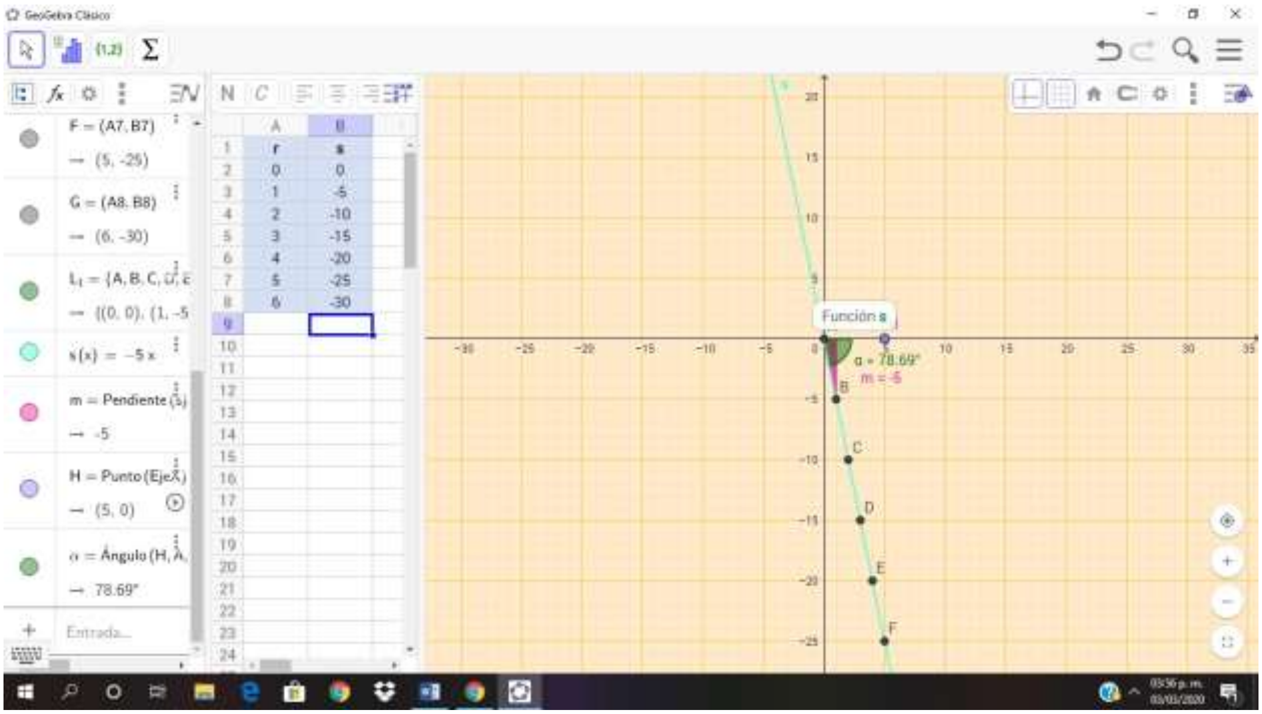
____

____

____

Para analizar otros aspectos de la pendiente, consideremos lo siguiente. Planteamiento 2. El profesor ha decidido disminuir la calificación de los estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra.

2.5 De acuerdo al planteamiento, construye una tabla donde se muestre la cantidad de puntos disminuidos cuando los alumnos fallan en 0, 1, 2, 3, 4,5 y 6 aciertos, así como su respectiva gráfica con línea de puntos. Grafica la pendiente como un área sombreada y como un ángulo. Usando las literales que gustes, diseña la función que representa la situación establecida.



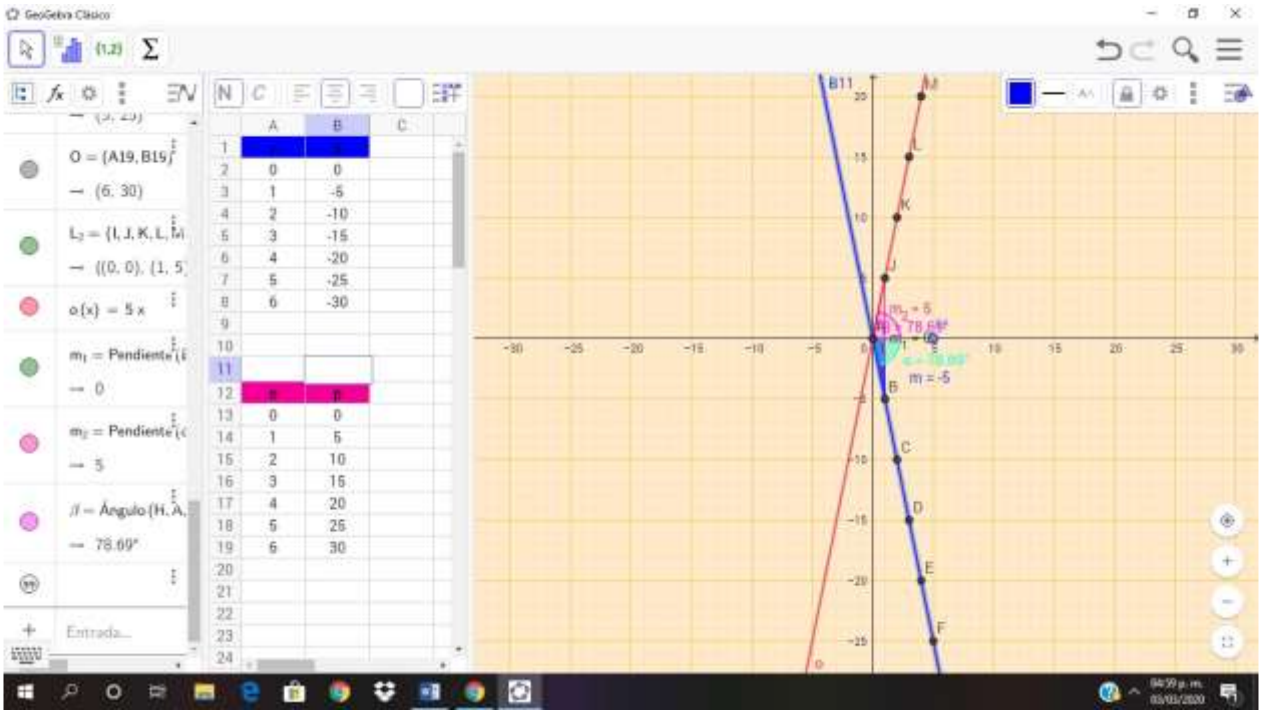
I1.A2.P10 Cuándo el valor de r aumenta ¿qué pasa con el valor de s?

____

____

____

2.6 Con el objeto de realizar un análisis comparativo, ingresa los datos del planteamiento 1.



I1.A2.P11 ¿Qué diferencias existen entre las ecuaciones de cada recta?

____

____

____

I1.A2.P12 ¿Qué diferencias notas en la gráfica de ambas rectas?

____

____

____

I1.A2.P13 ¿Qué diferencia hay entre los valores numéricos de la pendiente de cada recta?

____

____

____

I1.A2.P14 La recta del planteamiento 1, ¿por cuáles cuadrantes del plano cartesiano pasa?

____

____

____

I1.A2.P15 La recta del planteamiento 2, ¿por qué cuadrantes del plano cartesiano pasa?

