INSTITUTO SUPERIOR DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEL ESTADO DE MÉXICO

COMPRENSIÓN DE LAS SUCESIONES ARITMÉTICAS DESDE LA TRANSFORMACIÓN DE SUS REPRESENTACIONES EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INVESTIGACIÓN DE LA EDUCACIÓN

PRESENTA

JUAN CARLOS SALGADO HERNÁNDEZ

LICENCIADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

COMITÉ TUTORAL

TUTOR: M. EN C. MARÍA DEL ROCÍO NAVA ALVAREZ

COTUTOR: MTRO. APOLINAR REYES GUTIÉRREZ

LECTOR: MTRO. FRANCISCO SÁMANO MATEO

TOLUCA, MÉX. ENERO, 2021

DEDICATORIA

A mis padres, porque siempre he contado con su apoyo de forma incondicional y han depositado su confianza en mí. Porque en ellos siempre he encontrado refugio y consejo. A ellos que son mi pilar fundamental.

A mis hermanos, porque han sido ejemplo y amigos de toda la vida, lo que he aprendido y lo que soy también es gracias a ellos.

A ti Eri, por ser la mujer que me complementa, porque tu impulso ha sido vital para lograr esta meta y siempre me has motivado a superarme. Cada momento que sacrificamos juntos ha rendido frutos. Tu amor me hace fuerte.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. Porque en su comunidad encontré un espacio de formación que me permite concebir la realidad de manera distinta y me llevó a desarrollar una mirada crítica ante la realidad que observo.

A la M. en C. María del Rocío Nava Alvarez, por ser guía en este trayecto. Su esfuerzo y consejo son pilar fundamental del trabajo desarrollado en esta tesis. Su conocimiento y empeño me motivó a superar mis propias expectativas y buscar siempre una forma diferente de hacer las cosas.

Al Mtro. Apolinar Reyes Gutiérrez por confiar en mí. Porque ha sido un gran apoyo en mi formación académica y me ha brindado oportunidades invaluables. Su guía me permitió concluir satisfactoriamente esta tesis.

Al Mtro. Francisco Sámano Mateo por su consejo y apoyo. Los aportes que hizo han nutrido el trabajo de tesis y han impactado de manera significativa en su estructura.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática, tal como se conoce en la actualidad, es el producto del desarrollo de grandes civilizaciones a lo largo de la historia de la evolución humana. Se construye en la búsqueda de interpretar y comprender los fenómenos que tienen lugar en el entorno, así mismo, se nutre de los significados y las representaciones que se generan en torno a ella. Como una expresión de la mente humana, también se observa cercana a la búsqueda de verdades lógicas, expresiones generales, afirmaciones particulares y capacidad de análisis dentro de un mismo sistema. Desde la aparición de los primeros indicios de los números, en oriente medio hace más de 10,000 años, pasando por el nacimiento del álgebra en Babilonia hacia el año 2,000 a.C. la invención del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, hasta la demostración del último teorema de Fermat en 1994 por Adrew Wiles y la conjetura de Poincaré por Gorigori Perelman en 2002, la matemática siempre ha estado rodeada y bien representada por un lenguaje propio que la caracteriza.

La matemática como ciencia, sienta sus bases constitutivas sobre objetos en apariencia simples, pero complejos a la hora de intentar definirlos. Tales objetos son número, punto, recta, entre otros, los cuales pueden considerarse sencillos al tratar con sus representaciones, pero no existe un total acuerdo a la hora dar una definición; son términos indefinidos a partir de los cuales se construye la teoría. Se puede llegar a comprender mejor dichos objetos al establecer relación entre los mismos, a partir de sus representaciones dentro de un sistema de signos. Dentro de tales sistemas, las relaciones planteadas, así como las reglas que rigen su uso, crean cierta armonía que da sentido al uso de representaciones y estudio de los mismos objetos matemáticos. Esto promueve, en cierto modo, el avance en el estudio de las matemáticas, la creación de nuevos problemas y la superación de obstáculos para la misma ciencia.

La historia de las matemáticas siempre está ligada a la historia de sus representaciones. Contar la historia de los símbolos que caracterizaron el pensamiento de los matemáticos a través del tiempo, es contar la historia misma de las matemáticas. Cada símbolo matemático lleva en sí toda una herencia cultural que perdura hasta nuestros días. Basta con revisar, por ejemplo, la historia del símbolo que denota al número 1, la cual surge desde una marca en arcilla hasta el establecimiento del sistema indo-arábigo; portando en sí la noción de conteo, la idea de unidad y presencia. Además, su uso sigue tan vigente en situaciones tan simples como el lenguaje cotidiano, hasta situaciones más complejas como el lenguaje de programación y los sistemas informáticos. De esta forma, se asume lo que Leibniz plantea sobre la elección de los símbolos y su relación profunda con el objeto representado: “un símbolo no debe elegirse arbitrariamente; debería ser una pequeña historia sobre la cosa simbolizada, debería ‘representar la naturaleza más profunda de la cosa” (Sierpinska, 1994, p. 25).

Considerando que la matemática pura es una ciencia racional, sistemática y verificable, pero no objetiva (Bunge, 1995), necesariamente requiere de medios no materiales para que sus objetos tengan existencia. Por lo mismo, se concibe como una de las principales dificultades el hecho de que, en matemáticas, a diferencia de otras áreas del conocimiento, no es posible remitirse a los objetos que dan origen a lo que se trata en el aula. En matemáticas, para poder remitirse a los objetos de conocimiento, los cuales nunca son concretos, solo es posible a través de representaciones, pues son el único medio por el cual se puede trabajar sobre el objeto (Duval, 2016). Debido a que pueden existir múltiples representaciones para un mismo objeto matemático la tarea se vuelve compleja y refleja a la vez las dificultades que pueden enfrentar los sujetos en vías de aprender matemáticas.

Desde la perspectiva sistémica de la educación en México, se asume la existencia de un problema en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La problemática que enfrenta la Didáctica de las Matemáticas está directamente influenciada por el acceso a los objetos matemáticos a través de sus representaciones. Tal problema se evidencia en los resultados de evaluaciones nacionales como el Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (PLANEA) e internacionales como el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés). En los resultados de las pruebas se reconoce que los alumnos poseen las habilidades apenas básicas para continuar aprendiendo en los niveles escolares subsecuentes.

Al respecto, en cada uno de los niveles educativos existen momentos clave del aprendizaje de las matemáticas: la creación de la noción de número en preescolar, el descubrimiento de propiedades de las operaciones y las figuras en primaria, el tránsito de la aritmética al álgebra en secundaria, el desarrollo de nociones de cálculo en bachillerato. Considerando que la generalización es el centro de las matemáticas y la tendencia natural a expresar patrones y regularidades (Mason, 1999), se considera crucial, no más importante, el transito aritmética-álgebra en educación secundaria.

En dicho tránsito, se da un salto entre representaciones. En aritmética los números son siempre expresados a través de sus representaciones habituales, mientras que en álgebra los números pueden expresarse como incógnitas o variables a través de literales. Es más, una forma de ver el álgebra es como aritmética generalizada (Kaput, 2000). De esta manera, se promueve el uso de la habilidad para expresar generalidades y adentrarse en el estudio del álgebra y el lenguaje que la caracteriza.

De la misma forma se reconoce que, los conocimientos que se estudian al trabajar contenidos de álgebra, se encuentran en el límite entre las matemáticas que se enseña en primaria y las de secundaria. Generalmente los estudiantes de primaria utilizaban las letras en matemáticas para representar números, lo hacen solamente en fórmulas que había que memorizar sin comprender. En secundaria, por el contrario, es necesario comprender y asimilar que las letras representan números que pueden variar o ser desconocidos, según el enfoque. Además, una propiedad de las literales es que pueden ser operadas como conocidas para resolver situaciones problema de manera eficiente. Lo que se espera es que el estudiante se apropie y fortalezca continuamente el lenguaje que le permita expresar generalizaciones, operar cantidades desconocidas y llegar a conocerlas, además de traducir dichas expresiones al lenguaje común y viceversa, para poder resolver problemas.

Desde esta perspectiva, se considera la importancia del estudio de las sucesiones aritméticas debido a que son un contenido directamente relacionado con la acepción del álgebra como número generalizado. Además, se considera que es un tema que comienza su estudio desde los primeros años de escolarización con el concepto de número y continúa hasta el bachillerato con el estudio de las series en el cálculo. En secundaria, es con este contenido que se promueve la incursión del alumno en el uso del lenguaje propio del álgebra.

En el programa de estudio de matemáticas de secundaria que emite la Secretaría de Educación Pública (SEP), se plantea que el alumno debe construir expresiones algebraicas a partir de una sucesión y utilizar dicha expresión para analizar sus propiedades (SEP, 2017b, p. 175). En este aprendizaje esperado, se refleja un vínculo entre las sucesiones y las representaciones, centro de la presente investigación. Esto se puede expresar en términos de los referentes principales del estudio Duval (1993, 1999, 2006, 2016) y Sierpinska (1990, 1994): se busca que el alumno reconozca una situación vinculada con una sucesión, a partir del registro en el que esta expresada, le de tratamiento y posteriormente la transforme a un nuevo registro.

Al tener como referente el escenario anterior, se planteó la necesidad de desarrollar una investigación cuyo objetivo fue analizar la comprensión que logran los estudiantes de primer grado de secundaria de las sucesiones aritméticas, a partir de la transformación de las representaciones que la docente utiliza en el aula. El presente trabajo comprende un informe de tal investigación. El estudio se hace a través del análisis de la realidad que viven los alumnos en un aula de matemáticas en el primer grado de una escuela secundaria al norte del estado de México. La forma en la que se desarrolla el estudio es a partir de la observación de clase para identificar y describir el tipo de representaciones que utiliza la docente y que promueve con los alumnos. El eje central se constituye con el análisis de los resultados de dos cuestionarios aplicados, así como el trabajo desarrollado por cuatro alumnos. Esto se hizo con el fin de identificar el tipo de respuestas y relacionarlas con algún nivel de comprensión (Sierpinska, 1994) y con el tipo de transformación de representaciones que se promueve (Duval, 2006, 2016).

El trabajo se desarrolla en los siguientes apartados:

En el primer capítulo denominado *El problema de las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar*, se exponen los puntos que llevaron al desarrollo de la investigación. Se describe el proceso de problematización desde dos perspectivas distintas, pero íntimamente relacionadas: enfoque de la evaluación y los enfoques de enseñanza de la matemática. Se vincula a las representaciones con la comprensión y se justifica la importancia de ambas categorías de estudio. Para cerrar el capítulo, se describe la importancia del tópico de sucesiones aritméticas a nivel curricular.

En el capítulo segundo, denominado *Fundamentos teóricos para la investigación*, se desarrollan las categorías que forman parte del tema de investigación. Se comienza con un análisis de la comprensión desde la perspectiva de Anna Sierpinska en las que se describen las operaciones mentales involucradas en la comprensión, las cuales hacen las veces de niveles de comprensión. Posteriormente, se describe la comprensión desde la perspectiva de Raymond Duval y se vincula el tema directamente con las transformaciones de las representaciones. De igual forma, se describe qué son las sucesiones en general y las sucesiones aritméticas en específico. Para finalizar el capítulo, se enuncian algunas investigaciones relacionadas.

El apartado del *Diseño metodológico*, que constituye el tercer capítulo del trabajo, contiene una descripción de la estrategia general que permitió el desarrollo de la investigación. Se describe el contexto en el que se llevó a cabo el estudio, así como algunas de las características de los alumnos participantes. También, se incluye una descripción de los instrumentos empleados en la investigación, específicamente de los cuestionarios aplicados a todo el grupo y la secuencia desarrollada con cuatro alumnos seleccionados como informantes.

El análisis de los instrumentos y las observaciones desarrolladas en el campo se encuentra en el capítulo cuarto denominado C*omprensión y representación de las sucesiones. Análisis de resultados*. La observación se desarrolló de manera asistemática y en el análisis se prioriza la descripción de las representaciones y las transformaciones de representaciones que tienen lugar. Además, en este mismo capítulo se describen los tipos de respuesta que dieron los alumnos. Afirmaciones que corresponden con cada una de las preguntas pertenecientes a los dos cuestionarios aplicados; se vinculan con los niveles de comprensión de Sierpinska (1994) y la transformación de representaciones de Duval (2006, 2016). Otro apartado del capítulo es en el que se describen los tres planteamientos de la secuencia que se aplicó con los alumnos seleccionados.

Finalmente, en el capítulo quinto *Discusión y conclusiones* se trabajan algunas ideas derivadas del análisis y se apuntan las principales conclusiones a las que se llega con el estudio. Las ideas descubiertas muestran el uso limitado de los registros de representación y las transformaciones de las mismas. Esto conduce a respuestas con procedimientos tendientes a algoritmos mecanizados. En este mismo capítulo se da respuesta a la interrogante que llevó a la realización de la investigación. Se concluye que la comprensión que logran los alumnos en el tema de sucesiones aritméticas es limitada al no lograr la conversión de representaciones de manera consciente.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE LAS REPRESENTACIONES EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

PRESENTACIÓN

En matemáticas el uso de sistemas de escritura, para los objetos que son parte de ellas, es necesario. Estos sistemas se forman por elementos que tienen la función de representar, por motivos prácticos, un objeto que no está disponible; comúnmente son llamadas representaciones semióticas (Duval, 1993). Dichas representaciones semióticas son variadas de acuerdo con la rama de las matemáticas que se trate: aritmética, álgebra, geometría, estadística, probabilidad, etc. El uso que el docente promueve de estas representaciones, a menudo inconexas, causa confusión en el estudiante, lo que dificulta el aprendizaje de las matemáticas escolares. Además, las actividades que desarrollan los alumnos, propuestas por el docente, parecen no estar haciendo caso de la complejidad misma de la ciencia y del uso de las representaciones para su aprendizaje. Sin embargo, dichas representaciones son la única forma de trabajar con objetos abstractos como los que componen a las matemáticas (Duval, 2016). Por lo tanto, las representaciones son imprescindibles para aprender matemáticas en la escuela.

Este es un panorama del problema que se pretende abordar en la presente investigación, el cual se considera que no se halla en el uso o no de las representaciones sino en cómo los alumnos, con la guía del docente, las están utilizando y la comprensión que logran en el proceso.

Para abordar la investigación se desarrolló la problematización a partir de la evaluación (a través de pruebas nacionales e internacionales) como perspectiva para identificar y dimensionar el problema del aprendizaje de las matemáticas. Posteriormente, se habla de los enfoques de la enseñanza de las matemáticas como muestra de la complejidad de las matemáticas, específicamente de la didáctica de esta ciencia. Se llega a identificar el carácter simbólico de las matemáticas y se ubican el problema particular dentro de *Los grandes problemas de la matemática* (Freudenthal, 1983). Finalmente, se particulariza el problema de estudio en relación con las representaciones y la comprensión, enfocado a las sucesiones aritméticas.

1.1. PERSPECTIVA DEL PROBLEMA DESDE LA EVALUACIÓN

Conocer la realidad de un sistema educativo desde sus múltiples perspectivas y su complejidad es una tarea ardua. Contar con un panorama del contexto educativo del país puede ser posible desde distintos enfoques. Uno de ellos es la evaluación, a través de la cual podemos tener un atisbo de las situaciones en las que se hallan los mayores retos para un sistema educativo.

En México, la cultura de la evaluación no era un aspecto primordial para los asuntos educativos de la nación. Hasta finales del siglo XX el ejercicio de la evaluación siempre había estado a cargo de los docentes, de manera formal o informal. Al darse el ingreso de México a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en 1994, se adquieren nuevas responsabilidades en materia económica; debido a que la educación es un factor de suma importancia para la economía de un país, dichas responsabilidades también son en materia educativa. El vínculo establecido con la OCDE, así como las necesidades planteadas para el progreso de la nación, llevaron al Sistema Educativo Nacional (SEN) a integrar una serie de estrategias que permitieran verificar los logros, avances y las necesidades educativas del propio sistema. En consecuencia, se consideró preciso contar con mecanismos de evaluación más sólidos y que ofrecieran mayor información para la toma de decisiones, principalmente curriculares.

En este marco, se da la participación de los estudiantes mexicanos en la prueba del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés). El propósito de esta prueba, de acuerdo con el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) es "conocer el nivel de habilidades necesarias que han adquirido los estudiantes para participar plenamente en la sociedad, centrándose en dominios claves como Lectura, Ciencias y Matemáticas" (INEE, 2018). En general la prueba busca medir el conocimiento y destrezas de los jóvenes de entre 15 y 16 años de los países miembros de la OCDE y así poder ofrecerles información útil que los lleve a la toma de decisiones informadas para la mejora de los sistemas educativos. La prueba cuenta con seis niveles de desempeño, en los más altos (V, VI) se ubican los estudiantes que muestran tener capacidad de realizar actividades de alta complejidad cognitiva y liderazgo. En contraste los alumnos ubicados en el nivel más bajo no alcanzan el mínimo necesario de competencias para desempeñarse en la sociedad del conocimiento (INEE, 2018).

Desde la perspectiva internacional, la prueba PISA 2018 tuvo la participación de 79 países y economías, 37 de los cuales son países miembros de la OCDE, entre ellos México. De los 7,299 estudiantes mexicanos que participaron en matemáticas, aproximadamente el 44% alcanzó el nivel II o superior y solamente el 1% de los estudiantes que se ubicaron en el nivel V o superior (OCDE, 2019a). Específicamente, la mayoría se concentra en el nivel 1 con 30.3% en contraste con el promedio los países miembros de la OCDE, cuyo grueso se encuentra en el nivel III con 24.4%. Lo que resulta aún más preocupante son los resultados del nivel inferior a I (aquellos que alcanzan puntajes por debajo de la clasificación): mientras que el promedio de la OCDE es de 9.1%, para México es el 26.0% de los estudiantes (OECD, 2019b). Lo anterior implica que los alumnos pueden tener grandes dificultades para alcanzar los aprendizajes esperados, egresar del nivel de secundaria y acceder al bachillerato. Los resultados obtenidos, indican que la mayoría de los estudiantes no serán capaces de utilizar las herramientas matemáticas que les permitan lograr nuevos conocimientos y continuar su trayectoria académica.

En los niveles superiores a I los resultados para México son: nivel II 26.4% de los estudiantes evaluados, nivel III 13.1%, nivel IV 3.7% y nivel V 0.5%. El puntaje promedio de los alumnos mexicanos en matemáticas (409) aún se encuentra por debajo del promedio de la OCDE (489), se nota un ligero retroceso con respecto a los resultados de PISA 2012 cuando el puntaje obtenido fue de 413 y un aumento poco perceptible con respecto a PISA 2015 en donde se obtuvo un puntaje de 408 en matemáticas. Revisando los resultados de desempeño de las pruebas PISA en matemáticas del 2003 al 2018 (la prueba se aplica cada 3 años) se nota un estancamiento, incluso la línea de tendencia parece ser una curva que va a la baja (OCDE, 2019a).

En los resultados se destaca que las habilidades que la mayoría de los estudiantes mexicanos manifiestan en la prueba PISA les permiten hacer las siguientes actividades: contestar preguntas de contextos familiares, identificar información relevante, realizar procedimientos rutinarios, seguir instrucciones directas. Las tareas de desempeño que son capaces de hacer los estudiantes que se ubican en el nivel I, implican que tendrán dificultades para continuar aprendiendo. En contraparte, lo que demanda el nivel VI de la prueba PISA se relaciona directamente con: modelar situaciones de problemas en contextos poco familiares; relacionar y manejar representaciones e información; dominar operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales; capacidad de pensamiento y razonamiento matemático (OECD, 2019b).

La evaluación parece volverse un fin, más que un medio para conocer las áreas de oportunidad y plantear estrategias conjuntas de mejora del sistema educativo. Esta situación hace posible notar que muchas veces en educación se atienden intereses personales y burocráticos, dejando de lado el verdadero aprendizaje de los estudiantes. A pesar de ello es imposible pasar por alto que las evaluaciones internacionales, ponen de manifiesto un problema general del aprendizaje de las matemáticas. Este problema parece ser de interés global, sin embargo, los resultados de la prueba PISA muestran que en América Latina es más grave. A pesar de las críticas a las evaluaciones estandarizadas y sus efectos negativos como la percepción salarial, exclusión, simulación, evasión de lo académico, entre otros, (Sánchez y del Sagrario Corte, 2013) es innegable la existencia de un problema en el contexto internacional.

Aunado a lo anterior, un indicador de la calidad de vida de los países miembros de la OCDE es la educación, por tal motivo, el organismo sugiere que este sea un rubro que se mantenga en permanente evaluación y se esperaría que los resultados mejoren paulatinamente. En línea con esta idea, "desde la cúpula gubernamental de los diferentes países, la urgencia por una mejor formación ciudadana desde edades tempranas genera sistemas masivos de evaluación nacional y se permite la entrada de exámenes internacionales" (Camarena, 2015, p. 321). Tras la obtención de resultados poco satisfactorios en las primeras ediciones de la prueba PISA, surge en México la prueba denominada Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). A pesar de que esta prueba buscaba evaluar el dominio más que las habilidades, la realidad es que sirvió como forma de preparar a los estudiantes para que obtuvieran mejores resultados en las pruebas internacionales.

Aunque las potencialidades de la prueba fueron vistas con buenos ojos, el hecho de que estuvieran ligadas a los estímulos que se hacían a los docentes, así como el establecimiento de un ranking de escuelas, hizo que la prueba se rodeara de prácticas cuyo objetivo era preparar a los estudiantes para aprobar (Santiago, McGregor, Nusche, Ravela, y Toledo, 2012). En consecuencia, la OCDE emite recomendaciones para que la prueba retome el rumbo original y sirva como una herramienta de diagnóstico.

Actualmente en el SEN los aprendizajes se evalúan a través de la prueba del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), la cual sustituyó a ENLACE en el ciclo escolar 2014-2015. PLANEA tiene como principal objetivo "conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación obligatoria" (INEE, 2016, p. 93). La población a la que se dirige la prueba PLANEA son los alumnos de tercer grado de preescolar, el sexto grado de primaria, el tercero de secundaria y el último grado de educación media superior.

La prueba PLANEA (de la asignatura de matemáticas de secundaria) que se aplicó en 2017 en México fue construida tomando como referente los planes y programas de estudio 2011 en sus 3 ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico (62 reactivos); forma, espacio y medida (44 reactivos), y manejo de la información (35 reactivos), constituyéndose la prueba por un total de 141 reactivos (INEE, 2019). En general, los resultados muestran que dos terceras partes (64.5%) de los estudiantes evaluados se encuentran en el nivel I, es decir, no han logrado los aprendizajes esperados en la asignatura de matemáticas. En contraste, solamente el 5.1% de los alumnos evaluados se encuentran en el nivel IV, lo cual implica un logro sobresaliente en los aprendizajes. Para los niveles II y III los porcentajes son 21.7% y 8.6% respectivamente; apenas suman poco menos que la mitad del porcentaje de alumnos en el nivel I.

Las habilidades que la mayoría de los estudiantes muestran tener, en la prueba PLANEA 2017, apenas son las elementales: estrategias de conteo básicas, cálculos con números naturales, expresar el significado de fórmulas en lenguaje natural. Los estudiantes muestran dificultades para hacer cálculos con números decimales, fraccionarios y negativos; además muestran poca capacidad de resolver problemas con ecuaciones. En contraste, las habilidades (en específico del eje de interés sentido numérico y pensamiento algebraico) del nivel de logro IV (el más alto) para PLANEA tienen que ver con: capacidad para operar con expresiones algebraicas, calcular valores faltantes y términos en sucesiones, y resolver problemas haciendo uso de la modelación con funciones lineales o cuadráticas (INEE, 2019).

Si se reconoce que cada conocimiento logrado es la base fundamental para aprender y comprender en niveles posteriores, los alumnos muestran tener las nociones básicas necesarias para continuar su trayectoria educativa. Pero a la hora de mostrar sus habilidades y conocimientos en niveles superiores de dominio de los contenidos, los alumnos parecen estar estancados. De acuerdo con Piaget y García (1989), el desarrollo del conocimiento requiere de cierta secuencia en su constitución, pues cada etapa lleva en sí aquello que se ha logrado en la etapa anterior (citados en Sierpinska, 1994). En ese mismo sentido, se considera que "como cada etapa siguiente comienza con una reorganización, en otro nivel, de formas de comprensión construidas en la etapa anterior, la comprensión de las primeras etapas se integra a las de los niveles más altos" (Sierpinska, 1994, p. 122). Entonces parece haber un logro en los niveles de desarrollo básicos, principalemte vinculados con la aritmética, pero existen falencias en niveles subsecuentes, relacionados con el álgebra y la geometría principalmente. En decir, lo alumnos dominan operaciones aritméticas y resolución de problemas en contextos familiares, pero a la hora de abstraer, generalizar y resolver problemas fuera de contextos conocidos (habilidades relacionadas con el pensamiento algebraico), los alumnos fallan.

En línea con lo anterior, se reconoce que, un reclamo social importante a la educación son los bajos resultados en pruebas estandarizadas a nivel nacional e internacional. En este sentido, Giroux (1992) apela por un enfoque emancipador que no ha de desvincularse de demandas verdaderas. En una visión crítica, demandas, como la recién mencionada, responden a problemas de otro tipo, es decir, son la punta del iceberg de un problema que no se reducen necesariamente al plano educativo. La educación no puede entenderse desde una dimensión puesto que está susceptible de influencia de otras esferas de la sociedad. Específicamente, se considera que los resultados de evaluaciones estandarizadas no dan cuenta de todos los factores que intervienen en dichos resultados, sean estos favorables o desfavorables.

A pesar de ello, es evidente que en los resultados se refleja una gran problemática, un reto para la educación en general y para el SEN, en el área de matemáticas que es la que nos atañe. Las evaluaciones en pruebas estandarizadas muestran deficiencia en los niveles superiores de desempeño, específicamente en el área de álgebra, en cuestiones relacionadas con resolución modelación de situaciones, resolución de problemas y actividades de generalización. Cabe entonces el cuestionamiento sobre ¿en qué área de matemáticas se debe centrar la atención? De acuerdo con los diferentes niveles de jerarquización que manejan las pruebas, los conocimientos en los niveles básicos son clave para el desempeño en los niveles siguientes. Por ejemplo, si los resultados muestran deficiencias de los estudiantes en el área de álgebra, que corresponde con los niveles superiores, es probable que el problema se halle en los primeros niveles, en las ideas básicas de la aritmética conceptos elementales como los de número y operación. Por lo que, en este caso, se plantea centrar la atención en parte del vínculo que existe entre la aritmética y el álgebra, aspecto central del trabajo que aquí se desarrolla.

1.2. PERSPECTIVA DESDE LOS ENFOQUES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Otra perspectiva, desde la cual se puede tener un panorama de la problemática en torno a la educación matemática en México, son los enfoques presentes en los planes y programas de estudio de educación secundaria. En relación con estos últimos, la tendencia histórica ha marcado una segmentación de niveles, es decir, los contenidos que se revisan en primaria poco vínculo se les da con los contenidos que se revisan en secundaria y estos con los de bachillerato. Han existido esfuerzos por vincular los contenidos, como la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) y la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), cuyo enfoque por competencias para la vida buscaba la formación integral de los alumnos (SEP, 2011a); a pesar de ello sigue existiendo segmentación y por cada nivel educativo o grado, los contenidos se enseñan de manera aislada, sin encontrar vínculo o fundamento para aprender y comprender nuevas cosas. Para dar cuenta de ello se puede remitir a los Planes y Programas de estudio de Educación Básica, en específico del nivel de interés que es secundaria. (SEP, 1993, 2006, 2011h, 2017b). Por cuestiones prácticas, referimos a la última reforma (SEP, 2017a) la cual es vigente al momento de desarrollar la investigación.

Las matemáticas en educación secundaria, en el Modelo Educativo 2017, se plantean 5 propósitos para su estudio. Estos propósitos giran en torno a utilizar propiedades de la aritmética, la geometría, el álgebra y la estadística en el estudio de situaciones de aula. En específico, dos de ellos buscan que el estudiante modele situaciones de variación y resuelva problemas que impliquen el uso de ecuaciones (SEP, 2017b, p. 162). En suma, el perfil de egreso de educación secundaria, en sus ámbitos pensamiento matemático y pensamiento crítico y solución de problemas se especifica que, al término de la educación secundaria el alumno:

> Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.
>
> Formula preguntas para resolver problemas de diversa índole. Se informa, analiza y argumenta las soluciones que propone y presenta evidencias que fundamentan sus conclusiones. Reflexiona sobre sus procesos de pensamiento (por ejemplo, mediante bitácoras), se apoya en organizadores gráficos (por ejemplo, tablas o mapas mentales) para representarlos y evalúa su efectividad (SEP, 2017b, p. 27).

Estos rasgos del perfil de egreso muestran dos aspectos clave para la investigación: por una parte, se muestra la relevancia del pensamiento matemático para que al final de la educación básica, los estudiantes sean capaces de utilizar formas de razonamiento lógico y no convencional para comprender y explicar los fenómenos del entorno. Por otra parte, vinculado con el aspecto anterior, se encuentra la resolución de problemas como una estrategia para afrontar situaciones a través de formas novedosas de resolución. Este último aspecto es clave en educación, es a través de este enfoque se ha buscado dar atención a la problemática existente en educación matemática; se considera la resolución de problemas como medio efectivo para el aprendizaje de las matemáticas.

En relación con los enfoques, la enseñanza de las matemáticas en México ha tenido una historia marcada por la influencia del contexto internacional y no ha sido la resolución de problemas el único enfoque que se ha adoptado. Los conjuntos y las estructuras fueron parte importante de la enseñanza de las matemáticas en el siglo XX (Montesinos, 2000). En los años 60's y 70's, a nivel global y local se presentó a la *matemática moderna* como la alternativa para los dilemas de la didáctica de las matemáticas.

El grupo Bourbaki de matemáticos franceses, presenta en su obra lo que pretenden ser las estructuras que desarrollan a toda la matemática. Es así que la enseñanza a través de conjuntos llegó a los niveles de enseñanza básica (preescolar primaria y secundaria) y formó parte de reformas estructurales; incluso se modificaron las formas de trabajar en el aula, acompañadas de ideas de Piaget en relación con el avance en el aprendizaje del alumno (De la Peña, 1999). Las críticas no se hicieron esperar y fue así que, en la misma segunda mitad del siglo, la propuesta del grupo Bourbaki vio su decadencia. En la obra *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar,* Kline (1998) ofrece un panorama, quizá un tanto satírico, de las acciones que llevaron al fracaso de esta propuesta de enseñanza, entre ellas el lenguaje empleado, las limitaciones de los profesores y la estructura defectuosa de los planes que se desarrollaron para su enseñanza.

De la Peña (1999) muestra una semblanza de las reformas en educación de los años sesenta hasta los noventas del siglo XX en México. En su texto menciona la desaparición de la enseñanza por conjuntos en los años ochenta para primaria y noventa para secundaria. A partir de su experiencia, el autor establece un vínculo entre el nivel académico de los profesores y los cambios curriculares. Esta situación va más allá de las críticas, y posterior fracaso, del propio modelo de conjuntos debido a inconsistencias estructurales. Destaca entonces el propio docente, su conocimiento y dominio de la disciplina, como un factor determinante en el desarrollo de una propuesta curricular, así como del aprendizaje de los estudiantes.

Las reformas a nivel global, en torno a la enseñanza de la matemática a partir de conjuntos, comenzaron alrededor de 1960 y fueron cuestionadas fuertemente, incluso modificadas, después de una década. En México, no fue hasta después de dos décadas de la decadencia a nivel global de la enseñanza centrada en conjuntos que se planteó la reforma de 1993. En esa reforma se propuso "ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas y las capacidades para aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el planteamiento y resolución de problemas de la actividad cotidiana y para entender y organizar información cuantitativa" (SEP, 1993, p. 3). Con el pronunciamiento de aquella reforma, se dio paso a la resolución de problemas como actividad cotidiana en el aula.

A partir de la reforma de 1993, la resolución de problemas ha estado presente como actividad fundamental para la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo mexicano. La resolución de problemas deviene de una tradición en la que se busca poner al estudiante en una experiencia directa en el ambiente de aprendizaje, emulando la actividad científica para aprender por descubrimiento (Ausubel, Novak, y Hanesian, 1983, pp. 449-450). En los programas de estudio de la asignatura de Matemáticas de los años 2006 y 2011 el enfoque didáctico se plantea en el trabajo con actividades que lleven al alumno a reflexionar sobre diversas formas de resolver problemas y argumentar los procesos de resolución (SEP, 2006, 2011h). Este enfoque de resolución de problemas es vigente en las matemáticas que se enseñan en la escuela secundaria; se considera tanto una meta como un medio para el aprendizaje (SEP, 2017b, p. 163). Esta visión, muestra un vínculo con la postura de Schoenfeld (2016) con respecto a que los problemas son un vehículo para el logro de otros objetivos y como objetivos en sí. Es decir, se ha evolucionado de una postura en la que se aprendían conceptos matemáticos para utilizarlos posteriormente en la resolución de problemas, a una postura en la que se aprende matemáticas resolviendo problemas y para resolver problemas.

Uno de los argumentos a favor de la permanencia del enfoque basado en la solución de situaciones problema, es la importancia del *medio* "entendido como la situación o las situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretenden estudiar" (SEP, 2011h, p. 19). Es decir, que el estudiante al enfrentarse a un problema, podrá hacer uso de conocimientos matemáticos, como un medio eficaz para resolver dicha situación. Este argumento es retomado de los planteamientos de Guy Brousseau y su Teoría de las situaciones Didácticas (TSD), en la cual se propone que el docente es el encargado de elegir y/o adaptar situaciones específicas (problema). Dicha labor habrá de surgir de la recontextualización y una repersonalización del conocimiento matemático, en la que el alumno tiene que poner en juego el conocimiento en una situación ajena al contexto en el que aprendió (Brousseau, 1997).

Otro argumento que privilegia la resolución de problemas, en la enseñanza de las matemáticas en secundaria, es el desarrollo del pensamiento matemático. Dicho pensamiento es concebido como una emulación de la actividad de los matemáticos, en torno a la resolución de problemas, así como la necesidad de que "las personas sean capaces de pensar lógicamente, pero también de tener un pensamiento divergente para encontrar soluciones novedosas a problemas hasta ahora desconocidos" (SEP, 2017b, p. 158). Esta idea también tiene relación con los planteamientos de la TSD, en los que se dice que el profesor debe lograr que las actividades de clase simulen una microsociedad científica, llena de conocimiento, lenguaje y herramientas matemáticas, así como de buenas preguntas (Brousseau, 1997, p. 23). En el mismo sentido Schoenfeld (1988) menciona que el salón de clase debe ser "un microcosmos de cultura matemática" (citado en Santos 2007, p. 17). Desde esta perspectiva, ese microcosmos se ve determinado por las facultades intelectuales de los actores del aula, así como las interacciones entre ellos.