____

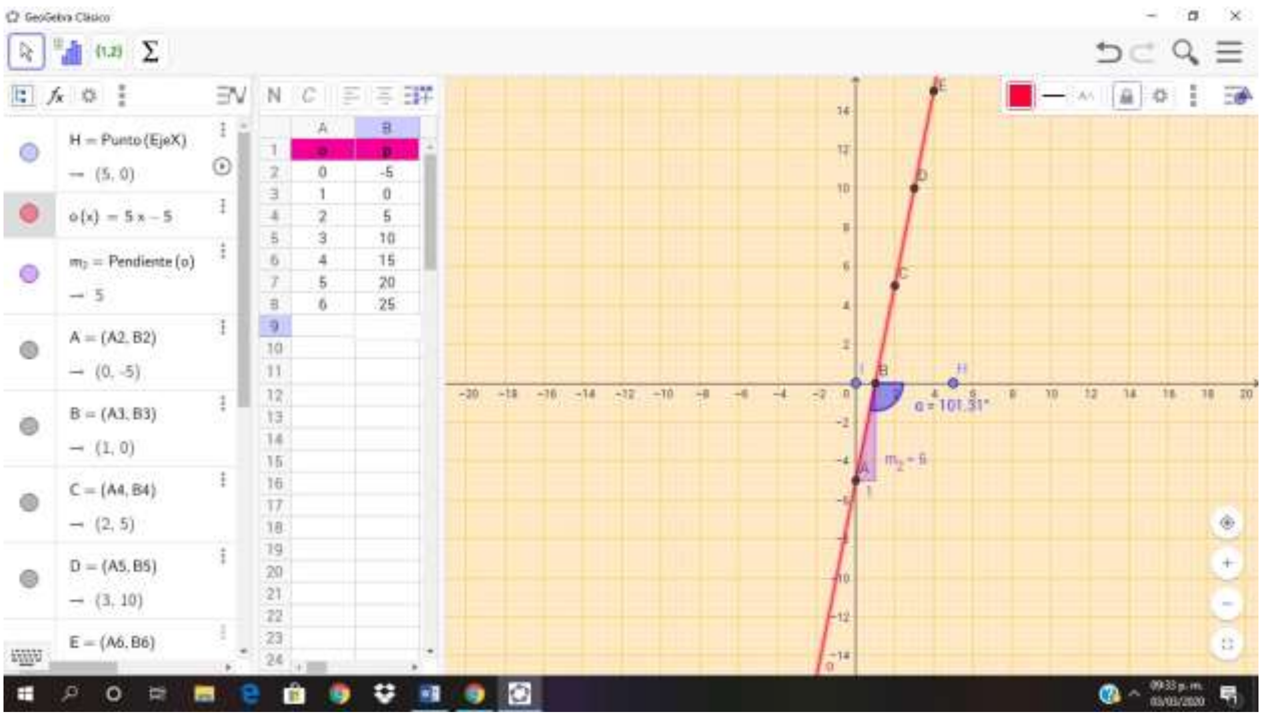
____

____

Actividad 3 La ordenada al origen

Planteamiento 3: Un grupo de estudiantes de primer grado de preparatoria reciben 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado correctamente en su examen de álgebra. El día que se realiza dicho examen todos los alumnos llegaron tarde, por lo que el profesor los reprende quitándoles 5 puntos. Para un mejor manejo de los datos, el número de aciertos logrados estará representado por la literal o y el número de puntos obtenidos por la literal p. Analicemos la información con ayuda del software Geogebra.

3.1 Con los datos del planteamiento anterior construye una tabla con su respectiva lista de puntos, para los estudiantes que tengan 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respuestas correctas. Diseña la función que representa la situación, gráfica la pendiente como un área y como un ángulo.



I1.A3.P1 ¿Cómo incluiste la disminución de los 5 puntos en la tabla?

I1.A3.P2 ¿Cómo incluiste la disminución de los 5 puntos en el diseño de la expresión algebraica de la función?

I1.A3.P3 Observa la gráfica, ¿qué cambios notas con respecto a las gráficas de los apartados anteriores?

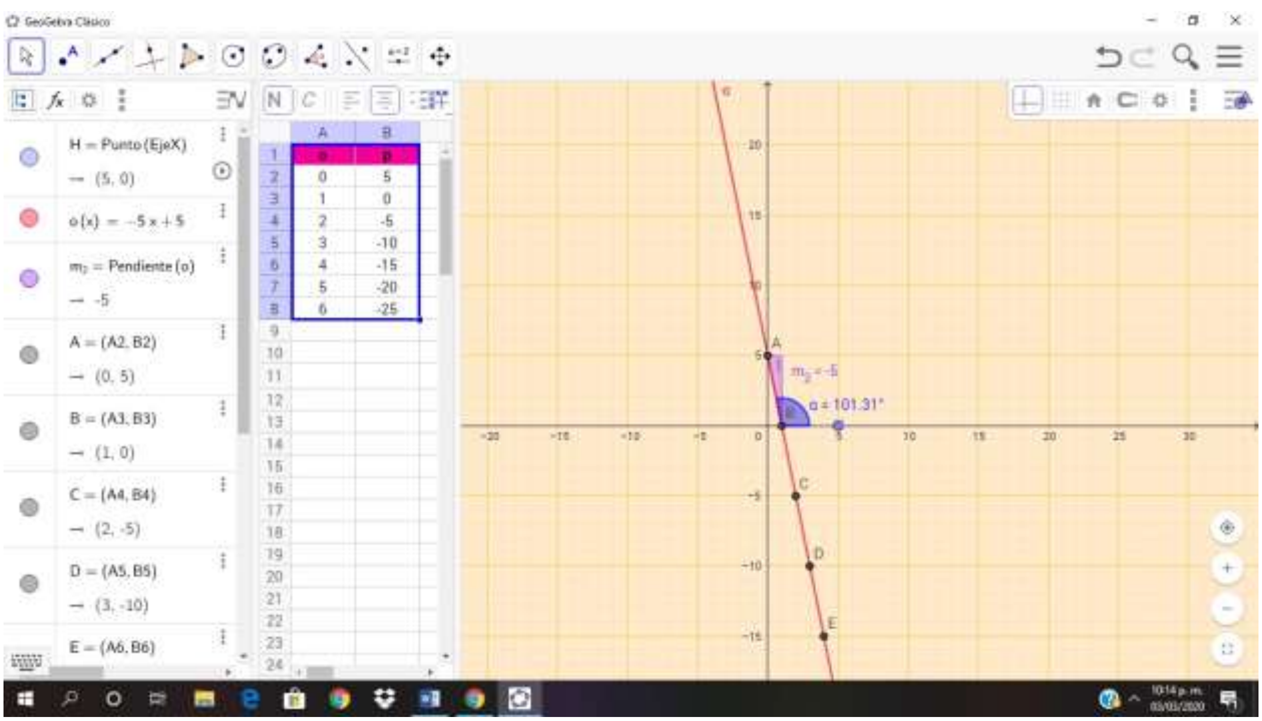
____

____

____

Planteamiento 4. El profesor ha decidido disminuir la calificación de los estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra. Sin embargo les otorga 5 puntos por llegar puntualmente al examen.

3.2 Con los datos del planteamiento anterior construye una tabla con su respectiva lista de puntos, para los estudiantes que asistieron puntualmente y que obtuvieron 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respuestas incorrectas. Diseña la función que representa la situación, gráfica la pendiente como un área y como un ángulo.



I1.A3.P4 ¿Cómo incluiste el aumento de los 5 puntos en la tabla?

____

____

____

I1.A3.P5 ¿Cómo incluiste el aumento de los 5 puntos en el diseño de la función?

____

____

____

I1.A3.P6 Observa la gráfica, ¿qué cambios notas con respecto a la gráfica 3.1?

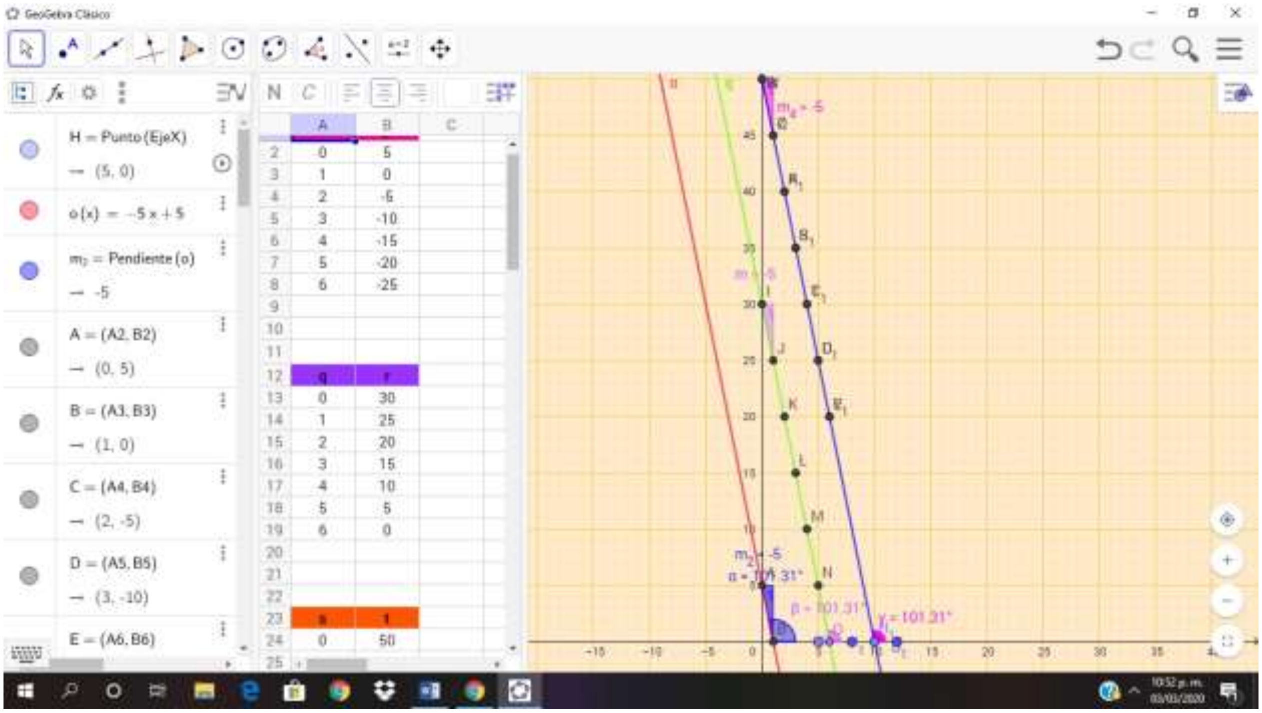
____

____

____

Planteamiento 5. El profesor ha decidido disminuir la calificación de los estudiantes quitándoles 5 puntos por cada pregunta que hayan contestado de forma incorrecta en el examen de álgebra. Sin embargo les otorga 5 puntos extras a los que tuvieron hasta 5 inasistencias durante el curso, 30 puntos extras a los que solo faltaron una vez y 50 puntos a los que nunca faltaron.

3.3 Con los datos del planteamiento anterior construye una tabla con su respectiva lista de puntos, para los estudiantes que tuvieron hasta 5 inasistencias durante el curso, otra para los que solo faltaron una vez y una más para los que nunca faltaron. En las tres tablas se debe considerar aquellos estudiantes que obtuvieron 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respuestas correctas. Así mismo, diseña la función que representa cada situación, con su respectiva gráfica, señalando la pendiente como un área y como un ángulo.



I1.A3.P7 ¿En qué puntos coordenados se intersectan cada una de las rectas con el eje de las ordenadas?

___

___

___

I1.A3.P8 ¿Cómo se relacionan las intersecciones de las rectas con los incrementos en puntos de cada situación presentada en el planteamiento 5?

___

___

___

I1.A3.P9 En el diseño de la expresión algebraica de la función, ¿cómo se representan los incrementos en puntos de cada situación presentada en el planteamiento 5?___

___

___

I1.A3.P10 ¿Define que es la ordenada al origen dentro de una función lineal?

____

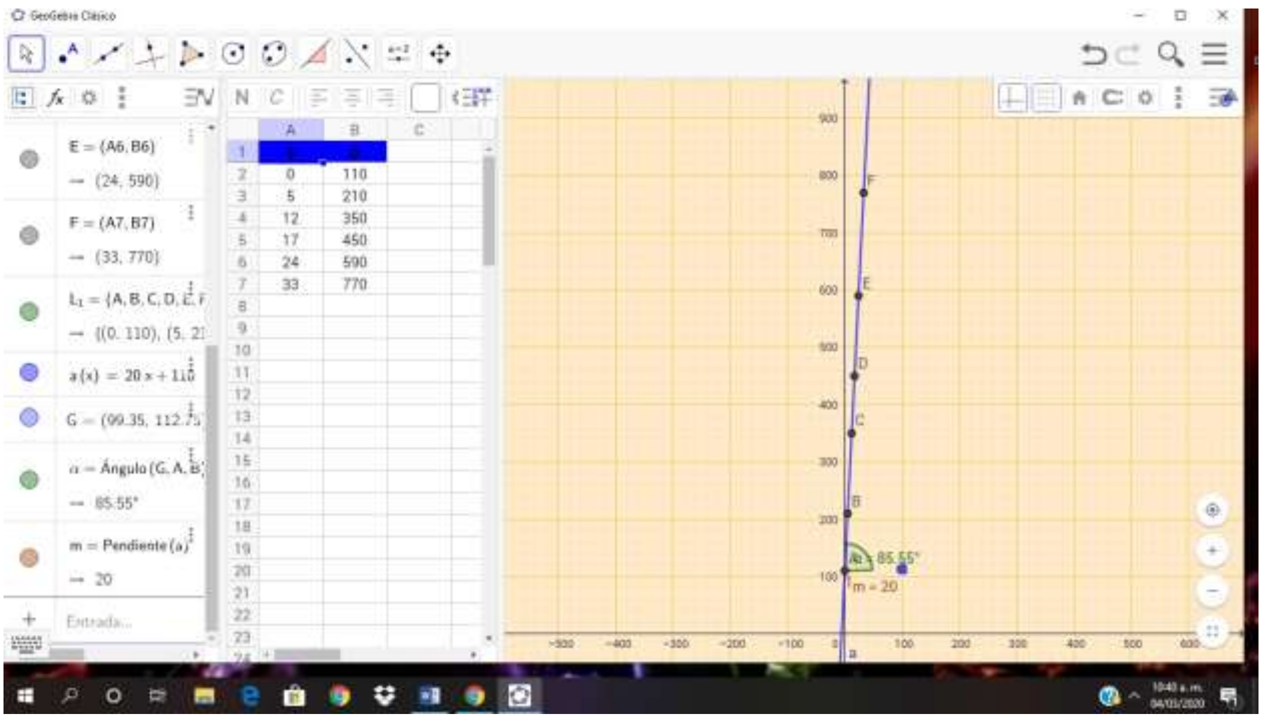
____

____

Actividad 4 Todos los elementos de función lineal, trabajando juntos.