En contraste, la efectividad del aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas puede ser cuestionada desde investigaciones como la de Masami y Olfos (2009). En su texto *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*, los autores muestran la complejidad del trabajo relacionado con la enseñanza de las matemáticas a través de problemas. En sus planteamientos, es posible encontrar ejemplos sobre las amplias jornadas que se requieren para planear, desarrollar, discutir, evaluar y replantear una sesión que implique la resolución de un problema. Esas sesiones, en el mejor de los casos, conducen a la mayoría de los alumnos al logro de resultados favorables en la resolución de una situación problema y, en consecuencia, en evaluaciones externas. Sin embargo, en la misma investigación se muestra que en algunos países como Hong Kong, las clases "tradicionales" (en las que el docente está al frente del aula y explica a sus alumnos) han dado buenos resultados, incluso mejores que en algunos países que utilizan el enfoque por resolución de problemas (Masami y Olfos, 2009, p. 24).

Una crítica más precisa que se hace al enfoque basado en la resolución de problemas, sobre todo a su uso excesivo y las amplias expectativas que se generan en torno suyo, es la que realizan Ausubel et al. (1983). En su obra, los autores critican el uso del *aprendizaje por descubrimiento* cuando existe la necesidad de aprender grandes cuerpos de conocimiento; "los descubrimientos originales efectuados durante milenios […] no necesitan ser redescubiertos por cada generación nueva." (p. 448). Es decir, parece poco provechoso el hecho de que los logros de las investigaciones en matemática y los intentos de la didáctica de la matemática tengan que remitirse a nuevos redescubrimientos en el aula; en su lugar se concibe la posibilidad de aprovecharlos como base para progresar de manera significativa en la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno. Se retoma la idea de que "resolver problemas puede ser algo tan insípido, tan formalista, tan mecánico, tan pasivo y tan repetitivo como la peor forma de exposición verbal" (Ausubel et al. 1983, p. 451), y se vincula así con los hallazgos de las investigaciones de Masami y Olfos (2009). Quizá, el problema fundamental no se encuentre en el enfoque, sino en algo que subyace a cada forma de enseñanza de la matemática, así como de la matemática misma.

Al respecto se piensa que, aprender matemáticas por descubrimiento, en vínculo con la resolución de problemas, puede resultar una tarea que muestre un panorama engañoso para el profesor. El docente puede tener la idea de que el alumno está comprendiendo lo que hace y aprendiendo al resolver problemas, pero esta idea contrasta con el panorama histórico en el que cobra auge el aprendizaje por descubrimiento. En ese contexto se encontró que "en la resolución *significativa* de problemas, los estudiantes dejaron de memorizar fórmulas para memorizar, en cambio, *problemas tipo*" (Ausubel et al. 1983, p. 450). Es decir, los alumnos asocian las características, así como las formas de solución, de un problema a otro problema, de esta manera suelen salir bien librados de situaciones a las que en el aula se enfrentan. Y esta noción tiene un vínculo muy fino con el aprendizaje conceptual en matemáticas "el estudiante no sabe que está aprendiendo signos al puesto de conceptos y que en cambio lo que debería aprender conceptos" (D'Amore, 2005, p. 25). Esa misma trampa puede llevar al docente a creer que el alumno en realidad aprende, comprende y aplica conceptos, con ello se puede perder de vista que en realidad puede estar mecanizando procedimientos propios del quehacer matemático en el aula.

En el contexto del surgimiento del enfoque de resolución de problemas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, se buscó superar el formalismo excesivo de la matemática moderna. En ese intento, existió un movimiento denominado el regreso a lo básico, el cual buscaba que los estudiantes dominaran operaciones básicas y procesos algorítmicos. Este enfoque también fracasó debido a que los estudiantes, a pesar de resolver problemas, no eran capaces de comprender lo que sus resultados significaban (Santos, 2007, p. 19). En algún momento, puede parecer que el dominio de procedimientos algorítmicos era suficiente para considerarse competente en matemáticas. Actualmente esa idea ha quedado atrás para dar paso a la comprensión de los procesos que implican la resolución de problemas y el vínculo con la acción que el alumno lleva a cabo. Es decir, no basta con que el alumno realice operaciones, desarrolle algoritmos o siga procesos, es necesario que esas y otras habilidades las lleve a la práctica en contextos distintos a aquellos en los que las adquirió.

Para lograr el aprendizaje a través de la resolución de problemas Santos (2007) propone que el estudio de las matemáticas se vincule con la epistemología del conocimiento matemático. A pesar de que esta idea parece contrastar con los planteamientos de Ausubel et al., (1983), Santos (2007) refiere más a "las actividades propias del quehacer matemático […] conjeturar, modelar, discutir, ejemplificar, criticar, comunicar" (p. 235) que al redescubrimiento del conocimiento matemático. Y para realizar dichas actividades es imprescindible el lenguaje como un instrumento de comunicación en la microsociedad científica que habrá de establecer el docente.

En suma, es notorio el carácter simbólico de la matemática como un factor que ha llevado a decisiones sobre cambios curriculares. Desde la complejidad del lenguaje aplicada en la matemática moderna, (situaciones como la diferenciación entre número y numeral; las variables en los conceptos de función y relación, operaciones con conjuntos, notación en general de representaciones matemáticas; Kline, 1998), hasta la modelación de situaciones del enfoque de resolución de problemas (empleando el lenguaje de la matemática, menos ambiguo que el de la matemática moderna), el uso de símbolos ha permeado la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido D'Amore (2005) hace una clasificación de la didáctica de la matemática en una didáctica A, la cual se encarga de la creación de instrumentos (abstractos o no) y la didáctica B, que se relaciona más con las construcciones epistemológicas del conocimiento matemático. Si nos remitimos a la didáctica A, al momento de avanzar en niveles de pensamiento y grados escolares, el alumno se verá en la necesidad de abstraer la comprensión lograda. En consecuencia, tendrá que transitar a otro tipo de representaciones, con las que pueda trabajar para continuar aprendiendo matemáticas. En cambio, si se opta por la didáctica del tipo B el alumno deberá comprender, al menos parcialmente, el lenguaje con el que la matemática se fue construyendo y remitirse al carácter semiótico de la matemática. Se concibe entonces, que "el desarrollo de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático" (Duval, 2016, p. 63), es decir, hablar del carácter epistemológico de la matemática es hablar de su lenguaje y sus signos.

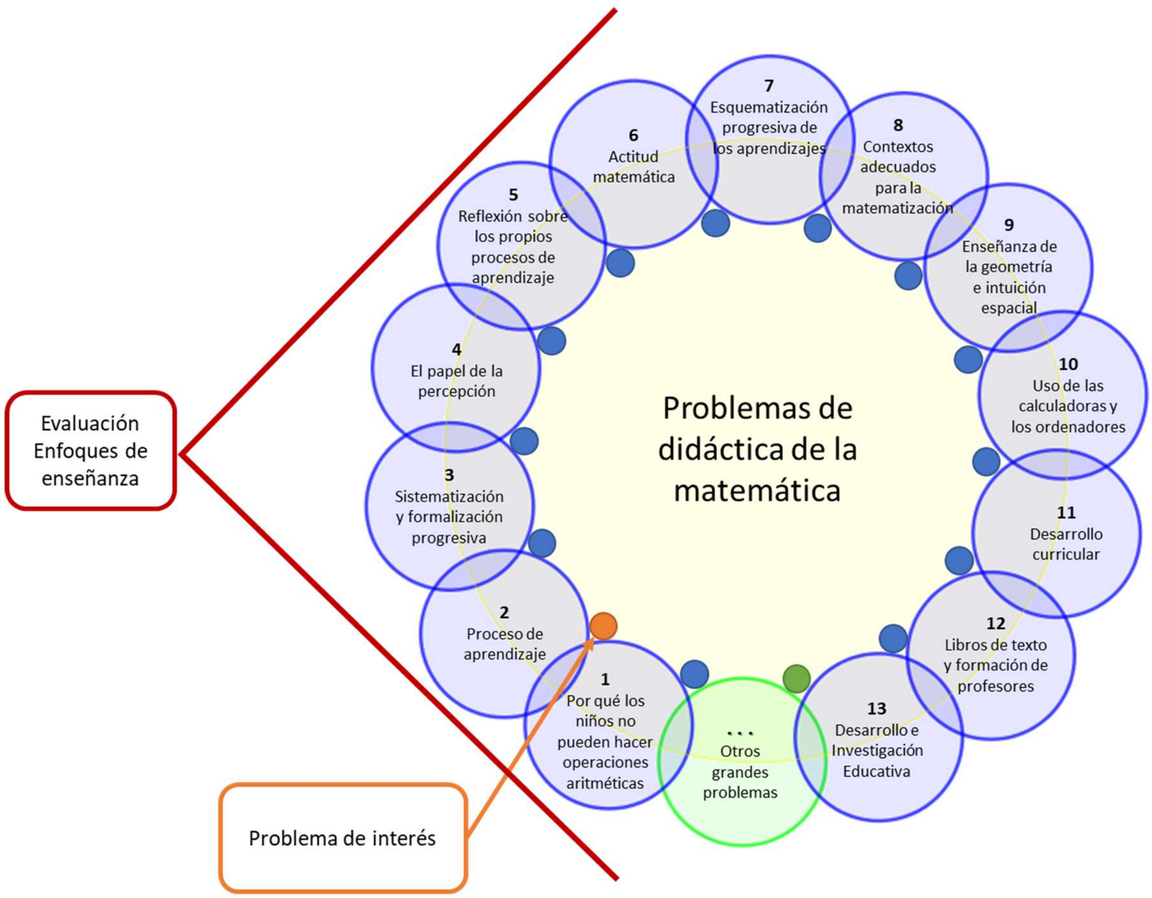
No se trata de descalificar un enfoque de enseñanza u otro, o de pronunciarse a favor de la didáctica A o de la didáctica B, se trata de reconocer el carácter simbólico de la matemática; es insalvable remitirse a su carácter semiótico, al hablar de comprensión o aprendizaje de la misma. Lo que se espera, es reconocer que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos complejos, en los cuales es importante atender cuestiones esenciales que van más allá del enfoque elegido para su enseñanza. De esta forma, el problema general del que se deriva la investigación es aquello que subyace a las dificultades que se enfrentan para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar.

1.3. LAS REPRESENTACIONES Y LA COMPRENSIÓN

Hasta este punto, se considera necesario dar un panorama (ver ilustración 1) del proceso de problematización que se sigue en la construcción del objeto de estudio. Para hacerlo, se inicia desde el contexto de la evaluación para dimensionar la problemática en Educación Matemática. Aquí se puede encontrar un marco para dar cuenta de la existencia de algunos de los grandes problemas de la matemática, mencionados por Freudenthal (1983). De acuerdo con la postura del autor, dichos problemas no tienen una solución definitiva y tienen interdependencia entre sí; ninguno de ellos está completamente aislado de los otros. Posteriormente, se recurre a los enfoques recientes de enseñanza de la matemática, como una propuesta de enseñanza que influye de manera determinante para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. En el cruce o teniendo como marco los grandes problemas, existen otro tipo de problemas (círculos pequeños en la figura 1), aquellos que se enfrentan en la cotidianeidad de las aulas, las escuelas o el hacer docente; surgen de inquietudes que, en un primer momento son propias de cada docente, grupo de alumnos, contexto y realidad educativa. Finalmente, en la intersección de algunos grandes problemas se encuentra el centro de interés del presente trabajo, el cual no es necesariamente un pequeño problema.

Cabe destacar que el esquema se presenta en dos dimensiones, por fines prácticos, sin embargo, se optaría por un esquema dinámico en tres dimensiones donde las esferas de los grandes problemas tengan interacción con los otros grandes problemas. Se considera que, a pesar de que el aprendizaje de la matemática ha enfrentado dificultades desde sus orígenes, los problemas que se tienen en Educación Matemática no son estáticos, cambian y se nutren, reducen o complejizan con el pasar del tiempo. El problema de investigación elegido, puede tener incluso mayor interacción con otras esferas de los grandes problemas, más allá de lo que se muestra en el esquema.

Ilustración 1. Esquema de problematización.



Fuente: adaptado a partir de los "Grandes problemas de Didáctica de la Matemática", Propuestos por Hans Freudenthal (1983).

Lo que se busca en esta investigación, es atender una situación particular que pueda aportar una perspectiva de lo que pudiera estar sucediendo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, específicamente en la comprensión. Por tal motivo, el foco se centra en algunos elementos clave del acontecer del aula a los cuales se les concibe como entes dinámicos que implican interacciones entre sí. Algunos de los elementos básicos son: alumno, maestro, saber; el denominado Triángulo de la Didáctica (Chevallard, 1991). Dichas interacciones no se desarrollan de manera directa de sujeto a sujeto, requieren del establecimiento de los elementos básicos de la comunicación, es decir, un canal por medio del cual sea posible la comunicación, pero sobre todo de un código que sea el portador de los significados del mensaje a transmitir.

En este sentido, parece sensato referirse a un lenguaje que caracterice los mensajes que en el aula de matemáticas tienen lugar. De acuerdo con Kristeva (1988) para definir al lenguaje, es necesario remitirse al cuestionamiento sobre "¿cómo ha podido ser pensado el lenguaje?" (p. 9). De esta forma se alude a la praxis del lenguaje, evitando así enmarcarlo en una definición de carácter reduccionista y representándolo de mejor manera por el uso que se hace de él. Este mismo camino lo sigue Sierpinska (1994), cuando, retomando a Wittgenstein (1958) y Ricoeur (1977), alude a la comprensión desde una perspectiva pragmática, pues la "naturaleza misma [de la matemática] no permite 'ver' sus objetos, sino siempre 'verlos como'" (p. 10). En otras palabras, es más fácil acceder al conocimiento de los objetos matemáticos a partir de su uso. Entonces, se plantea la dificultad del acceso a los objetos de la matemática y la imposibilidad de manipularlos directamente, recurriendo al uso que se hace de ellos a través de otros objetos que no son el objeto matemático en sí.

Los mensajes que comúnmente se trabajan en el aula de matemáticas están vinculados con abstracciones, las cuales necesariamente se materializan en representaciones, debido a la imposibilidad de manipular los propios objetos. En este sentido, las representaciones cobran gran relevancia para el aprendizaje de la matemática, pues "constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos" (Duval, 2016, p. 63). Es decir, las representaciones no solo son un medio para establecer comunicación, sino que también son el medio por el cual es posible establecer el vínculo para producir nuevo conocimiento. En consecuencia, para la comprensión y el aprendizaje en matemáticas se debe desarrollar un dominio amplio de las representaciones propias de la matemática, en el nivel de especificidad de la rama que se esté trabajando: aritmética, álgebra, geometría, estadística, cálculo; cada una de ellas maneja un cúmulo de representaciones que pueden ser compartidas o distintas, y a las que comúnmente se denominan representaciones semióticas.

Sierpinska (1994) reconoce que las representaciones forman parte importante del desarrollo histórico de la matemática, las cuales incluso muestran su potencial en la creación de nuevas ramas de matemática y, por ende, nuevas formas de pensar. Incluso, la autora al hablar de comprensión refiere a lo que Duval (2016) considera como la imposibilidad del acceso directo a los objetos matemáticos; el plus de la idea de la autora es que, en el caso de este análisis, se apela al carácter práctico más allá del carácter cognitivo. Es decir, es posible comprender, al ver el uso de un objeto, en otros casos como en matemáticas, a través de su representación.

Duval (2016) realiza un análisis contundente del trabajo con las representaciones en matemáticas. Partiendo desde la noción de que una representación ocupa el lugar de un "algo", contrasta con otras áreas del conocimiento en las que la representación ocupa el lugar de algo que es generalmente tangible. Por ejemplo, si se desea conocer la anatomía de un anfibio es posible trabajar sobre una representación del animal, aunque siempre es posible acercarse de manera tangible al objeto y realizar una práctica de laboratorio de disección de una rana. En matemáticas no sucede lo mismo, no es posible acercarse a los objetos de nociones tan elementales, axiomáticas para ser más preciso, como punto, recta, número, entre otras; se habrá de trabajar sobre esos objetos siempre a través de sus representaciones.

Es esta situación la que refleja la problemática del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, la imposibilidad de acceder de alguna manera al objeto puro en el mundo material. Aquí es donde se centra el interés de estudiar las representaciones y el papel que desempeñan en la comprensión. El trabajo para el aprendizaje de la matemática se da necesariamente a través de representaciones, lo cual implica una primera dificultad en la comprensión: la lógica que subyace a las representaciones implica que estas están en el lugar de otro algo y que además cumplen reglas específicas dentro del registro semiótico en el que se encuentran. Posteriormente, tales representaciones son tratadas por el docente y llevadas al aula, lugar en el que muchas veces se dan transformaciones en o entre los registros semióticos, sin que se hagan explicitas las normas que rigen dichos sistemas. Además, la historicidad del concepto u objeto matemático que en el aula se discuta, influye de manera significativa, pues es posible que las mismas complicaciones que devienen de su construcción, formen parte del proceso actual del aprendizaje, lo que se constituiría como un obstáculo epistemológico (Bachelard, 1948).