Planteamiento 6. Miguel trabaja como vendedor en una tienda de pinturas para inmuebles. Su salario fijo diario es de $110 y recibe una comisión de $20 por cada bote de pintura que venda.

4.1 Con ayuda de Geogebra diseña una función que represente el salario de un día cualquiera de venta de Miguel. Realiza una tabla con su respectiva línea de puntos donde se refleje el salario del trabajador cuando este vende 0, 5, 12, 17, 24 y 33 botes de pintura. Gráfica la pendiente de la recta como un área y como un ángulo.



I1.A4.P1 Para este planteamiento ¿cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

____

____

____

I1.A4.P2 Para este caso ¿cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

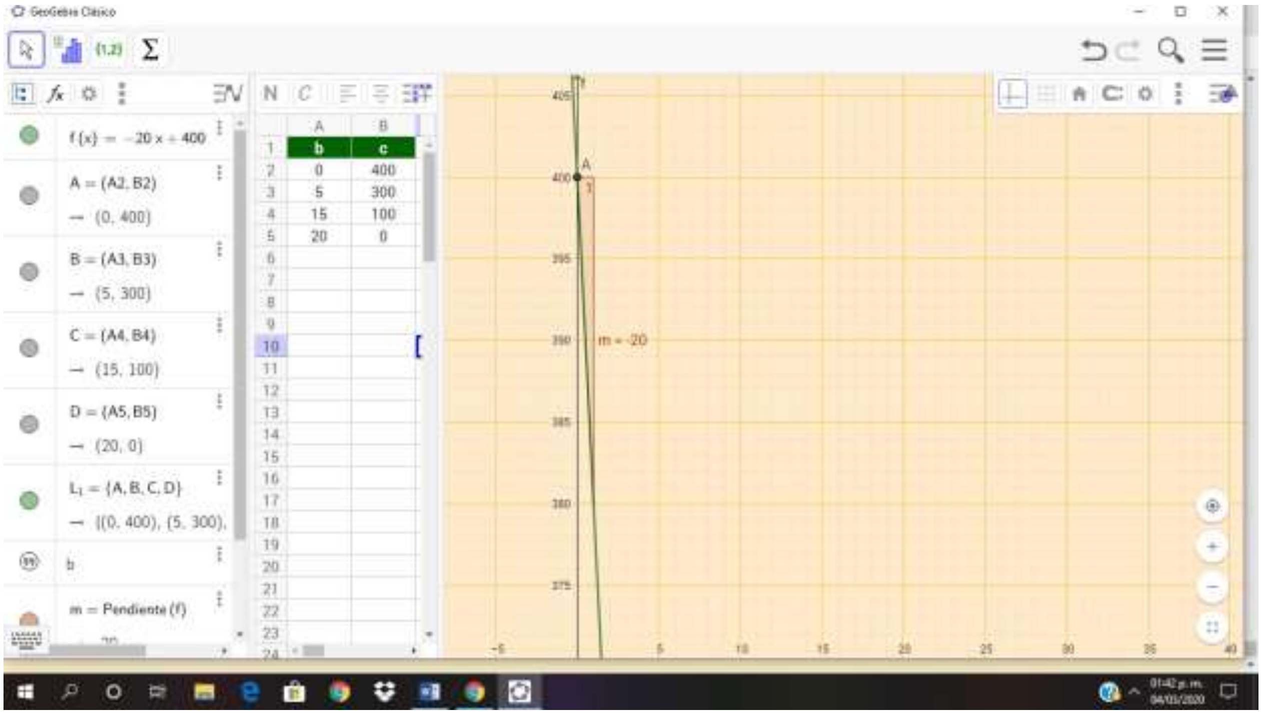
I1.A4.P3 Para este caso explica ¿que representa el valor de la pendiente?

I1.A4.P4 Para este caso explica ¿que representa el valor de la ordenada al origen?

I1.A4.P5 ¿Cuál es la función que represente el salario de un día cualquiera de ventas de Miguel? Explícala.

Planteamiento 7. Al momento de comprar una mini bocina, esta tiene un valor de $400 y posteriormente cada año pierde $20 de su valor.

4.2 Con ayuda de Geogebra diseña una función que permita determinar el valor de la mini bocina en cualquier año. Realiza una tabla con su respectiva línea de puntos donde se refleje el valor de la misma en 0, 5, 15, y 20 años uso. Gráfica la pendiente de la recta como un área.



I1.A4.P6 Para este caso ¿cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

____

____

____

I1.A4.P7 Para este caso ¿cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

____

____

____

I1.A4.P8 Para este caso explica ¿que representa el valor de la pendiente?

I1.A4.P9 Para este caso explica ¿que representa el valor de la ordenada al origen?

I1.A4.P10 ¿Cuál es la función que represente el valor de la bocina en cualquier año? Explícala

Anexo 2

Instrumento 2: cuestionario para el análisis y exploración de los elementos de la función lineal en lápiz y papel

Escuela Preparatoria Oficial Número 169

Asignatura: Pensamiento algebraico

Nombre del alumno: ____

Grado____________ Grupo___________ Turno_____________________ Fecha______________

Instrucciones: Lee cuidadosamente y realiza las actividades que se te solicitan.

c) Se ha comprobado que diferentes animales realizan ciertas actividades en función de la temperatura ambiental, por ejemplo: los grillos cantan más a mayor temperatura y la temperatura puede calcularse $T = (c/5) - 9$, Donde: (T) estará en $°C$ y c en cantos por minuto.

a) ¿Qué datos faltan en la tabla?

C (Cantos/minuto)	$T\ (°C)$
110	
120	
130	17
140	
150	
160	

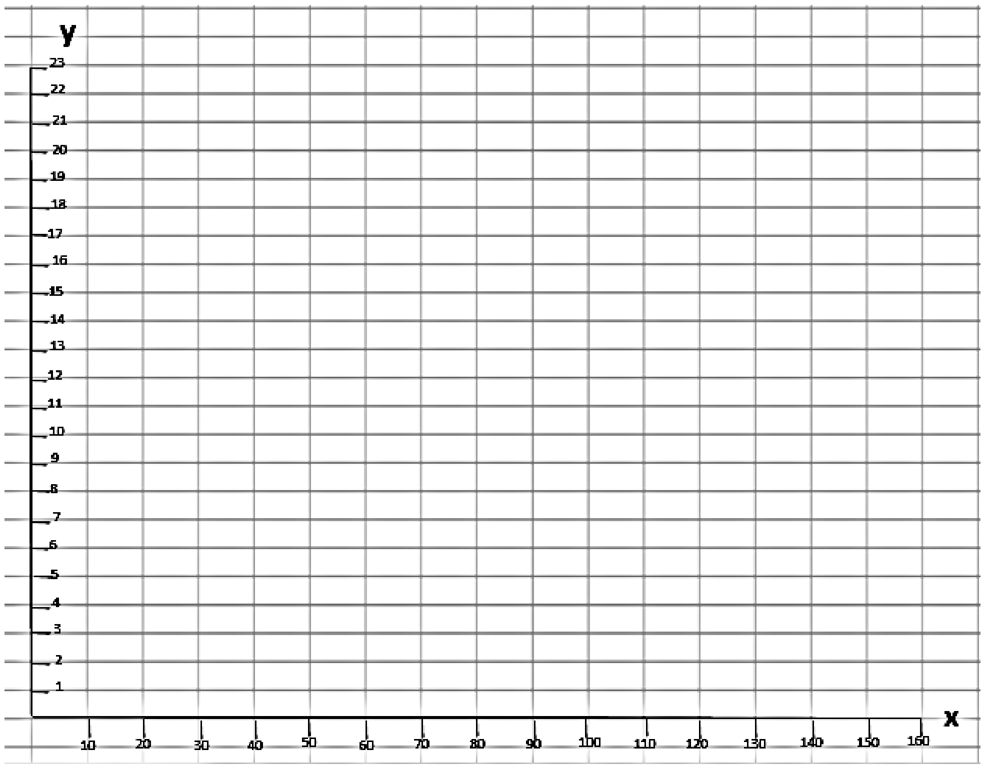
b) ¿Cuál es la variable independiente?