A partir de lo anterior, se reconoce la importancia de las representaciones para el aprendizaje de la matemática. Sin embargo, aunque en los últimos años se han hecho grandes esfuerzos en educación para mejorar la calidad de enseñanza que se ofrece, así como los aprendizajes que los alumnos logran, aún parece polémico y debatible el avance que se ha logrado. Si bien, se reconoce que los resultados en el desempeño de los estudiantes dependen de múltiples factores, así como a una responsabilidad compartida de la sociedad (Márquez, 2017), es importante asumir que es posible mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, atendiendo las causas inmediatas de los bajos resultados que son palpables en el día a día en el aula. Además de la realidad inmediata que viven el docente y el alumno en la cotidianidad, una de las herramientas con la que cuentan, para tener un referente acerca de los logros en el área educativa es la evaluación.

En suma, las cuestiones que tienen relación con el aprendizaje y la comprensión en matemáticas, los enfoques de enseñanza, así como los resultados de evaluaciones estandarizadas lleva a cuestionarse ¿qué sucede con los procesos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar?, ¿por qué parece que los alumnos no logran comprender aquello que se les enseña?, ¿existen elementos clave que se deben considerar para que los estudiantes comprendan lo que hacen en matemáticas?, ¿qué características subyacen a los enfoques de la enseñanza de la matemática en la escuela que, a pesar de los cambios y las reforma, parece que los avances no son los esperados?, ¿existen limitantes para la enseñanza, la comprensión y el aprendizaje?

En la presente investigación, estos cuestionamientos ayudaron a construir la pregunta de investigación. Con estas preguntas se hace referencia al problema general del que parte la investigación, concibiéndola como un proceso de construcción, tal como lo sugiere Sánchez (1993). Sin embargo, tratar de responder a estos cuestionamientos sería una labor por demás compleja, que rebasa los alcances y la intención de la presente investigación. Por lo mismo, se busca atender problemas que derivan de cuestionar la realidad educativa (pequeños problemas), buscando las causas de un hecho y vinculando las posibles respuestas a tales cuestionamientos, con elementos teóricos que sustenten los argumentos (Sánchez, 1993).

1.3.1. Pregunta de investigación

¿Cuál es la comprensión de las sucesiones aritméticas que logran los estudiantes de primer grado de secundaria, a partir de la transformación de las representaciones que la docente utiliza en el aula?

1.3.2. Objetivos

General: Analizar la comprensión que logran los estudiantes de primer grado de secundaria de las sucesiones aritméticas a partir de la transformación de las representaciones que la docente utiliza en el aula

Específicos:

- Detectar las representaciones que la docente utiliza y promueve, al trabajar contenidos relacionados con las sucesiones aritméticas.
- Describir cómo los estudiantes de primer grado de secundaria, resuelven actividades relacionadas con sucesiones aritméticas.
- Identificar las transformaciones que privilegian los estudiantes, al trabajar en actividades de sucesiones aritméticas.
- Clasificar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes de las sucesiones aritméticas, de acuerdo con las transformaciones que hacen de sus representaciones.

1.4. IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

La educación, en la perspectiva actual, es aquella que permite formar ciudadanos libres, capaces de pensar de manera crítica y tomar decisiones informadas, participando activamente en la vida social y el progreso de la nación (SEP, 2016). Se concibe entonces la formación de un sujeto íntegro que desarrolle potencialmente sus capacidades para convivir en sociedad. Esta noción tiene un vínculo con el pensamiento de Howard Gardner (2000), para quien la educación del sujeto debe ser aquella que siempre busque, aprecie y valore: la belleza, la verdad y la moralidad. Tomando esta idea de educación, parece que las matemáticas reflejan esas cualidades si mayor esfuerzo, incluso si se las concibe en definiciones formales:

> Las matemáticas son un conjunto de conceptos, métodos y técnicas mediante los cuales es posible analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos; interpretar y procesar información, tanto cuantitativa como cualitativa; identificar patrones y regularidades, así como plantear y resolver problemas. Proporcionan un lenguaje preciso y conciso para modelar, analizar y comunicar observaciones que se realizan en distintos campos (SEP, 2017b, p. 161).

El rigor de las matemáticas permite considerar el trabajo que en torno a ellas se desarrolla como una búsqueda constante de la verdad. Cuando se resuelven problemas se descubren afirmaciones que son ciertas dentro del sistema que representan las matemáticas y que muchas veces modelan situaciones del entorno. En esa misma acción es posible apreciar lo estético de las creaciones mismas de las matemáticas y la armonía que tienen con diversas áreas del entorno (la música, la naturaleza, el arte, la tecnología). Por otra parte, el desarrollo del pensamiento crítico, que se favorece con el estudio de las matemáticas, contribuye a que el sujeto se dirija en sociedad, cuestione la realidad y actúe en su beneficio.

Esta situación refleja parte de la importancia del estudio de las matemáticas para la formación individuo. Además, es conocida la importancia que tienen para el desarrollo de un país, el progreso de la ciencia y la tecnología. De ahí su presencia tan relevante en el currículo de educación básica, media superior y superior, así como el énfasis en su enseñanza desde los primeros grados escolares.

Sin embargo, para garantizar la enseñanza efectiva, es necesario considerar las dificultades que estudiantes y docentes pueden enfrentar en el proceso enseñanza-aprendizaje. Reconocer las etapas de desarrollo del estudiante vinculado a lo cognitivo, permite la toma de decisiones didácticas por parte del docente. El trabajo que se desarrolla tiene justificación en los ámbitos cognitivo y didáctico, los cuales se describen a continuación.

1.4.1. Acerca de la importancia de las representaciones

La presente investigación es una aproximación a la comprensión que los estudiantes de primer grado de secundaria logran al trabajar en matemáticas, específicamente los contenidos relacionados con sucesiones aritméticas. Este acercamiento se hace a través de las representaciones de los objetos matemáticos relacionados con las sucesiones (números, posiciones, constantes, patrones, razones y generalizaciones), así como del tratamiento y transformación que se hacen de las mismas.

El interés por la comprensión deviene de los debates acerca de los principales problemas en educación matemática. Tales planteamientos giran en torno a cuestiones como el aprendizaje de la matemática, su enseñanza, la relación alumno-docente, construcción del significado de nociones matemáticas, preparación profesional del docente, métodos de investigación, entre muchos otros (Godino, 2003). Al mismo tiempo, existe un cruce con el proceso de aprendizaje como uno de los grandes problemas de didáctica de la matemática propuestos por Hans Freudenthal (1983). En este caso se coincide con la idea de que "la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos" (Godino, 2003, p. 35).

Además, se considera que una de las preocupaciones principales de los docentes y de los estudiantes es la comprensión. El estudiante suele frustrarse al sentir que no está comprendiendo lo que se quiere que él aprenda. A su vez, el docente se ocupa de buscar estrategias que le permitan al estudiante superar las dificultades y de esta forma lleguen a aprender matemáticas. Al respecto, Sierpinska (1994) sugiere que "no podemos hacer esto más que ayudándoles a experimentar actos de comprensión" (p. 27). Por lo tanto, gran parte de las actividades que el docente lleve al aula, deberán estar centradas en poner al alumno en situaciones en las que puedan desarrollar la comprensión.

En este contexto, cobra relevancia la perspectiva de Duval (2016), en la que plantea la hipótesis de que "la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica" (p. 77). Esta es la ruta que se sigue en el trabajo y por lo que cobran relevancia las representaciones semióticas, como el medio a través del cual es posible referirse y trabajar sobre los objetos matemáticos. Es decir, se está poniendo el problema de la comprensión en términos de representaciones semióticas.

Este problema es muy común en el aula de matemáticas, el docente generalmente habla a los estudiantes dando por hecho que ellos comprenden claramente lo que se les está explicando. Mayor problema se presenta cuando se les habla de la misma "cosa" representándola de distinta forma. En palabras de Duval (2016) este inconveniente se presenta cuando "se habla en lenguaje natural mientras que se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico" (p. 75). La situación puede ser tan común que el docente no la percibe, acrecentando la dificultad que representa para el alumno seguir sus ideas.

Situaciones como la anteriormente descrita, son muestra de que tomar conciencia del uso de las representaciones es fundamental para el desarrollo de la labor docente. Reconocer lo complicado que resulta para el alumno identificar un mismo objeto matemático en dos sistemas de representación distintos, es clave para la enseñanza en matemáticas. El docente debe poner atención en el tipo de representaciones que emplea para enseñar a sus alumnos, para que desarrollen las habilidades para pasar de un registro de representación a otro. En consecuencia, el docente puede lograr que los alumnos comprendan y no solamente mecanicen.

Los fundamentos de una investigación que atienda a la problemática planteada, son del tipo cognitivo: la aproximación a las formas de comprensión que tienen los estudiantes, a partir de las representaciones semióticas que utilizan, ayuda a tener una visión más clara de las formas de aprendizaje de los estudiantes. La información que se obtenga permitirá, en acciones futuras, crear estrategias de intervención que ayuden a superar las dificultades, reforzar el aprendizaje, mejorar la didáctica y, en suma, llegar al logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes.

El enfoque didáctico se evidencia cuando en un grupo de estudio se presentan dificultades de aprendizaje y es necesaria su atención para alcanzar los objetivos. Es importante que, además de proporcionar al estudiante herramientas útiles para vida escolar, se favorezca en él la metacognición. Para lograrlo, se debe conocer la comprensión que han logrado a partir de las representaciones que utilizan al trabajar contenidos específicos de matemáticas.

1.4.2. Acerca de la importancia de las sucesiones

En cuanto al interés por las sucesiones aritméticas, se considera que es un contenido que tienen gran relevancia, desde el inicio del estudio de las matemáticas escolares, hasta niveles superiores de estudio de dicha área del conocimiento. Es decir, las sucesiones son un tema que comienza a revisarse de manera indirecta desde la educación primaria (quizá incluso desde el preescolar) con el estudio del número y su utilidad prevalece en el nivel medio superior, incluso en educación superior en el estudio del cálculo.

Si se toma esta situación como análoga a la epistemología del conocimiento matemático, el concepto de sucesión nació y se desarrolló con las ideas intuitivas y el propio concepto de número, pero continúa vigente hasta la invención del cálculo. Los primeros indicios de la noción de número en la historia, a través de representaciones (marcas en un hueso) datan de más de 30,000 años y la invención del cálculo infinitesimal en el siglo XVII (Stewart, 2012). Esto nos hace reconocer la historia acumulada, cantidades inimaginables de símbolos creados y reinventados que reflejan parte del desarrollo histórico de la matemática y que llevan en sí gran significado. A pesar de que las sucesiones no han tenido un papel netamente protagónico en la historia de las matemáticas, son un concepto (de la mano con su generalización: las series) que refleja parte de ese trayecto.

La relevancia del estudio de las sucesiones es de carácter transversal y longitudinal. Al comenzar con la noción de número y las operaciones aritméticas, las sucesiones se encuentran en el terreno de la aritmética; cuando esas nociones se formalizan y generalizan, se entra al plano del álgebra; si se trata del estudio de figuras, cuerpos geométricos y demás objetos con potencial de representación en el plano, existe vínculo con la geometría; al estudiarse como la suma de los términos que la conforman se constituye en una serie, cuyo concepto está íntimamente relacionado con el objeto de estudio del cálculo integral. Se considera el estudio longitudinal de las sucesiones en el sentido en el que abarca contenidos de número, operaciones aritméticas, patrones, sucesiones, funciones, series, derivadas e integrales; este esquema es básicamente el que se sigue en el estudio de las matemáticas escolares de la educación obligatoria en México, desde la educación primaria hasta el nivel medio superior.

1.4.3. Importancia del tema a nivel curricular

Curricularmente, existe cierto vínculo entre las dos ideas clave en las que se centra la investigación (sucesiones y representaciones). Esta situación se evidencia en uno de los aprendizajes esperados de primer grado de educación secundaria, en el cual se plantea que el alumno “formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan” (SEP, 2017b, p. 175). Trazando esta consigna en términos de la perspectiva de Duval (1993, 1999, 2006, 2016) y Sierpinska (1990, 1994), se espera que el alumno sea capaz de reconocer una sucesión en un registro de representación, a partir de un tratamiento tienda a la generalización y posteriormente transforme dicha generalización a otro registro de representación; entendido esto último como la síntesis del proceso en el que se denota comprensión.

En el terreno curricular del álgebra de secundaria, se ha planteado que el alumno desarrolle procesos de generalización de propiedades aritméticas mediante el lenguaje algebraico. Es decir, se busca que el alumno no aplique únicamente algoritmos de manera mecánica, sino que interprete las propiedades de los números y las operaciones aritméticas y tienda hacia la generalización; pasar del razonamiento intuitivo al deductivo, de lo particular al general. En suma, se busca el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico (SEP, 2011h). Esta visión se conserva en los planes de estudio actuales; se reconoce a la aritmética y al álgebra como herramientas que permiten modelar problemas. Se espera que el alumno pueda utilizar el álgebra en sentido ambivalente:

> por un lado para generalizar y expresar simbólicamente las propiedades de los números y sus operaciones; y por otro, para representar situaciones y resolver problemas que requieren de la comprensión de conceptos y dominio de técnicas y métodos propios del álgebra (SEP, 2017b, p. 304)

Este planteamiento se relaciona con lo que afirma Kaput (2000), para quien existen cinco formas de razonamiento algebraico. Una de esas formas de razonamineto considera al álgebra como una aritmética generalizada y razonamiento cuantitativo generalizado. Esto implica la formalización y la generalización, aunque no lo reduce a ello. De acuerdo con estas ideas, se considera que una forma de comenzar en el estudio del álgebra y desarrollar el pensamiento algebraico es a través de actividades de generalización y formalización de cuestiones aritméticas, en este caso de sucesiones con progresión aritmética. A pesar de que las formas de razonamiento algebraico no actúan de manera aislada, se considera que este acercamiento es el más común en el currículum de matemáticas de secundaria, por ende, suceptible de ser investigado.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN

PRESENTACIÓN

Acerca de la necesidad de una teorización Didáctica, y en específico de la Didáctica de la Matemática, se considera que para investigar sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se requiere un fundamento teórico y metodológico que sea sustento del análisis. En esta línea, se considera que "un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones" (Godino, 2003, pp. 12-13). Tal sustento es el que da el cobijo al análisis de las producciones con las halladas en el campo de observación, las que a su vez son la esencia del trabajo y promueven la autenticidad del aporte de la investigación.

El fundamento teórico de un objeto de investigación, permite delimitar el campo de inserción del mismo. Contar con un marco teórico ayuda a discernir de entre la basta cantidad de datos que se obtienen y los diversos significados a los que ellos nos pueden conducir, así como de la multiplicidad de enfoques para el análisis que se pueden adoptar. La realidad no puede ser captada y contrastada de manera precisa, si no se cuenta con un fundamento sólido. Sobre las investigaciones que se han hecho en Didáctica de la Matemática, no significa que no cuenten con un referente teórico, por el contrario, han sido el producto de una teoría local adaptada o construida para tal propósito (Godino, 2003). Una teoría construida a modo sería más fructífera, partiendo de un modelo general o en consonancia con el mismo. Sin embargo, al no existir una teoría de la Didáctica de la Matemática consolidada, se debe tener cuidado en la elección de los referentes teóricos que fundamenten la investigación.

Para la investigación en curso, uno de los referentes principales es Raymond Duval. De su teoría de los Registros de Representación Semiótica (RRS) se retoman elementos que vinculan la comprensión y el aprendizaje con las representaciones semióticas, pues de acuerdo con la hipótesis que propone el autor, se considera que "la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica" (Duval, 2016, p. 77). Además, los elementos que aporta la teoría, permiten dar nombre a aquellas situaciones que se plantean en la clase y que pueden ser abordados desde una perspectiva semiótica.

Otro referente fundamental es Anna Sierpinska, quien en sus textos ofrece un panorama basto del análisis de la comprensión en matemáticas. Su trabajo toma principalmente dos líneas: la primera implica abordar la comprensión en términos de la superación de obstáculos epistemológicos, pues es precisamente esa tarea la que lleva al sujeto, en este caso los estudiantes, a comprender las matemáticas escolares; la segunda se relaciona con un abordaje de la comprensión a partir del significado que se capta de un objeto matemático.

A partir de los planteamientos de Raymond Duval y Anna Sierpinska, se forma un marco que permite el análisis de los elementos que tienen lugar en el aula de matemáticas. El objetivo fue describir la comprensión que logran los estudiantes en relación con la generalización de sucesiones aritméticas. En este caso, el abordaje se hace desde las representaciones de las sucesiones que el alumno utiliza y que son promovidas en el aula por la docente; tal como lo refiere Duval (2016), es a través de las representaciones semióticas que se tiene cierto acceso, indirecto pero el más cercano, a los objetos matemáticos.

En relación con la categoría de sucesiones aritméticas, se plantea su abordaje como caso particular del tránsito de la aritmética al álgebra, específicamente desde una de sus dimensiones: álgebra como un sistema de signos que permite la generalización de la aritmética (Usiskin, 1999; Puig, 2012), no por ello se considera que dicho transito se reduce a esa dimensión. Desde esta perspectiva, se reconoce que los arreglos que representan las sucesiones, numéricas o de figuras, requieren ser representadas en un sistema distinto al que comúnmente se aludía para poder ser tratadas; el alumno debe trascender del uso del lenguaje de la aritmética hacia el uso del lenguaje algebraico, de esta forma poder representar, de manera general, las relaciones que están implicadas en la lógica de los elementos de una sucesión.

Para Puig (2012), en el tratamiento de las expresiones algebraicas, se puede adquirir sentido “por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, y porque permiten obtener aquellas expresiones que son más convenientes para el tratamiento de la situación” (p. 11). Es decir, se reconoce la existencia de sentido, en este caso para el alumno, cuando se cuenta con la capacidad de transitar de un registro de representación a otro, para manipularlo con mayor facilidad. Debido a las dificultades que se mencionaron en el planteamiento del problema, es evidente considerar la presencia de dificultades para la comprensión aprendizaje de las matemáticas, en general, y del álgebra en particular.