c) ¿Cuál es la variable dependiente?

d) ¿En qué eje del plano cartesiano se deben graficar los cantos por minuto?

e) ¿Qué magnitud debe ser graficada en el eje y?

f) Traza la gráfica.



d) Juan Antonio compró 3 revistas del mismo precio para compartirlas con sus amigos y pagó por ellas $39.00, ¿Cuánto pagará si compra 1, 2, 3, 5, 10 revistas?

a) Completa la tabla

x	$f(x)$
	13
	26
3	39
	65
	130

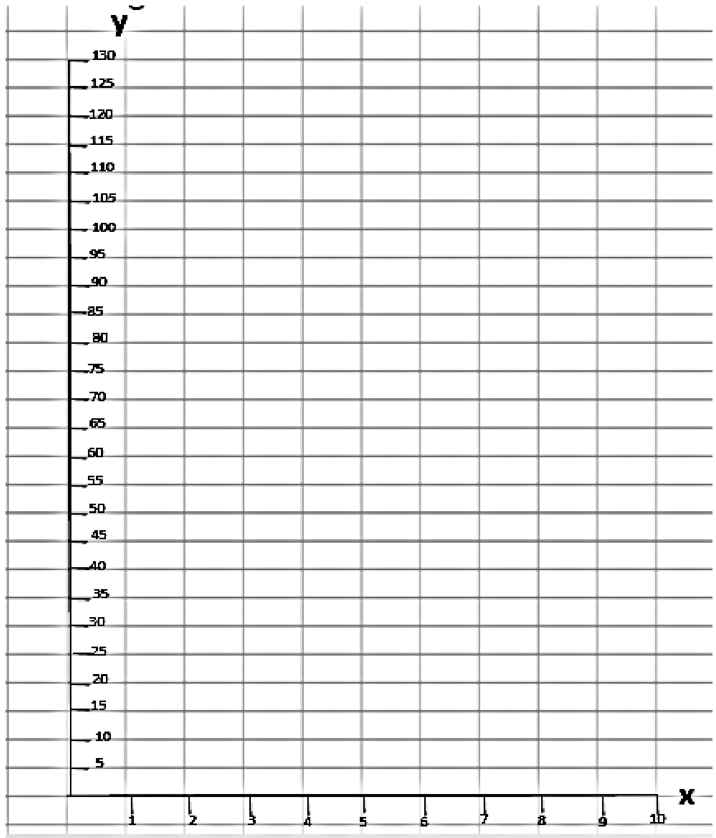
b) ¿Cuál es la variable independiente?

c) ¿Cuál es la variable dependiente?

d) ¿En qué eje del plano cartesiano se deben graficar el precio de las revistas?

e) ¿Qué magnitud debe ser graficada en el eje y?

f) Traza la gráfica.



e) Realiza las actividades que se te piden.

f) Completa las tablas.

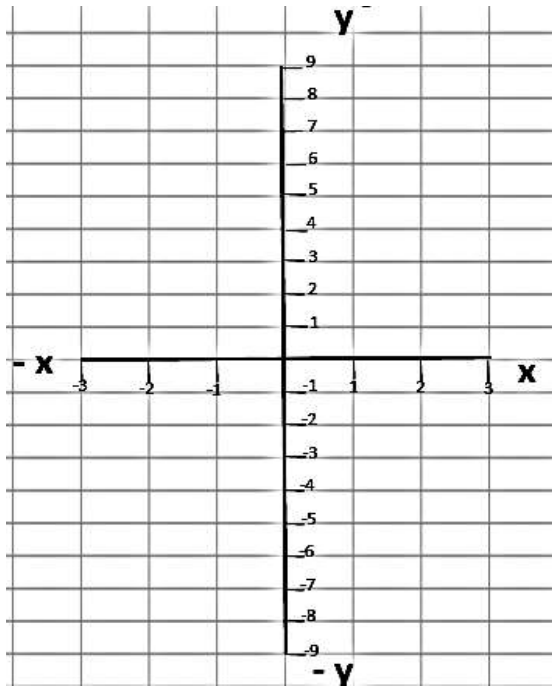
$\boldsymbol{f(x) = -1/3x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

$\boldsymbol{f(x) = 3\,x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $f(x) = -1/3x$ con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función $f(x) = 3x$. Posteriormente, indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.



g) Con cada una de las funciones lineales que se muestran a continuación, realiza las actividades que se te piden.

a) Completa las siguientes tablas.

$\boldsymbol{f(x) = -3x}$

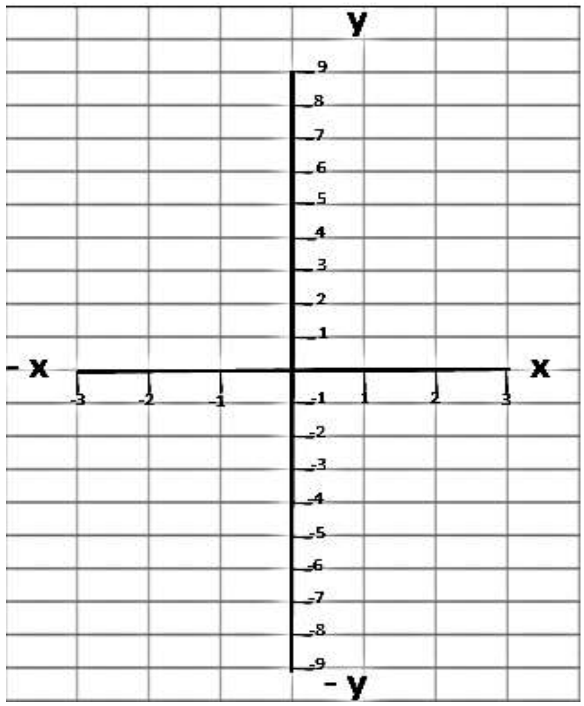
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

$\boldsymbol{f(x) = 3x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función -3x con color amarillo y con color verde traza la gráfica de la función 3x. Posteriormente indica el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico.

5. Realiza las actividades que se te piden.



a) Completa las tablas de las funciones que se muestras a continuación.

$\boldsymbol{f(x) = 2x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

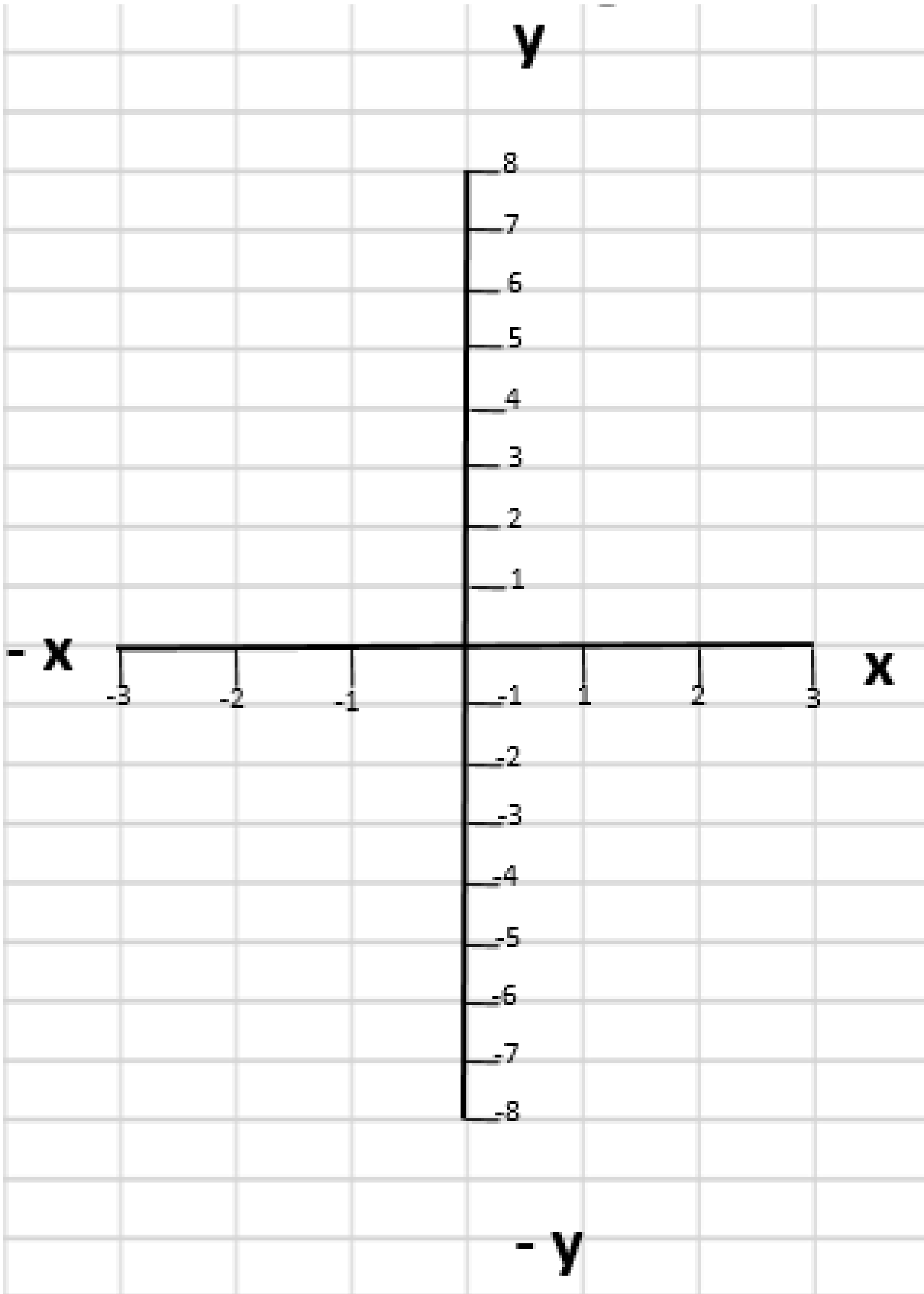
$\boldsymbol{f(x) = 2x + 2}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

$\boldsymbol{f(x) = 2x - 2}$

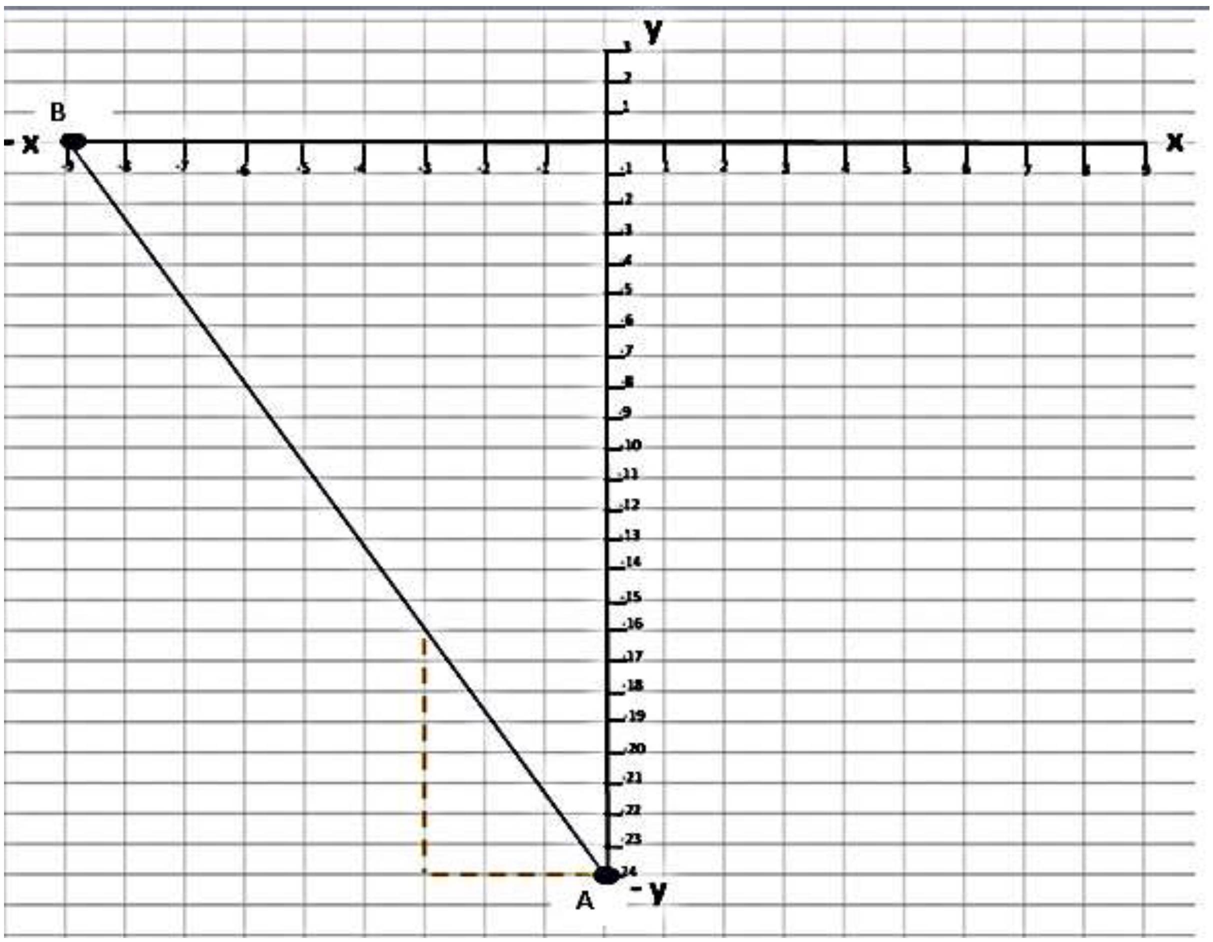
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

b) En el siguiente plano cartesiano, traza la gráfica de la función $2x$ con color amarillo, con color verde traza la gráfica de la función $2x + 2$ y con color rojo traza la función $2x - 2$. Posteriormente, indica en qué punto coordenado se intersectan cada una de las rectas con el eje y.