Para abordar el objeto de estudio se precisan los términos, conceptos e ideas que habrán de ser referentes. No se niega la existencia de perspectivas distintas de otros autores, sin embargo, se retoman aquellas que se considera están en sintonía con el objetivo de la investigación.

2.1. COMPRENSIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE SIERPINSKA

Sierpinska (1990) asume una postura de la comprensión como acto, el cual se relaciona con el proceso de interpretación – explicación. Su propuesta es “considerar la comprensión como un acto, pero un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas y validaciones cada vez más elaboradas” (p. 26). De acuerdo con los planteamientos de la autora, existen cuatro operaciones mentales básicas que se involucran en la comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis, las cuales se denominan categorías del acto de comprensión. Estas categorías surgen de la síntesis de las ideas de Locke, Dewey y Hoyles:

> IDENTIFICACIÓN de objetos que pertenecen a la denotación del concepto (relacionado con el concepto en cuestión), o: identificación de un término que tiene un estatus científico; este acto consiste en una percepción repentina de que algo es como la "figura" en los experimentos gestálticos.
>
> DISCRIMINACIÓN entre dos objetos, propiedades, ideas, que antes se confundían.
>
> La GENERALIZACIÓN consiste en tomar conciencia de la no esencialidad de algún supuesto, o de la posibilidad de ampliar el rango de aplicaciones.
>
> La SÍNTESIS consiste en captar las relaciones entre dos o más propiedades, hechos, objetos, y organizarlos en un todo coherente. (Sierpinska, 1990, p. 29)

En las categorías propuestas, la autora refiere a actos que están implicados en comprensión, no tipos de comprensión. Es decir, son actos que, al demostrarse, construyen el camino hacia la comprensión de un concepto u objeto matemático.

En el caso en el que los actos de comprensión se conciban en un proceso constructivo lineal, es necesario haber pasado por un acto de comprensión para poder acceder a otro. En este sentido, los actos de comprensión que propone Sierpinska se comportan como niveles, pero no se reducen a ellos. Es decir, al hablar que un estudiante ha logrado identificar y discriminar, no significa que haya logrado una mejor comprensión que aquel que ha logrado únicamente identificar; se puede decir que ambos estudiantes se encuentran en el proceso de lograr la comprensión del objeto en cuestión, sin embargo, el primer estudiante ha logrado un acto de comprensión más avanzado que lo llevará a lograr la comprensión como tal.

Al concebirse la comprensión como un acto, cabe la posibilidad de estilos de comprensión, por la realidad misma del alumno; cada uno puede comprender de la forma en que su capital cultural y sus horizontes le permiten. Desde esta perspectiva, se mira a los sujetos como proyecto, los cuales habrán de constituirse en las condiciones de posibilidad. Es decir, de acuerdo con el entorno en el que el estudiante se desenvuelve, los actos que lleve a cabo estarán fuertemente condicionados, aunque no reducidos a una determinación sociohistórica. Ante todo, se debe considerar que el entorno no es solo un menú de opciones que se presentan como dadas, es ante todo un proceso reflexivo que depende del propio alumno.

Esta noción, lleva a posicionarse en línea con los planteamientos de Sierpinska (1990) al afirmar que la comprensión cambia, "mejora" con el tiempo. Las razones son que el conocimiento (como objeto de comprensión) no es estático en la mente del sujeto que comprende. El conocimiento se modifica, se vuelve cada vez más complejo en la red de conocimientos. Concebido el conocimiento como estructura, esta se vuelve cada vez más fuerte, y los elementos que permiten la comprensión son mayores:

> Al principio, los conceptos en la memoria generalmente están parcialmente definidos y débilmente relacionados con otra información almacenada. En años posteriores, cuando los recursos de información son ricos y organizados en un banco de datos construido sobre un elaborado sistema de conexiones entrecruzadas, el carácter del aprendizaje cambia. Los nuevos conceptos pueden asimilarse principalmente sobre la base de analogías con lo que ya se conoce. (Sierpinska, 1990, p. 25).

Esto se relaciona con el proceso de explicación. Es decir, en muchos casos una mente más experimentada tiene la posibilidad de sostener una afirmación (dar pruebas y validar información o aseveraciones), porque cuenta con más referentes conceptuales. Aunque pareciera algo evidente, es necesario especificar que, a mayor experiencia en relación con un contenido, objeto o conocimiento, existe mayor probabilidad de integrarlo al sistema de conceptos; es más fácil comprenderlo. "De hecho, una explicación de algún estado de cosas apunta a fundamentar su comprensión sobre una base diferente (más conceptual, por lo general)” (Sierpinska, 1994, p. 75). Es decir, el alumno no solamente acepta afirmaciones y las integra como conocimiento, al considerar válidas las premisas que forman la oración y dan una conclusión, sino que es capaz de cuestionarlas y buscar los referentes que le permitan aceptar dicha idea como verdadera. Además es capaz de elaborar una estructura propia de validación para sí y para los demás; el sujeto que es capaz de explicarse una cuestión (estado de las cosas) a sí mismo y a otros, a través de referentes integrados a su sistema de ideas, ha comprendido dicha cuestión.

2.1.1. Comprensión y obstáculos epistemológicos

Cuando un objeto matemático ha sido comprendido, significa que ha pasado a formar parte del entramado de conceptos que forman la red de conocimientos de un sujeto. Por lo que, en situaciones posteriores cuando el sujeto, en este caso el alumno, se le presenta nueva información, está afectará las relaciones establecidas previamente por la comprensión. Esta situación refleja la complejidad de aprender nuevas cosas para las que parece necesario “desaprender” o “reaprender” algo que ya se sabía. Esta postura muchas veces condice con lo que se denomina obstáculo epistemológico.

La noción de obstáculo epistemológico surge con Bachelard (1948), para él “se conoce en contra de un conocimiento anterior” (p. 15) destruyendo o superando ideas erróneas. En este sentido, se considera que un obstáculo epistemológico es conocimiento útil en una situación, por lo que destruirlo sería atentar contra conocimiento funcional. Por este motivo, se apuesta por la propuesta de Brousseau (1997), en la que se plantea que el estudiante que se enfrenta a la situación problema, puede lograr el conocimiento que está implicado en dicha situación; puede hacerlo tomando sus conocimientos previos, revisándolos, modificándolos, completándolos o rechazándolos (para tal situación de la que él debe ser consciente).

Un punto crucial en la comprensión que logra el alumno es cuando se enfrenta a un conflicto cognitivo. Él ha construido imágenes y conceptos, algunas veces considerados definitivos, a partir de experiencias previas. El hecho es que hay circunstancias en las que tales conceptos o imágenes entran en gran contraste con aquellas por aprender. Este escenario es donde aparece la misconcepción. “Una misconcepción es un concepto errado […] El estudiante revela las propias misconcepciones, por ejemplo, cuando aplica *correctamente* reglas *incorrectas*. Generalmente, al origen de este hecho existe una falta de comprensión y una errada interpretación” (D'Amore, 2005, p. 48). El error se considera en este caso como la manifestación de una misconcepción a la cual D’Amore (2005) considera simple y banal tratar como errores. La misconcepción tienen el potencial de obstáculo epistemológico. Cuando el estudiante trata de aplicar la noción (misconcepción) en la resolución de un problema, es decir extenderla, se presenta el obstáculo epistemológico. El obstáculo epistemológico tiene un carácter práctico, mientras que la misconcepción está presente meramente en el plano cognitivo; el obstáculo epistemológico no es tal sin el componente práctico.

Cuando el estudiante comete un error reiterado, puede ser la manifestación de un obstáculo epistemológico que se originó a partir de una misconcepción. Socas (1997) caracteriza a los errores que se cometen, en el aprendizaje de las Matemáticas, en dos grupos: los que tienen su origen en un obstáculo y aquellos que tienen origen en la ausencia de significado. Ambas posturas son relevantes porque permiten un análisis de la comprensión.

Bruno D’Amore (2005) conceptualiza a un obstáculo en el sentido de una idea que ha resultado cumplir su cometido al momento de abordar un problema, pero, por el contrario, no produce resultados deseados en un nuevo problema; la idea sigue estando presente y se procura su adaptación, a pesar de no obtenerse resultados favorables, lo que la lleva a convertirse en una barrera pare el aprendizaje y la formación de nuevos conceptos. El obstáculo epistemológico “se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación" (Bachelard, 1948, pp. 16-17). Tales costumbres no son exclusivas del sujeto que se mira ante el obstáculo, forman parte del desarrollo histórico de la matemática, lo que le atribuye el carácter epistemológico.

Existen condiciones para que un obstáculo pueda considerarse epistemológico, Duroux (1982) establece algunas, las cuales giran en torno a considerar el obstáculo como conocimiento; el conocimiento produce respuestas favorables en un contexto, pero erróneas en otro; se evidencia resistencia al cambio y persistente manifestación, aun siendo conscientes del obstáculo en el que el conocimiento se convirtió. La relevancia del concepto se retoma desde Bachelard (1948). Él sugiere plantearse “el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos” (p. 15), en este caso de los obstáculos epistemológicos. La riqueza de abordar el aprendizaje de las matemáticas, desde la revisión de los obstáculos de origen epistemológico, radica en el hecho de que éstos se originan del conocimiento y no de la ausencia del mismo.

Esta línea es precisamente una de las que retoma Sierpinska (1990), para tratar el problema de la comprensión en matemáticas. Para la autora, "quizás no todos, pero algunos actos de comprensión son actos de superación de obstáculos epistemológicos. Y algunos actos de comprensión pueden llegar a ser actos de adquisición de nuevos obstáculos epistemológicos." (p. 28). Este proceso es insalvable debido a que, como se mencionó anteriormente, las ideas que forman parte de una red de conocimientos; constantemente al aprender y comprender cosas "nuevas" es necesario hacer una revisión y modificación del conocimiento logrado anteriormente.

2.1.2. Comprensión y significado

La otra línea que retoma Sierpinska (1990), además de la de los obstáculos epistemológicos, es la de concebir a la comprensión como un acto a través del cual se capta el significado de un objeto, idea, concepto… de algo. Es decir, esta línea de análisis de la comprensión lleva en sí la posibilidad de hacer un análisis en términos de representaciones, específicamente de representaciones semióticas. Antes de pasar a las cuestiones en concreto de las representaciones y los registros de representación semiótica, se hace una revisión de la noción de significado y su relación con la comprensión. Un punto de partida para hablar del significado es hablar del signo. Se parte desde el signo lingüístico desde la perspectiva de Ferdinand de Saussure (1989) para llegar a la relación que propone sobre significado-significante.

Una perspectiva simplista es ver a la expresión del lenguaje, la lengua, como una asociación simple entre nombres y cosas. Esta relación está lejos de considerarse cierta y razonable, sin embargo, es el punto de partida que permite hacer un análisis de la dualidad del signo como unidad lingüística. El signo lingüístico es siempre la asociación de dos elementos clave: el concepto y la imagen acústica. La relación se vuelve compleja al intentar definir a cada uno de los elementos que componen al signo. Para hacerlo, es importante aclarar que "la imagen acústica no es el sonido material, cosa puramente física, sino su huella psíquica, la representación que de él nos da el testimonio de nuestros sentidos" (Saussure, 1989, p. 88). Hasta este punto, la relación se vuelve más clara sin llegar a ser explícita. Se considera necesario retomar las ideas del autor para dar un ejemplo: cuando leemos un libro o al preparamos mentalmente un discurso que le diremos a alguien, estamos haciendo uso de los signos denominados imágenes acústicas.

Surge un problema por el uso corriente del término signo: al hablar del signo lingüístico (signo por contracción, sin olvidar el carácter lingüístico), se remite únicamente a la imagen acústica, dejando de lado que tiene en sí la referencia a un concepto. Para salvar esta ambigüedad, Saussure (1989) propone designar el signo como la relación entre un significado y un significante. De esta forma, el significante conserva el sentido de la imagen acústica para designar al componente material o no de un concepto. El significado por su parte, es aquello que fue denotado por el significante, el concepto o idea que está asociada al significante; esta designación es una interpretación personal, sin embargo, se debe considerar que, a mayor grado de concordancia del significado la comunicación es posible.

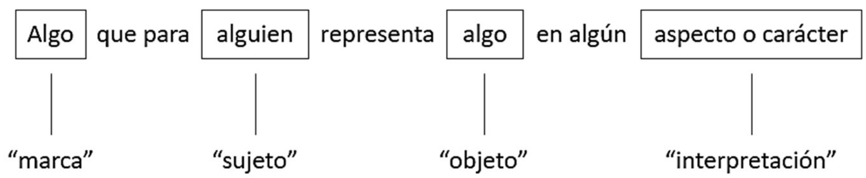
En una tendencia hacia un análisis más general, que no se ocupe únicamente de la lingüística, se puede hacer un acercamiento desde una perspectiva semiótica. No sin antes reconocer que:

> La semiótica no puede tener "objetos" sin tener objeto —aquí el singular gramatical refiere al universal teórico—, y que éste refiere a los modos de producción de la significación social —de los cuales la comunicación interpersonal (lingüística o no) configura una de sus tantas expresiones—, sus formas de manifestación y sus efectos. (Peirce, 1974, p. 11).

Es decir, el objeto de la semiótica tiene que ver estrictamente con la producción de significado en relación con el uso de las formas de comunicación, expresadas a través de signos. Pero estos signos no son exclusivamente lingüísticos, como los que trata Saussure (1989), sino que son ideas más generales de los objetos, tan generales como aquellos objetos denotados por la palabra "algo". Es en este sentido (semiótico) más general que el signo "es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter" (Peirce, 1974, p. 22). La complejidad de definir ese algo de manera más precisa y menos vaga, radica en el hecho de que esa representación depende de cada sujeto.

Otra forma de ver la complejidad de describir ese algo, que se relaciona con el uso de signos, es a través de los elementos que conviven en ese proceso de referencia. Son Sierpinska, Dreyfus e Hillel (1999) quienes hacen la distinción de los elementos que componen las ideas de Peirce acerca del signo:

Ilustración 2. Esquema para la descripción de una representación



Fuente: Evaluation of a teaching design in linear algebra (Sierpinska et al. 1999, p. 16)

Generalmente en ese proceso de referencia solemos pensar en el algo (marca, signo) y quizá en el algo (objeto referenciado), pero solemos olvidar al sujeto que lo percibe y la interpretación que hace del mismo. Entonces volvemos a un problema similar al de la comprensión, el sujeto que cuenta con mayores referentes puede interpretar la marca de diferentes formas. Es precisamente donde estos elementos (marca, sujeto, objeto e interpretación) actúan como un sistema en el que cada elemento es importante, pues no existe la marca sin el sujeto para quien dicha marca "es" o "representa" y tampoco existiría sin el objeto al que refiere; además la interpretación está directamente ligada al sujeto para quien la marca representa algo.

Al respecto Peirce (1974) denomina al signo como un *representamen* en tanto que representa o hace referencia a otra cosa. El signo o representamen, entendido de esta forma, está relacionado con el objeto en una relación a la que se denomina *representación* (p. 43). Como se mencionó, entre más referentes conceptuales tiene el sujeto que se relaciona con el signo, es posible que éste le represente distintas cosas; sin embargo, tal como como se denota en la ilustración 2, el signo no es representamen (marca) del objeto en todos sus aspectos, lo es particularmente en alguno de ellos: el fundamento del representamen (interpretación).

El signo, desde esta perspectiva, es la representación de un objeto. Se utiliza debido a la ausencia del objeto o simplemente por fines prácticos. Dicho signo, puede referir ciertas características del objeto, eso responde a la finalidad con la que fue evocado. En el sentido de la relación del signo con el objeto, Peirce (1974) establece la tricotomía que tiene relación del signo consigo mismo, con el objeto y con el interpretante:

- El *ícono* es un signo que tiene una cualidad que lo hace significante del objeto y guarda una estrecha relación con él, incluso en ausencia del mismo. Por ejemplo, se puede decir que la fotografía de una persona. Se reconoce que cualquier cosa es ícono de algo en tanto exista cierta relación de semejanza y se utilice como su signo. A su vez, el ícono se puede dividir en:
  - Imágenes: aquellos íconos que representan similitud mediante cualidades simples.
  - Diagramas: cuando existe una relación de analogía entre las partes del índice con aquello que representa.
  - Metáforas: existe una relación con el objeto por una característica significativa del mismo haciendo uso de una relación con otra cosa.

- El *índice* es un signo del objeto, no por relación pura como el ícono, comparte una cualidad, pero su relación se basa más en la afección del signo por el objeto. Un ejemplo claro puede ser la huella que un animal dejó a su paso.

- El *símbolo* hace referencia al objeto del que es signo, lo hace en a través de la asociación de ideas, denotada como ley o convención, que hacen que la relación del signo sea posible con el objeto. El símbolo es un signo general y a su vez refiere a un objeto general. Como ejemplo se puede tomar el símbolo + que denota un concepto general de suma y no una operación con sumandos específicos; también, puede tomarse la palabra botella, que hace referencia a un recipiente, independientemente del material del que esté hecha o la sustancia que pueda contener.

Esta clasificación del signo está directamente relacionada con las ideas de primeridad, segundidad y terceridad. La primeridad, se evidencia en tanto el ícono hace referencia a una cualidad del objeto, estableciéndose una relación directa como imagen del mismo; no es necesaria una referencia a otra cosa. La segundidad del índice, se denota en tanto es necesaria una segunda cualidad del objeto; retomando el ejemplo anterior en el que la huella de un animal es un índice, referimos al animal a través de su marca. La terceridad, establece un vínculo entre la primeridad y la segundidad, constituyéndose como una ley o carácter general.