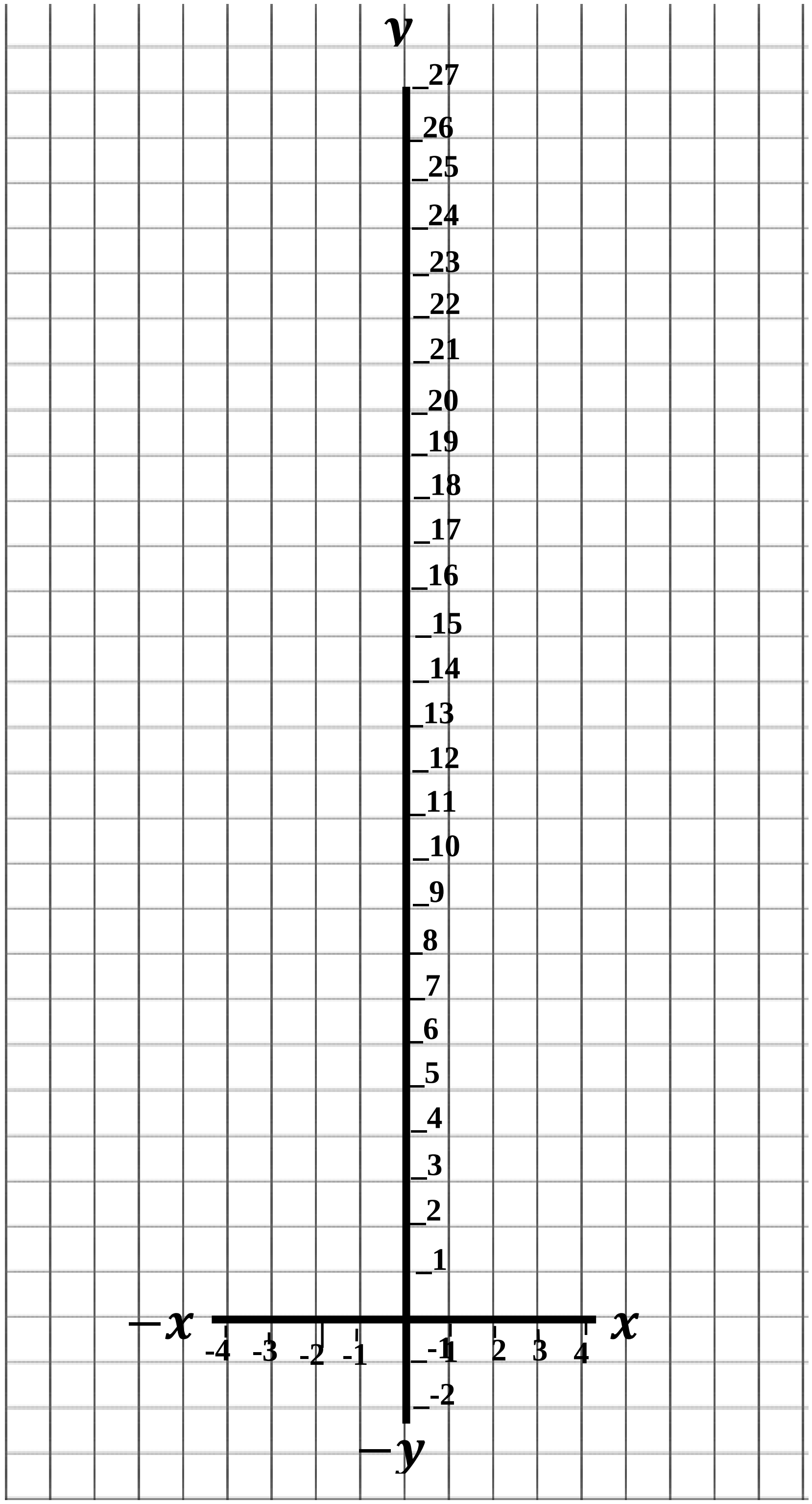


6. Analiza la información que se te proporciona en cada inciso y realiza la actividad que se te requiere.

a) Partiendo de la representación gráfica de la función lineal que se muestra en el siguiente plano, construye la representación algebraica de la misma.



b) Gráfica la recta que pasa por el punto coordenado (-4,7) y cuya pendiente es igual a 5. Posteriormente, construye la representación algebraica de dicha función.



Anexo 3

Entrevista CP1

Entrevista al CPYGS

Introducción para el estudiante: La presente entrevista tiene como objeto observar, analizar y reflexionar sobre los procesos que llevaste a cabo al dar respuesta al cuestionario dedicado al análisis y exploración de los elementos de la función lineal, el cual realizaste hace algunos días. Así mismo, conocer tus percepciones en cuanto a la resolución del mismo. Por lo que, te plantearé una serie de preguntas relacionadas a tus respuestas a dicho cuestionario. Te reiteró que el propósito de la entrevista es reflexionar sobre tus anotaciones, lo cual no interfiere de ninguna manera en tu proceso evaluativo. Considerando lo anterior y que no existen respuestas buenas ni malas, por favor, siente con libertad y confianza para responder mis cuestionamientos. De ante mano, agradezco tu participación y buena disposición.

I2.A1 Identificación de la variable independiente y la variable dependiente

E: ¿Cómo determinaste los valores faltantes en la tabla?

CPYGS: Tomé la fórmula para determinar a T que se encontraba en el problema. Luego, vi que en la tabla había una letra c, que como decía en el párrafo, eran los cantos por minuto. Sustituí esos números en la fórmula para obtener a T y los resultados los escribí en la tabla, en la columna de T.

E: ¿Cuál consideras que era el objetivo de usar la fórmula que mencionas?

CPYGS: En el párrafo dice que los grillos cantan más, cuando hay más temperatura. La fórmula es para saber cuánto cantan los grillos para que aumente la temperatura.

E: ¿Entonces, los datos de la tabla que representan o a que se refieren?

CPYGS: A los cantos que se necesitan para llegar a una temperatura.

E: Volvamos a darle lectura al texto de la pregunta 1.

CPYGS realiza la lectura en voz alta.

E: ¿Se necesita conseguir cierta cantidad de cantos para obtener cierta temperatura?

La alumna se queda pensando y dudando un poco.

CPYGS: No, bueno no, creo que no… mmmm, más bien, puedo conocer de cuanto es la temperatura, si antes ya se la cantidad de cantos por minuto.

E: De acuerdo a las actividades que realizaste tanto en Geogebra, como el cuestionario escrito ¿cómo definirías a la variable independiente?

CPYGS: Es la que está ahí, no se modifica y no necesita de otro número.

E: En el inciso b de la pregunta 1, se te cuestionó, cuál era la variable independiente, respondiste que C- cantos por minuto, ¿por qué? ¿Cómo identificaste la variable independiente dentro de la problemática del planteamiento 1?

CPYGS: Primero, porqué en la tabla ya nos daban los cantos por minuto, eran cantidades que ya estaban ahí,… a porqué la c que puse en la respuesta es minúscula. Luego, porqué viendo la fórmula, necesitaba el valor de los cantos por minuto para calcular la temperatura. Entonces, supe que esa era la variable independiente, porque cantos por minuto era el que no necesitaba de otro.

E: ¿Cómo identificarías la variable independiente dentro de la tabla?

CPYGS: Está en la primera columna, donde están los valores ya dados, donde dice c.

E: ¿Cómo llegaste a esa conclusión?

CPYGS: Cuando trabajamos en Geogebra, los primeros datos de la tabla ya no los daban en el problema, ósea ya no cambiaban, en la segunda columna, teníamos que calcularlos usando una fórmula.

E: En el inciso c de la pregunta 1, se te cuestionó sobre cuál era la variable dependiente, respondiste que era T- temperatura. ¿Cómo llegaste a esa conclusión?

CPYGS: Porqué para calcular la temperatura necesito, tener primero los cantos por minuto. Ósea, la temperatura depende de la cantidad de cantos por minuto.

E: Observó que anotaste frente a las pregunta del inciso b la letra x y frente a la pregunta c la letras y ¿A qué te refieres con esto?

CPYGS: Esas letras corresponden a los nombres de los ejes cartesianos y las anoté ahí porque en los siguientes incisos, me pedían en que eje se tenía que graficar los cantos y la temperatura. Como en Geogebra, la primera columna va en x y la segunda en y.

E: En el inciso d se te preguntó en que eje del plano cartesiano se debían graficar los cantos por minuto, respondiste que en la x, supongo que te refieres al eje x ¿cómo llegaste a esa conclusión?

CPYGS: Así, si si si, si me refiero a ese eje, y bueno, como le decía en la tabla los números de la primera columna son de los que depende la segunda columna, así como en Geogebra, la primera columna se pone en x y la segunda en y, entonces la primera columna, como ya son números que nos dan, es la variable independiente y lo que calculamos en la otra columna variable dependiente. ¿Si no? así va. Así que, c es la variable independiente y está en la primera columna de la tabla, se gráfica en x y temperatura que está en la segunda columna va en y. Lo que nunca entendí es la C para que era.

E: Sí, así va, y la C mayúscula se refiere a que la temperatura está dada en grados centígrados. Bueno, te iba preguntar cómo determinaste que la magnitud que debía ser presentaba en el eje y era temperatura, pero considero que ya me contestaste con tu respuesta a la pregunta anterior. Pasemos a la siguiente pregunta.

E: En el inciso f representaste algunos elementos gráficos en el plano cartesiano, ¿cómo lo hiciste?

CPYGS: Me fui a la tabla y con los números que tenía en las 2 columnas, hice coordenadas, y las representé en el plano cartesiano. Ya sabía que en x, iban los cantos por minuto y en y la temperatura. De hecho, las coordenadas así se formaron el primer valor con cantos por minuto y el segundo eran los de la temperatura.

E: Hasta aquí concluimos con la pregunta 1, ahora vamos con la resolución que diste a la pregunta 2. Relátame, como le diste solución a este segundo planteamiento.

CPYGS: Era lo mismo que en la pregunta 1, bueno, era más fácil creo. Era 3 revistas que costaban 39, entonces dividí 39 entre 3, para saber cuánto costaba una, me dio 13. Con eso pude completar la tabla. Una revista 13, 2 revistas 26, y así seguí con los demás espacios. También ya sabía que la primera columna de la tabla era la variable independiente, ósea x y la segunda columna la variable dependiente y, y así lo marque arriba de la tabla. Con eso fue más fácil resolver las demás preguntas. La variable independiente era la que estaba en la primera columna, número de revistas. La variable dependiente, el precio. Y tiene lógica, porque el dinero que se tendría que pagar depende de la cantidad de revistas que compre. El eje del plano cartesiano donde se tenían que graficar el precio de las revistas era en y, porque estaba en la segunda columna de la tabla. Luego formé coordenadas con los valores de la tabla y las grafique en el plano cartesiano.

E: No respondiste el inciso e, que preguntaba que magnitud debe ser representada en el eje x, y esta vez no colocaste ningún rótulo para los ejes cartesianos de la gráfica.

CPYGS: Así deberás, no me di cuenta que había un inciso e, es que estaba donde la grapa del examen dobla a las hojas.

E: Bueno, ¿y qué respuesta le darías a esa pregunta?

CPYGS: ¿A la del inciso e?

E: Sí, esa.

CPYGS: ¿Me la puede repetir otra vez, por favor?

E: Sí claro, ¿Qué magnitud debe ser representada en el eje x?

CPYGS: Pues la cantidad de revistas, ¿no? Aaa no, el número de revistas. Bueno, es lo mismo, ¿no?

E: Técnicamente, si sería lo mismo. ¿Cómo llegaste a esa conclusión?

CPYGS: Porqué las revistas están en la primera columna de la tabla.

E: En cuanto a los rótulos de la gráfica, ¿por qué esta vez no los colocaste?

CPYGS: ¿Cómo los rótulos? No entiendo.

E: Sí, los nombres que lleva cada eje del plano cartesiano según las variables del problema.

CPYGS: Aaaa, si es cierto, se me pasó.

E: ¿Cómo los colocarías?

CPYGS: En la x, la revistas y en y, el precio. Bueno, en x, el número de las revistas y en y, el precio del número de revistas.

E: Exacto, así es. Ahora vamos a la pregunta 3. ¿Cuál consideras que fue el tema central de la pregunta 3?

CPYGS: La pendiente, ¿no?

E: Sí, efectivamente así es. Bueno, avancemos con las tablas. ¿Qué proceso seguiste para completar las tablas del inciso a de la pregunta 3?

CPYGS: Era muy similar a lo que hicimos con Geogebra, me daban números en la primera columna y con una fórmula, calculaba los valores de la segunda columna.

E: ¿Qué tan fácil o difícil, te fue completar las tablas?

CPYGS: La primera si me costó trabajo, tenía duda en las fracciones, ve que le estuve preguntando a cada rato de eso. La segunda tabla, fue fácil, no me costó trabajo.

E: El inciso b de la pregunta 3, te pidió que graficaras la función presente en cada tabla. Posteriormente, marcaras el área o ángulo de inclinación de la recta con su respectivo valor numérico. ¿Cómo ejecutaste dicha tarea?

CPYGS: Graficar la función $3x$, fue fácil. La que me costó trabajo fue la de $-\frac{1}{3}x$, no entendí como marcar las fracciones.

E: Haber, vamos a volverlo hacerlo. Cada cuadrito de la gráfica representa un entero, ¿estás de acuerdo?

CPYGS: mmm, sí.

E: Si te das cuenta, todos los valores que aparecen en la segunda columna de la primera tabla, tienen un mismo denominador. ¿Cuál número es ese denominador que todas las fracciones de la segunda columna de la primera tabla tienen en común?

CPYGS: ¿El de abajo es el denominador?

E: Sí.

CPYGS: Aaaa, entonces es el 3.

E: Exacto, el denominador es el 3. Entonces necesitamos convertir esos enteros a tercios, para poder representar las fracciones. ¿Cómo convertiríamos un entero en tercios?

CPYGS: ¿Dividiéndolo en 3?

E: Exacto. Ahora, el numerador que es la parte de arriba de la fracción, me indica cuantos tercios necesito representar. Veamos la tabla. El primer valor que debo representar en el eje x, ¿Cuál es?

CPYGS: 3 positivo.

E: ¿Y el primer valor para representar en y?

CPYGS: $-\frac{3}{3}$, pero el problema no es con ese, porqué ya sé que $-\frac{3}{3}$, equivale a 1, y así si puedo formar la primera coordenada (3,1). El problema es con las demás fracciones que no se pueden convertir en enteros. Ahí es donde no puedo.

E: Ok, vamos al siguiente valor para x, ¿Cuál es?

CPYGS: 2

E: ¿y para y?

CPYGS: $-\frac{2}{3}$