El proceso descrito no es tan sencillo como un proceso lineal, es más bien una especie de bucle entre el signo, el objeto y su interpretante. La relación entre dichos elementos ocurre cuando el signo o representamen está vinculado con el objeto del que es signo, pero a la vez esa relación determina a otro elemento denominado interpretante; el objeto es reconocido como signo del objeto a través de un interpretante (Peirce, 1974, p. 44). El proceso no lineal referido, comienza cuando el interpretante se convierte en un signo superior en la mente de alguien y el proceso se repite de manera infinita.

Otra forma de ver la complejidad de este proceso es a través de la interacción social, en la construcción de la cultura. Se considera que cada sujeto lleva en sí una cultura propia, que no sería posible sin el otro, y al mismo tiempo esa cultura contribuye a la formación de una cultura general. Se retoma la visión de García, Escarbajal y Escarbajal (2007), para quienes "la cultura se construye compartiendo significados, que son los que dan sentido a nuestra visión del mundo y nos hacen tener unos u otros comportamientos" (p. 22).

De esta forma, los límites del concepto de cultura se enmarcan dentro de la interacción de significados, específicamente se trabaja con el concepto de cultura "entendida como un sistema de significados que es fruto de las interacciones sociales entre los miembros. Específicamente, la cultura representa la identidad de la organización." (Elías, 2015, p. 289). Así, se tiende hacia la construcción de un concepto de cultura relacionado con las matemáticas que es el área donde, además de los significados propios de la convivencia social, existen y se comparten los significados propios de los objetos matemáticos. En correspondencia con la relación triádica del signo, "la entera cultura es considerada como un sistema de signos en los cuales el significado de un significante se vuelve a su vez significante de otro significado o de hecho el significante del propio significado" (Eco, 1988, p. 187).

Para llegar a la idea de significado, falta hacer una aclaración de los signos en relación con los objetos de los que son signo. Según Peirce (1974), "la palabra Signo será usada para denotar un Objeto perceptible, o solamente imaginable, o aun inimaginable en un cierto sentido" (p. 23). Es decir, el signo debe representar (estar en lugar de), un objeto el cual puede formar parte del mundo fenomenológico o del mundo de las ideas. La condición es que ese signo sea distinto del objeto y además debe tener el potencial de información que refiera al objeto, en caso contrario no se estaría hablando del signo de un objeto, pues no existiría vínculo. Por tal motivo, en la creación del interpretante podemos hablar de significado:

> Con respecto al Interpretante, debemos distinguir también, en primer lugar, el lnterpretante Inmediato, o sea el interpretante tal como se revela en la correcta comprensión del Signo mismo, que es comúnmente llamado el significado del Signo; y, en segundo lugar, debemos considerar el lnterpretante Dinámico, que es el efecto real que el Signo, en tanto Signo, determina realmente. Por último, debemos tener en cuenta lo que he denominado provisoriamente el lnterpretante Final, que se refiere a la manera en que el Signo tiende a representarse a sí mismo en tanto relacionado con su Objeto. (Peirce, 1974, p. 65).

Con todo lo anterior, se ha hecho un breve recorrido por el complejo proceso de la significación desde una perspectiva necesariamente semiótica. "Para ser coherente al establecer el vínculo entre el significado y la comprensión, uno debe admitir que el objeto de comprensión es el mismo que el objeto de significado: es el signo, ampliamente entendido" (Sierpinska, 1994, p. 40). Es decir, al hablar de comprender un concepto, es necesario referir a aquello que dichos conceptos (objetos del significado) representan para nosotros. De ahí que es posible y viable explicar la comprensión a través del significado.

2.2. Comprensión en términos de Duval

La primera diferencia que se distingue, con respecto al trabajo de Sierpinska (1994), es que Duval (2016) hace un análisis de aquello que deriva en la incomprensión de los estudiantes. Aunque Sierpinska (1990, 1994) se enfoca, al menos en parte, en los obstáculos epistemológicos y su superación como condición para la comprensión, su análisis parte de las condiciones que posibilitan la comprensión de los estudiantes en matemáticas. Las fuentes de incomprensión que identifica Duval (2016) son precisamente las que se relacionan directamente con el tipo de transformación que se hace: tratamiento o conversión, de las que más adelante se hará explicito su significado.

Uno de los primeros planteamientos del trabajo de Duval (2016), es hacer la distinción entre los enfoques para investigar sobre las cuestiones relacionadas con el aprendizaje y la comprensión en matemáticas; distingue dos enfoques: epistemológico y educativo. Desde esta óptica, el enfoque que predomina en la investigación propuesta es del tipo epistemológico, pues se recurre en parte a la noción de comprensión como el resultado de un proceso de significación que se construye a lo largo del tiempo a través de representaciones. Además, se utiliza la epistemología de los conceptos que son motivo de análisis del caso, en particular se trata de la noción de sucesión.

Siguiendo a D'Amore (2005), se coincide con la idea de que "en Matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas" (p. 29). Entonces, se reconoce que las representaciones semióticas tienen un papel principal en la adquisición de conocimientos, por lo tanto, para el aprendizaje en matemáticas. Por tal motivo, habrá de prevalecer y privilegiarse la relación objeto – representación.

En este sentido, en el análisis de la comprensión, se identifica que los enfoques predominantes comparten el uso de la noción de representación, de ahí que se sigue la línea de plantear la cuestión de la comprensión en términos de representaciones. Duval (2016) reconoce el carácter de las representaciones relacionadas con las creencias y las concepciones, perspectiva que retoma de Jean Piaget. El enfoque general de estudio de Piaget es del tipo epistémico en el que, a través de un estudio con corte científico, buscó acercarse a las respuestas de los cuestionamientos sobre el conocimiento: ¿qué es el conocimiento? y ¿cómo son posibles los distintos tipos de saber? Preguntas como estas fueron formuladas tiempo atrás por diversos filósofos, sin embargo, se habían trabajado desde el estudio como hecho. Lo que hace diferente el enfoque es que Piaget se plantea el estudio del conocimiento como proceso. A partir de la búsqueda de respuestas fundadas, con carácter científico e interdisciplinar, se trasciende de los cuestionamientos clásicos a las interrogantes: "¿cómo construimos el conocimiento científico?, ¿cómo se traslada un sujeto de un estado de conocimientos inferior (de menos validez) a otro de orden superior (de mayor validez) ?, ¿cómo se originan las categorías básicas del pensamiento racional?" (Hernández, 2011, pp. 75-76)

Desde una perspectiva piagetiana, en el aprendizaje de la matemática, es más preciso hablar de construcción de conocimientos, sobre la adquisición de conocimiento. En este sentido, Duval (2016) precisa la necesidad de diversos enfoques relacionados con el estudio del aprendizaje en matemáticas. La característica que destaca de tales perspectivas es que tienen en común es el uso de representaciones, para dar rostro a los fenómenos en torno a los cuales el conocimiento matemático es posible. En el mismo texto en el que expone esas ideas, se rescata la noción de representación en dos sentidos: como "creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales […, o bien como] signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos" (Duval, 2016, p. 61). Particularmente, se considerarán a las representaciones en el segundo sentido, al cual se denominará semiótico y es la línea que se sigue para desarrollar lo que se considera el origen de la incomprensión de los alumnos en matemáticas.

Para el lector que parezca advertir una diferenciación entre las representaciones semióticas y las representaciones como imágenes mentales, se advierte que "la oposición entre representaciones mentales y representaciones semióticas ya no es pertinente, porque descansa en la confusión entre el modo fenomenológico de producción y el tipo de sistema movilizado para producir cualquier representación" (Duval, 2016, p. 63). Es decir, la distinción parece no ser pertinente, en tanto que existe una relación directa entre el uso de representaciones semióticas y el conocimiento que producen en la mente de quien las usa.

Es por eso que en adelante se hablará de representaciones en general, sin hacer tal distinción, pues se hace referencia a lo que subyace a ambos tipos de representación que se relaciona directamente con la estructura cognitiva sin dejar de lado el carácter semiótico. Las representaciones en matemáticas adquieren un rol indispensable, son mediadoras entre el conocimiento y los objetos matemáticos (Duval, 2016). Es decir, no se puede hablar de conocimiento matemático o de los objetos de la matemática sin referir a sus representaciones.

Antes de continuar con el origen de la incomprensión en matemáticas y su relación con las representaciones, vale dar una idea de lo que se entiende por representación. Duval (2016) retoma la idea de Peirce (1974) de concebir las representaciones con un algo en lugar de otro algo, noción que se ha trabajado en el apartado anterior de la presente investigación. Entonces, la perspectiva de Sierpinska y Duval está en armonía con los planteamientos de Peirce. Cabe agregar una distinción importante: "cuando se desea distinguir entre aquello que representa **y** el acto o relación de representar, lo primero puede ser llamado el 'representamen' y lo segundo la 'representación'" (Peirce, 1974, p. 43). Entonces las representaciones se consideran como un signo que representa a un objeto para un sujeto, en virtud de una necesidad o característica funcional, siempre considerado ese algo (signo) por su acción. Esta relación está bien descrita en la ilustración 2 *Esquema para la descripción de una representación* del apartado anterior.

Otra forma de tener una noción de las representaciones, es a partir de sus características. Duval (2016) distingue dos características que considera esenciales para hacer un análisis de su uso y puesta en práctica. Esas características también permiten tener un acercamiento a la función que cumplen las representaciones, en la forma en que se adquiere el conocimiento:

> 1. dos representaciones son diferentes cuando sus contenidos son de naturaleza diferente, es decir, no presentan el mismo tipo de unidades (palabras, contornos, densidad de puntos, flechas…), aunque representen el mismo objeto.
>
> 2. existen tantos tipos de representación diferentes como medios o sistemas para producir una representación: aparatos físicos, sistemas semióticos. No es posible clasificar, ni analizar las representaciones sin referirse a los diferentes sistemas que permiten construirlas. Eso quiere decir que las representaciones no dependen en primer lugar de los individuos sino de los sistemas productores de representaciones. (Duval, 2016, p. 65)

Las representaciones no están dadas *per se*, tal como se revisó con Peirce (1974), son signos que refieren al objeto. Sin embargo, tal referencia está determinada en gran medida por la significación que se hace del signo, lo cual produce un sistema de representación, que sería la convención en una condición de terceridad.

El problema de la comprensión, en relación con las representaciones, se pone de manifiesto a través del ejemplo de la doble yuxtaposición (Duval, 2016, p. 64). En ese ejemplo, se pone un objeto tangible con sus representaciones y se sabe que se tratan de representaciones del mismo objeto. Esta es la principal dificultad del aprendizaje en matemáticas: cómo reconocer los objetos que nunca han sido captados por los sentidos, lo que sería considerar una condición de primeridad (relación directa) con el objeto, pero en este caso (el de las representaciones matemáticas) no hay un objeto a la mano para hacer tal comparación. El gran problema que plantea esta situación, es que en matemáticas se llega a una condición de terceridad (establecimiento de una ley o convención) del signo y se hace a través de la razón, cuestión que funciona, pero el proceso es mucho más complejo en matemáticas que en otras áreas del conocimiento.

La dificultad es relacionar las representaciones de un mismo objeto que no existe en el mundo fenomenológico. En efecto, en la doble yuxtaposición se puede reconocer que ambas representaciones refieren al mismo objeto, en caso de existir dudas si la representación es o no del objeto, siempre podemos referirnos al propio objeto para constatarlo. Esta dificultad también se puede expresar en términos netamente semióticos:

> La única manera de comunicar una idea directamente es mediante un ícono; y todas las maneras indirectas de hacerlo deben depender, para ser establecidas, del uso de un ícono. Consecuentemente, toda aserción debe contener un ícono o un conjunto de íconos, o de lo contrario debe contener signos cuyo significado sólo pueda explicarse mediante íconos. La idea que el conjunto de íconos (o el equivalente del conjunto de íconos) contenido en una aserción efectivamente significa puede denominarse el predicado de la aserción. (Peirce, 1974, p. 47)

En términos prácticos, cuando en clase no se puede referir a un objeto (número, por ejemplo), porque no tiene una existencia tangible en el mundo fenomenológico, se deben recurrir a dichos signos cuyo significado solo pueda explicarse mediante íconos… Un ejemplo más es la denominada explicación con manzanas, para aclarar lo que los Bourbakistas denominaron numeral, que actualmente le denominamos número, por evocar a su concepto. Basta con preguntar a una persona que haya cursado educación básica *¿qué es esto?:* **7**, muy probablemente la respuesta sea un "siete" y posteriormente preguntar *¿qué es el siete?,* para recibir la probable respuesta de que es un número, y después cuestionar *¿qué es un número?* Aunque las respuestas pueden variar, probablemente girarán en torno a la idea de que es un signo (o alguna palabra utilizada indiscriminadamente que refiera a un algo: símbolo, marca, índice, grafía, objeto…) que indica una agrupación de cosas.

2.2.1. Transformaciones de representaciones

"El desafío esencial de la enseñanza es el paso de las representaciones icónicas, cualesquiera que sean, a los sistemas de representación simbólicos" (Duval, 2016, p. 69). Es decir, donde se actúe sobre los signos por convenciones o leyes establecidas. Además, se espera que estos signos o representaciones formen parte de un sistema, en donde dichas convenciones estén determinadas y sean comprensibles para el alumno. Para comprender cómo los alumnos desarrollan las actividades matemáticas, que los llevarán a la comprensión o no, es necesario poner especiar atención en los sistemas de representación semiótica que dan origen a las representaciones particulares que utilizan.

En este caso, se está hablando de que, para lograr la compresión en matemáticas, es necesario hacer transformaciones de las representaciones. Esto se da a partir de una función pragmática de las mismas: "la función esencial de un signo [representación] es transformar relaciones ineficientes en otras que sean eficientes; no para ponerlas en acción, sino para establecer un hábito o regla general según los cuales actuarán cuando sea oportuno" (Peirce, 1974, pp. 92-93). Para lograr la comprensión, es necesario establecer relaciones variadas entre las representaciones pertenecientes a un registro de representación semiótica; es necesario hacer transformaciones de dichas representaciones. Duval (2016) distingue dos tipos de transformaciones:

> Los tratamientos […] son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro; por ejemplo, realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura usando criterios perceptuales de conectividad o simetría, etc. Eso da prominencia al papel intrínseco de los sistemas semióticos en los procesos matemáticos.
>
> Las conversiones […] son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado. (pp. 72-74)

Ambas transformaciones son indispensables para el aprendizaje de las matemáticas, puesto que, al lograrlas el alumno da cuenta de las habilidades que ha desarrollado; por lo tanto, hay comprensión. Sin embargo, debido a las características de evocación (imposibilidad de remitir al objeto material y, por lo tanto, dificultad para reconocer un mismo objeto representado en dos registros semióticos distintos, Duval, 2016), ambos tipos de transformaciones pueden llevar al alumno, en proceso de aprendizaje, a enfrentarse a dificultades y cometer errores.

Para hablar de este tipo de transformaciones, también resulta necesario hablar de lo que es un registro de representación semiótica. Un registro de representación semiótica (Duval, 1999) es un sistema semiótico, es decir, un sistema en el que existe la posibilidad de crear signos e interpretarlos; posibilidad que se relaciona directamente con la condición de *legisigno* considerado como una ley o convención establecida por el hombre (Peirce, 1974). Con mayor precisión, se considera que un sistema semiótico es un sistema en el que se pueden producir, transmitir, recibir e interpretar signos de diferentes tipos. Toda acción en la que tienen que ver los signos se hace a través de uno o varios sistemas semióticos. D'Amore (2018) hace la interpretación más simple del concepto de registro de representación semiótica, cuando dice que es "un sistema de signos que permite cumplir funciones de comunicación, de tratamiento y de objetivación y no se refiere al contrario a las notaciones convencionales que no forman un sistema" (p. 24).

La diferencia entre un sistema semiótico y un registro de representación semiótica, es que este último permite la transformación de representaciones (Duval, 2016). De hecho, las condiciones para que un sistema semiótico se considere un registro de representación semiótica, tienen que ver en gran medida con los tipos de transformaciones que son posibles al interior de dicho registro, así como entre dos o más registros.

> Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales vinculadas a la semiosis.
>
> 1. **La formación de una representación identificable** como una representación de un registro dado: […]. Esta selección se realiza de acuerdo con las unidades de capacitación y las reglas específicas del registro semiótico en el que se produce la representación.
> 2. **El tratamiento** de una representación es la **transformación** de esta representación **en el registro mismo donde se formó**. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
> 3. **La conversión** de una representación es la **transformación** de esta representación en una representación de **otro registro** mientras se conserva todo o solo parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro inicial (Duval, 1993, pp. 41-42).

Tal como se planteó anteriormente, para lograr la comprensión en matemáticas es necesario llevar a cabo las transformaciones de las representaciones, las cuales a su vez se constituyen como fuentes de dificultades en el aprendizaje de la matemática (Duval, 2016). En relación con los tratamientos, la dificultad se da cuando en educación, el predominio del uso de registros monofuncionales (escritura algebraica, gráficas, etc.) es causa de la algoritmación excesiva. En este sentido, se cae en convertir al registro semiótico en el objeto de estudio, por encima del estudio del objeto que se representa a través de dicho registro. Esto es similar a la cuestión que plantea D'Amore (2005), en la que se aprenden signos en lugar de aprender conceptos. En relación con el paso de un registro de representación a otro, se presenta una fuente de dificultad si se considera que "la conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con la conversión sería indicativo de conceptos erróneos" (Duval, 2006, p. 157).

D'Amore (2005), citando a Duval, hace hincapié en el hecho de que, la adquisición conceptual de los objetos matemáticos depende de dos de sus características: el uso y la creación de registros semióticos de representación. La primera característica (el uso), no debe confundirse con un uso, quizá hasta dominio mecánico de las representaciones; no es suficiente con que el alumno sea capaz de emplear las representaciones con cierta destreza, sin comprender la lógica que hay detrás de dicha representación. Se apuesta por un uso consciente de las representaciones, lo cual permitirá que la segunda característica sea posible, y por consecuencia, el aprendizaje y comprensión en matemáticas.

Para finalizar el breve recorrido en relación con la comprensión, desde la perspectiva de Duval, se destaca su postura de que "el desafío esencial de la enseñanza es el paso de las representaciones icónicas, cualesquiera que sean, a los sistemas de representación simbólicos" (2016, p. 69). Es decir, se espera que el alumno trascienda de las representaciones que tienen vínculos muy fuertes con los objetos matemáticos por su parecido, a establecer vínculos que estén regulados por "leyes" que permitan el funcionamiento de un sistema de signos. "La comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto" (Duval, 2006, p. 158).

2.2.2. Objetos y conceptos matemáticos

Se ha precisado que, para hablar de comprensión en matemáticas, es necesario remitirse a las representaciones que ocupan el lugar de algo, ese algo son los objetos matemáticos. "Un objeto matemático es, o representa, una cualidad o una acción que tiene la función de organizar o interpretar un contexto" (Pecharromán, 2014, p. 112). Es decir, no se hace referencia a un objeto material que exista per se, sino que se trata de cualidades o acciones, que en determinado escenario cumplen funciones sintácticas y semánticas que aglutinan conocimiento matemático. Por otra parte, se considera que tal visión puede ser reduccionista puesto que "los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita meramente con definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos" (Godino, 2003, p. 87). Esta noción nos da un breve panorama de la complejidad de definir al objeto matemático. Sin embargo, es innegable la relación que existe entre el objeto matemático y las representaciones para su tratamiento, especialmente para el aprendizaje de la matemática.

En este sentido, Pecharromán (2014) destaca dos necesidades relacionadas directamente con los objetos matemáticos: la necesidad de una expresión y posteriormente de una interpretación; estas nociones a su vez hacen referencia a las ideas de representación y significado respectivamente. Los objetos matemáticos no pueden ser manipulados directamente para su conceptualización y posterior aprendizaje, por ende, requieren ser representados mediante signos matemáticos.

En relación con la conceptualización, D'Amore (2005) se plantea la aproximación a la caracterización del *concepto* como aquello que tiene una "fuerte componente […] 'antropológica" (p. 21), la cual se caracteriza por formar parte de una *relación institucional con el objeto del saber* y una *relación personal con el objeto del saber*. Es decir, el concepto forma parte de las estructuras mentales del sujeto que conoce, pero al mismo tiempo forma parte de un imaginario colectivo que no es necesariamente universal. Se reconoce además que el concepto no es estático, es decir, se encuentra en constante construcción, por lo que es más prudente hablar de conceptualización. Dicha conceptualización se concibe como una "apropiación consciente [de] un concepto C [que] es la terna (S, I, S) donde S es el referente, I, el significado y S el significante" (D'Amore, 2005, p. 22). Esta relación imbricada da una idea de la complejidad de hablar de conceptos en matemáticas, por lo que, a pesar de una inexistencia material, se prefiere hablar de objetos matemáticos. Y para hablar de objetos matemáticos necesariamente debe remitirse a sus representaciones.

2.3. SUCESIONES

Para hablar de las sucesiones, es necesario remontarse a la idea más simple y a la vez más compleja de una sucesión: la idea de número. Puede ser tan simple concebida desde el hecho de que surge a partir de la necesidad de contar elementos de la naturaleza, o tan compleja que podemos decir que incluso los adultos tenemos mecanizada la noción del número a partir de su uso, sin reflexionar sobre su esencia (Issacs, 1967). Precisamente la historia del desarrollo del concepto de número, puede arrojar una idea de lo complejo que puede ser comprender el número mismo, las sucesiones aritméticas y todos los conceptos matemáticos que devienen o se relacionan directamente con estos conceptos: sucesión geométrica, sucesión cuadrática, series, funciones, límites, integrales.

Los números naturales surgen, como muchas de las invenciones del hombre, a partir de una necesidad. En este caso, la necesidad práctica de contar objetos llevó al hombre a la idea intuitiva de número, con la actividad aritmética que se denomina correspondencia uno a uno. Esta actividad permite comparar dos conjuntos, a pesar de que no tengan la misma naturaleza. La idea del surgimiento del número, a partir de la comparación de conjuntos, es ampliamente utilizada en educación; su uso se da a través anécdotas de hombres primitivos contando su ganado:

> Un pastor que quisiera tener control sobre el número de cabezas de ganado que sacaba a pastorear debía estar provisto de una bolsa llena de piedrecillas. Por cada oveja que salía del corral tomaba una piedra de la bolsa. De esta manera al volver a casa establecía una correspondencia biunívoca entre cabezas de ganado y piedras para saber si se le había extraviado alguna oveja del rebaño (Gracián, Corbalán, y Navarro, 2019, p. 511)

Esta anécdota, revela la manera en la que concebimos las primeras formas de conteo. En esa misma idea se encuentra la noción de "más" o "menos" elementos, al comparar conjuntos. Paralelamente fueron surgiendo las ideas de unidad y paridad, relacionadas principalmente con el entorno y con la naturaleza del cuerpo humano: una cabeza, dos brazos, una nariz, dos ojos, etc. Así, el uno y el dos, son los primeros conceptos de números primitivos de los que se tiene registro (Ifrah, 2008).

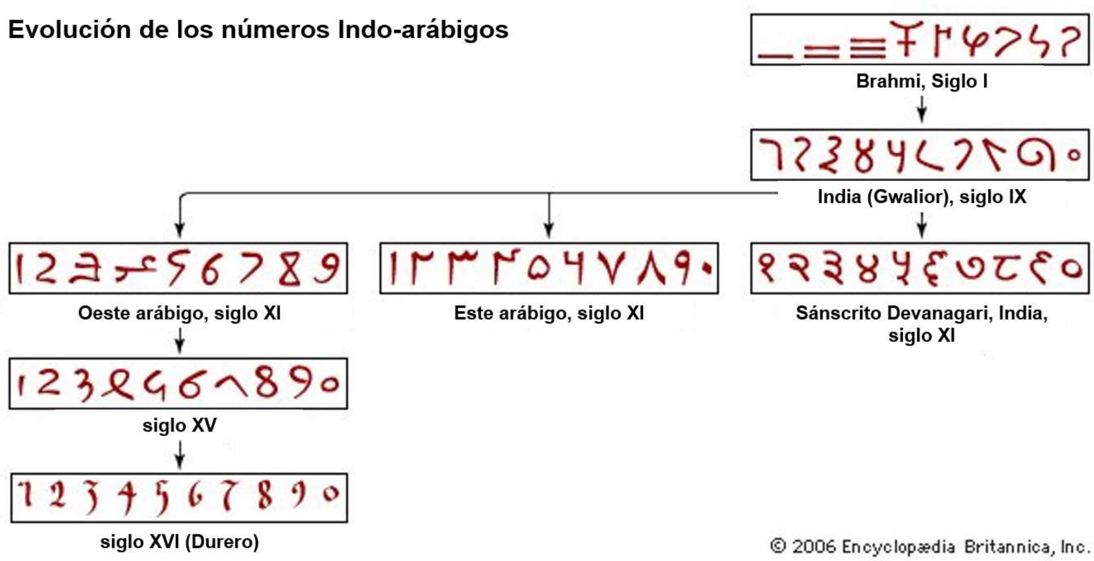
Con el tiempo, la actividad de comparar conjuntos con objetos tuvo que sustituirse por algo más práctico, así es como surgen las primeras marcas que representan cantidades asociadas a objetos. Unas de las primeras representaciones fueron marcas en figuras de arcilla, representando medidas convencionales de grano, animales o productos de uso común. Esas formas rudimentarias de representación numérica datan de hace aproximadamente 8,000 años. Sin embargo, existen registros más remotos de marcas de conteo en objetos, probablemente asociadas a fases lunares u otras cuentas, cuyo referente no se conoce con exactitud, como el hueso de Lebombo (37,000 años aprox.) o el hueso de Ishango (25,000 años aprox.; Stewart, 2012).

Las marcas de conteo, ampliamente utilizadas por diversas civilizaciones primitivas, tuvieron un carácter práctico relacionado directamente con la idea de sucesión: podían agregarse de una en una sin necesidad de ser borradas o alterar la cuenta. Esta idea se liga con la noción de unidad, la cual se conserva en los sistemas de conteo y las formas de escritura numérica, durante muchos años. Al observar un solo elemento de determinada naturaleza, se tiene la idea de unidad: un animal, una roca, una persona. De la misma forma, al observar más de un elemento de la misma naturaleza, surge la idea de conjunto: muchas rocas, muchas personas, muchos animales.

Tal como se sustituyó el uso de objetos por marcas de conteo, éstas debieron sustituirse por formas más prácticas de representación. Así, "los primitivos símbolos inscritos en tablillas de arcilla húmeda se transformaron en pictogramas […] y posteriormente los pictogramas se simplificaron y quedaron reducidos a un pequeño número de marcas con forma de cuña" (Stewart, 2012, p. 15). Estas prácticas dieron origen a lo que se denomina escritura cuneiforme, la cual tiene gran parecido a los primeros sistemas de numeración, que a su vez derivaron en los números indo-arábigos que utilizamos en la actualidad (ver ilustración 3).

Los sistemas de numeración que utilizaron la escritura cuneiforme, se basaban en un principio aditivo. En ese principio, dependiendo la cantidad de representaciones que se tuvieran, era necesario repetir un signo tantas veces fuera necesario, hasta el número anterior al que representaba el siguiente signo. Por ejemplo, el sistema de numeración egipcio utilizaba una marca vertical (ı) para representar el número 1, una agrupación de nueve marcas verticales para representar el número 9 y una línea curva (∩) para representar el 10. Debido a la cantidad enorme de signos para representar un número, en la evolución de los sistemas de numeración, se encontraron nuevas formas de representarlos: el principio sustractivo de la numeración romana, el multiplicativo de la numeración ática de los griegos, así como las diferentes bases de los sistemas de numeración.

Ilustración 3. Evolución de los números indo-arábigos



Fuente: obtenido (traducido) de Indian mathematics en Encyclopedia Britannica, (2006)

Actualmente, con el antepasado directo de los 10 símbolos conocidos de nuestra notación numérica, no existen problemas para representar grandes cantidades, mucho menos pequeñas cantidades. Sin embargo, ese problema existió con la escritura utilizando los numerales Brahmi, pues aún no se contaba con una representación para la ausencia. Poco a poco, problemas como la representación del cero, así como la acepción y representación de los números negativos, fueron tomando lugar en el desarrollo de los sistemas de numeración, la aritmética, el álgebra y la matemática misma.

Este panorama da idea de lo complejo que resultó el desarrollo del sistema de numeración decimal. De este breve recorrido, se pueden destacar dos puntos clave: el desarrollo de las representaciones simbólicas para los números y la idea de un continuo, de una sucesión.

Sobre las representaciones de los números, es evidente que un símbolo lleva en sí gran parte de la historia que le dio forma. Tal como lo concibe Leibniz cada símbolo de un objeto debe llevar en sí la esencia de aquello que representa, una parte de su historia (citado en Sierpinska, 1994, p. 25). La ilustración 3, es apenas una pequeña muestra del vasto conocimiento sobre las representaciones de los números a través del tiempo. La historia de los números se conoce también a través del desarrollo de sus símbolos y de sus representaciones en general.

Por otra parte, paralelo al surgimiento de los números naturales, cuyo desarrollo se pierde en la historia, surge la noción de sucesión. Por lo tanto, una forma de hablar de las sucesiones es también a través de la historia de los números naturales. Además del bosquejo dado a partir del surgimiento del número, vinculado a la necesidad del hombre de contar en la naturaleza, se considera que un punto clave en la historia de la matemática, es la creación de los axiomas para los números naturales por el matemático italiano Giuseppe Peano.

Para la época en la que los axiomas de Peano vieron la luz (1889), la matemática ya había visto grandes momentos de su desarrollo, quizá los más brillantes. De hecho, gran parte de la matemática que se estudia en educación básica, es la que hasta dicha época se había desarrollado. Pero, como es conocido, la matemática está fundada en nociones intuitivas, postulados y teoremas. Es decir, la matemática que conocemos, se fundamenta en supuestos, algunos demostrables, dentro de un sistema, y otros que no son comprobables. Como es lógico pensarlo, situaciones de este tipo llevan a cuestionar sobre la existencia de nociones fundamentales.

Precisamente, cuestionar sobre la existencia de los números (reales, racionales y enteros) provocó la vuelta atrás sobre el camino del desarrollo de los números hasta llegar a los naturales. Es en este punto que Peano, basado en el trabajo de Euclides para cuestiones fundamentales de geometría, escribe una lista de axiomas para los números naturales:

- Existe un número 0.
- Todo número n tiene un sucesor s(n) (al que designamos n + 1).
- Si P(n) es una propiedad de los números, tal que P(0) es verdadera, y si cada vez que P(n) es verdadera entonces P(s(n)) es verdadera, entonces P(n) es verdadera para todo n (principio de inducción matemática). (Stewart, 2012, p. 250).

Aquí la cuestión de la existencia, se sobreentiende cuando Peano no recurre a tratar el significado de número natural, sino que lo supone y a partir de ello crea sus axiomas. Los axiomas permiten la creación de sistemas en los que se puede probar la existencia de los números naturales. Sin embargo, fuera de las matemáticas (en filosofía principalmente), la cuestión de existencia es un problema que ha sido tratado durante siglos, sin una respuesta que sea totalmente satisfactoria. Este dilema hace volver la mirada a las representaciones y la necesidad del tratamiento de los objetos matemáticos a través de ellas, como único medio de acceso (Duval, 1993).

Además, los axiomas de Peano, muestran de manera generalizada la cuestión de sucesión de los números naturales. Tras varios siglos de los primeros indicios de su existencia, se generalizan de manera formal las reglas de funcionamiento del sistema numérico de los números naturales. Se observa en ellos que la unidad es un concepto fundamental en la axiomática de los naturales, pues a partir de ella siempre es posible determinar el sucesor de un número, el sucesor del sucesor y así de manera continua, creando una sucesión; podríamos denominarla primitiva. Una sucesión es una propiedad de otros conjuntos de números como los enteros o los racionales, pues agregando un valor determinado (generalmente denominado constante), se puede obtener otro valor que, en un procedimiento iterado, será llamado sucesor.

En otro orden de ideas, un punto que también es fundamental en la historia relacionada con el concepto de sucesión es la creación del álgebra, concibiendo como uno de sus componentes la generalización de las sucesiones. De hecho, el álgebra, considerada como una idea general de los números, lleva en sí la idea de generalización de una sucesión, aunque no se reduce a ella.

Los primeros indicios que se tienen del álgebra es la operación de cantidades desconocidas. Se ha encontrado evidencia, de que mucho antes de la existencia de los primeros símbolos que originaron nuestro sistema de numeración, se resolvían problemas con ecuaciones. No se trata de ecuaciones como las concebimos en la actualidad. Se trata de enunciados problema que demandan la necesidad de operar con cantidades desconocidas. “Hay evidencia indirecta de que los babilonios ya resolvían ecuaciones bastante complicadas en el 2000 a.C., y evidencia directa de soluciones de problemas más sencillos, en forma de tablillas cuneiformes, que se remonta hasta alrededor del 1700 a.C." (Stewart, 2012, p. 62)

Con este tipo de planteamientos nace el álgebra y se desarrolla en la historia a lo largo de tres etapas: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica. La primera etapa se caracteriza por el uso de lenguaje común (vernáculo) para la resolución de problemas, no había símbolos que representaran cantidades o relaciones entre ellas y las soluciones también eran expresadas de manera verbal. Posteriormente, en la denominada etapa del álgebra sincopada, caracterizada por los trabajos de Diofanto, el lenguaje se utilizaba de la misma forma que en la etapa anterior, pero con la introducción de algunas abreviaturas para denotar términos o cantidades. La etapa simbólica, a partir del siglo XVI, se caracteriza por el uso de letras como símbolos para representar cantidades, trabajo que fue desarrollado por el matemático francés François Viète. Lo destacable de esta última etapa, es que se crea un sistema de signos que permite la operación y expresión de reglas generales, sin la necesidad de las traducciones al lenguaje común (Puig y Rojano, 2004).

En álgebra se puede desarrollar la generalización de los números, cuando estos son representados por letras. De esta forma, a diferencia de la aritmética, en la que cada número se representa por dígitos determinados, en álgebra una letra puede representar un valor conocido o desconocido (incógnita), así como diferentes valores (variable), dependiendo del contexto en el que se le utilice. Así, la expresión general de una sucesión puede considerarse como una fórmula algebraica, puesto que es la representación por medio de letras de una regla o principio general. En este sentido, también puede considerarse a dicha expresión como una función, debido a que es una expresión que relaciona una variable dependiente (término de una sucesión) con la variable independiente (posición del término). Esto lo podemos verificar nuevamente con el desarrollo de los números formados por agregación de unidades, los cuales a su vez están mejor representados por los axiomas de Peano, en específico por el segundo: todo número n tiene un sucesor $s(n)$ (al que designamos $n + 1$).

En general, se concibe que no sería posible hablar de las sucesiones sin remitirse a dos puntos clave: desarrollo de los números y el lenguaje algebraico. El primero resalta su importancia por la evolución del concepto mismo de número, de las grafías que lo representan, así como de la noción de unidad y el crecimiento constante en una sucesión. El lenguaje del álgebra puede verse como una extensión de la aritmética, que evolucionó hasta constituirse como una rama de las matemáticas. A pesar de que el lenguaje del álgebra no nace con la generalización de sucesiones, actualmente, se considera una forma de introducir a los alumnos al pensamiento algebraico (Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi, 2012).

2.3.1. Definición formal de una sucesión

La idea de sucesión en matemáticas, como se mencionó en el apartado anterior, viene desde las primeras nociones de número. La idea de venir algo detrás de otra cosa respetando un orden determinado, surge con la idea de número natural. Se tiene entonces la idea de sucesión como algo que tiene un orden, que se compone de diferentes elementos y que existe algo que la determina. De esta forma, apelamos a una definición formal de sucesión de números:

> Una *sucesión* de números es un *conjunto ordenado* de números formados de acuerdo con una ley dada.
> El requisito esencial para que exista una sucesión es que exista una ley o fórmula con la cual sea posible obtener cualquier elemento de la sucesión. Por ejemplo, si u_n representa el enésimo término de una sucesión, entonces debe existir una expresión para u_n en términos de n, es decir, dicho término enésimo debe ser una función de n (Lehmann, 2009, p. 213)

Se puede definir entonces a una sucesión o progresión numérica, como un conjunto de números ordenados y definir con una literal a cada uno de los términos de dicha sucesión. Así, por ejemplo, si se tiene que u_1 es el primer término, u_2 es el segundo término, u_3 es el tercer término y u_n es el enésimo término. Además, estos términos pueden estar representados o generarse a partir de una expresión algebraica, la cual habrá de depender del tipo de sucesión que se trate, encontrando dos tipos principales de sucesiones: aritméticas y geométricas.

Cuando en una sucesión se sabe que tiene un último término, esa sucesión se denomina sucesión finita. De lo contrario, cuando el número de términos de la sucesión es ilimitado se dice que la sucesión es infinita. Por ejemplo, si ordenamos los números naturales se pueden concebir como una sucesión infinita; de acuerdo con los axiomas de Peano, siempre es posible obtener otro número natural agregándole una unidad. Otra característica que puede distinguirse de las sucesiones es si son crecientes o decrecientes. Una sucesión es creciente cuando cada uno de los términos es mayor que el anterior, y decreciente cuando cada término es menor que el anterior.

Un aspecto que hay que destacar, es que al obtener la suma de todos los términos de una sucesión obtenemos una serie. Las series también cumplen la característica de ser finitas o infinitas, de acuerdo con la existencia o no de un último término de la propia sucesión que las compone. Las series infinitas son uno de los principales objetos de estudio del cálculo integral.

2.3.2. Sucesiones aritméticas

Las sucesiones o progresiones aritméticas, pueden considerarse las sucesiones más sencillas de tratar, pues la regularidad que las conforma se relaciona con las operaciones aditivas. Formalmente se define que "una progresión aritmética es una sucesión de números tal que cada uno de los términos posteriores al primero se obtiene añadiendo al término anterior un número fijo llamado *diferencia* de la progresión" (Lehmann, 2009, p. 214). Por ejemplo, los números naturales son una progresión aritmética: 1, 2, 3, 4, 5… en donde el primer elemento es el 1 y la diferencia de la sucesión es 1, pues a partir de agregar 1 a cada término podemos obtener el siguiente término de la sucesión.

Aunque en el contexto educativo existe cierto desuso, el signo de una progresión aritmética es ÷ y cada uno de sus términos se separa con una coma. Se puede escribir una sucesión $\div\, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$, donde el primer elemento es 1 y la diferencia es 2. A partir del primer elemento, agregando la diferencia 2, podemos obtener los demás términos de la sucesión.

La generalización de las sucesiones es una actividad usada frecuentemente para introducir a los estudiantes al estudio del álgebra. A partir de las generalizaciones de las sucesiones, podemos calcular el enésimo término, o utilizar dicha generalización para saber si un elemento forma parte o no de la misma. Existen diferentes formas de encontrar la expresión general de una sucesión o progresión aritmética, el principio es el mismo, lo que suele variar son las literales o el orden de las mismas.

Tabla 1. Dos formas de expresar la generalización de una sucesión aritmética.

Expresión general para calcular el enésimo término de una sucesión	**Deducción de la fórmula para calcular el enésimo término de una sucesión aritmética**
De acuerdo con la definición, una progresión aritmética puede escribirse en la forma (1) $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots,$ en donde a_1 se llama *primer término* y d es la diferencia.	Sea la progresión $a, b, c, d, e, \ldots\ldots, u,$ en la que u es el término **enésimo** y cuya razón es r. En toda progresión aritmética, cada término es igual a la razón; luego, tendremos:

Expresión general para calcular el enésimo término de una sucesión	**Deducción de la fórmula para calcular el enésimo término de una sucesión aritmética**
Si a_n representa el enésimo término de la sucesión (1), entonces el segundo término es $a_2 = a_1 + d$, el tercer término es $a_3 = a_1 + 2d$, el cuarto término es $a_4 = a_1 + 3d$, y en general, el enésimo término es (2) $a_n = a_1 + (n-1)d$.	$b = a + r$ $c = b + r = (a + r) + r = a + 2r$ $d = c + r = (a + 2r) + r = a + 3r$ $e = d + r = (a + 3r) + r = a + 4r\ldots$ Aquí vemos que cada término es igual al primer término de la progresión a más tantas veces la razón como los términos que le preceden; luego, como esta ley se cumple para todos los términos, tendremos que u será igual al primer término a más tantas veces la razón como términos le preceden, y como u es el término enésimo, le preceden $n-1$ términos; luego: $u = a + (n-1)r$
(Lehmann, 2009, p. 214)	(Baldor, 2005, p. 491)

Fuente: elaboración propia a partir del apartado *Progresiones,* del libro *Álgebra (Lehmann, 2009),* así como del *capítulo XXVII Progresiones* del libro *Álgebra (Baldor, 2005).*

Es notoria la diferencia que se utiliza en la nomenclatura de los elementos que componen una sucesión. Por ejemplo, el valor que se agrega a cada elemento de la sucesión para obtener el siguiente es denominado diferencia por Lehman y razón por Baldor. De ahí que, lo que distínguela a las generalizaciones es únicamente el uso de distintas literales, pero se llega a expresiones que en esencia son lo mismo. De acuerdo con la nomenclatura mostrada en la tabla 1, se opta por la denominación de diferencia, pues se considera que hablar de razón puede provocar cierta confusión con las sucesiones geométricas.

Tal como se mencionó anteriormente, una forma o caso especial de las sucesiones son las series. Derivado de una sucesión aritmética se puede obtener una serie con progresión aritmética. Al igual que con las expresiones que generalizan el enésimo término de una sucesión, en álgebra, es posible construir una expresión para calcular el valor de una serie finita o parte de ella si es infinita. Para ello, es necesario conocer los elementos principales que la componen: primer término, enésimo término y la diferencia.

Tabla 2. Dos formas de expresar la generalización de una serie aritmética

Expresión general para calcular la suma s_n de los n primeros términos de una sucesión	Deducción de la fórmula para hallar la suma de los términos de una progresión aritmética
Expresión para la suma s_n, de los n primeros términos de la sucesión (1) [presente en la tabla anterior], es decir, para la suma (3) $s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$. Escribiendo los términos del segundo miembro de (3) en orden inverso tenemos (4) $s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$ Sumando miembro a miembro (3) y (4) tenemos $2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + .. + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$ de donde (5) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	En toda Sea la progresión $\div\, a, b, c, \ldots\ldots, l, m, u$ que consta de n términos. Designando por S la suma de todos los términos de esta progresión, tendremos: $S = a + b + c + \ldots\ldots + l + m + u$ y también: $S = u + m + l + \ldots\ldots + c + b + a$ Sumando estas igualdades tenemos: $S = (a + u) + (b + m) + (c + l) + \ldots\ldots + (l + c) + (m + b) + (u + a)$. Ahora bien, todos estos binomios son iguales a $(a + u)$ porque […] la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos, y como hay tantos binomios como términos tiene la progresión, tendremos: $2S = (a + u)n$ y de aquí $S = \frac{(a+u)n}{2}$
(Lehmann, 2009, pp. 214-215)	(Baldor, 2005, p. 494)

Fuente: elaboración propia a partir del apartado *Progresiones,* del libro *Álgebra (Lehmann, 2009),* así como del *capítulo XXVII Progresiones* del libro *Álgebra (Baldor, 2005).*

2.3.3. Sucesiones geométricas

De acuerdo con la definición, se concibe que una sucesión o progresión es un conjunto de números que se genera a partir de una "ley" dada. Esta ley o expresión general es lo que diferencia los dos principales tipos de sucesiones, las aritméticas y las geométricas. Estas sucesiones se diferencian además por el patrón que las genera. Una sucesión aritmética está dada por un patrón aditivo, donde se suma una cantidad a cada elemento para generar el elemento siguiente. En las sucesiones geométricas, el patrón que las define es de tipo multiplicativo; cada elemento o término de la sucesión se genera a partir de multiplicar un número por un término, para generar el siguiente término.

De manera formal, se define una progresión geométrica como "una sucesión de números, tal que cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado *razón de la progresión*" (Lehmann, 2009, p. 218). Un ejemplo de progresión geométrica en el entorno, son los diagramas de torneos deportivos o de cualquier otro tipo: a la final llegan 2 competidores, a la semifinal califican 4 competidores, en los cuartos de final se requieren 8 competidores, para los octavos 8 y así sucesivamente; se puede formar entonces la sucesión $\div 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

Al igual que con las sucesiones aritméticas, de las sucesiones geométricas pueden construirse expresiones generales en lenguaje algebraico que definen los términos de dicha sucesión. De la misma forma, se puede generalizar la suma de los n términos de una sucesión o progresión geométrica:

> *Si en una progresión geométrica a_1 es el primer término, a_n es el enésimo término, r es la razón y s_n es la suma de los n primeros términos, entonces tenemos las dos relaciones independientes*
>
> $$a_n = a_1 r^{n-1}$$
>
> y $$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \ \ r \neq 1 \qquad (\text{Lehmann}, 2009, \text{p}. 219)$$

Expresiones de este tipo son las que se busca que comiencen a desarrollar los alumnos de secundaria, específicamente de las sucesiones aritméticas. La razón de que se privilegien las sucesiones aritméticas puede ser variadas, sin embargo, ha de reconocerse que para los alumnos pueden ser menos complejas. Las sucesiones aritméticas no requieren del uso de los exponentes puesto que se rigen por un patrón aditivo, que en la generalización se vuelve multiplicativo; las sucesiones geométricas definidas por un patrón multiplicativo, en la generalización se vuelve exponencial. Utilizando actividades que tienen que ver con generalizaciones, haciendo uso del álgebra como herramienta, se busca contribuir al desarrollo del razonamiento algebraico. La generalización de sucesiones, con patrones aritméticos y geométricos a través del lenguaje formal del álgebra, puede dar cuenta de la comprensión por parte de los estudiantes de secundaria.

2.4. ALGUNAS INVESTIGACIONES RELACIONADAS

2.4.1. Sobre las sucesiones y representaciones

En una investigación de Rafael Durán (1999), cuyo objetivo era hacer un análisis de las estrategias que algunos alumnos de sexto grado de primaria en México utilizan para reconocer en secuencias de figuras o de números, se reconoce la importancia de las sucesiones para el aprendizaje del álgebra. Lo anterior, a consideración del reconocimiento de patrones como una forma de tender al aprendizaje del álgebra y de procesos de generalización. En la investigación se utilizaron dos enfoques teóricos: el primero desde la fundamentación de la relación de los patrones en secuencias con el aprendizaje del álgebra; el segundo enfoque desde el aprendizaje y desarrollo, en general, a partir de la teoría de Vigotsky. Después de una primera aplicación de un cuestionario de patrones en sucesiones, se reconocieron perfiles de estudiantes y se diseñaron sesiones de trabajo para que, utilizando la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo, los estudiantes destacados apoyaran a aquellos con dificultades. El resultado es que los alumnos mostraron mayor facilidad para reconocer patrones y utilizar un lenguaje matemático para expresar las relaciones que les permitieran calcular los términos de una secuencia.

Una estrategia similar de búsqueda de patrones se muestra en la investigación de Encarnación Castro (1995), en la que explora la introducción de los estudiantes a la comprensión de las relaciones de números como un sistema figurado de representaciones. En su investigación, la autora considera el supuesto de la mejora de la comprensión a través de las representaciones figurativas. Para demostrarlo, con ayuda de un grupo investigador, aplicó un test para conocer el dominio de los estudiantes en relación con la visualización y el descubrimiento de patrones. A partir de los resultados, elaboró fichas de trabajo que se utilizaron en clase y posteriormente se hizo un análisis de los resultados a través de categorías creadas. Los resultados de la investigación muestran que aún existen alumnos que confunden las expresiones generales con la posición de un término general. Sin embargo, a través del sistema de representación puntual los alumnos desarrollan habilidades de intuición en el reconocimiento de patrones. Lo anterior ayuda a mejorar la comprensión de conceptos numéricos, mejora la habilidad numérica y el dominio del trabajo con actividades de sucesiones numéricas.

2.4.2. Sobre las representaciones, lenguaje algebraico y aprendizaje del álgebra

Erika Sofía González Trujillo (2012) en su trabajo “Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica” destaca la problemática de la falta de significado en el lenguaje simbólico. Esto se atribuye, en gran medida, a que el lenguaje algebraico muchas veces se estudia desde una visión simplista; se utiliza en la aplicación de fórmulas y algoritmos carentes de sentido. De esta situación, Gonzáles Trujillo, identifica que se deriva la dificultad de los estudiantes de conceptualizar a la variable y utilizarla en distintos contextos de manera flexible. En la investigación, se destaca la propuesta de acercar al estudiante al lenguaje algebraico, por medio de generalizaciones del tipo numérico o geométrico.

En el mismo sentido, María de las Mercedes Palarea Medina (1999), en el artículo “La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación” para la revista *Números*, muestra que los Sistemas de Representaciones Semióticas no tienen la relevancia que debieran. Esto se traduce en la poca habilidad que se desarrolla para cambiar de registros semióticos; en consecuencia, se materializan las dificultades relacionadas con el aprendizaje y uso del lenguaje algebraico. Palarea Medina destaca la necesidad de incluir una base de sistemas de representación para que la dinámica del aula sea fluida.

La capacidad de manipular expresiones algebraicas, es crucial en el estudio de la matemática escolar; el alumno puede, a través de ellas, hacer las transformaciones necesarias que lo lleven a resolver problemas algebraicos. En este sentido Ana María Olazábal Carpio (2005) en su tesis de maestría “Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto” plantea crear una categorización de problemas matemáticos en contexto. En el texto, se comparte información valiosa acerca de las etapas de traducción de enunciados problema del lenguaje natural al algebraico. Considera a la traducción de enunciados como condición necesaria, pero no suficiente, para resolver problemas; sin embargo, no hay una relación clara entre el nivel de éxito en la resolución de problemas conforme se avanza en las distintas categorías.

José Abraham de la Fuente Pérez (2016), a través de su tesis doctoral “Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor”, se cuestiona acerca de los conocimientos que debe tener el profesor y cómo puede usarlos, para ayudar a los alumnos a adquirir el lenguaje algebraico resolviendo problemas. Los resultados de su trabajo, muestran que aquellos problemas que demandan una respuesta no directa (producto de formulaciones, argumentos o comparaciones), permiten que el alumno conecte conceptos y haga traducciones entre diferentes lenguajes.

De la Fuente Pérez tuvo como norte en su trabajo, la acción del docente para favorecer el aprendizaje del álgebra y obtuvo hallazgos que dan cierta luz del aprendizaje de los estudiantes. Comprobó que, a través de representaciones icónicas, los alumnos tienen mayor facilidad para resolver problemas que requieren caracterizar el lenguaje algebraico. Además, entre mayor dificultad tienen las representaciones icónicas el alumno tiende al uso del lenguaje algebraico.

Martín Socas (2011) en su artículo "La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación", hace referencia a la necesidad del tratamiento temprano de contenidos de álgebra. En una revisión de diversas investigaciones, desde diferentes perspectivas, muestra la necesidad de modificar el currículo del Álgebra, para incluir contenidos de Pre-álgebra en etapas tempranas de la educación obligatoria. Además, destaca los procesos cognitivos que se involucran en el aprendizaje del álgebra y sugiere un punto de encuentro en el ámbito cognitivo; destaca el lenguaje y las representaciones como enfoque de análisis.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

PRESENTACIÓN

La presente investigación, se orientó a la comprensión de un fenómeno educativo relacionado con el aprendizaje de un contenido específico, en este caso las sucesiones aritméticas en secundaria. Se planteó a través del análisis de sucesos específicos en torno a la transformación de representaciones, las cuales son el único medio por el cual se puede acceder a los objetos matemáticos (Duval, 1993). Se busca responder al acontecer particular del aprendizaje de sucesiones, a través de la construcción de explicaciones de aquello que proviene de la realidad, de la experiencia empírica en el trabajo de campo y su vínculo con referentes teóricos determinados. De esta forma, la metodología se concibe como aquello que permite la conexión entre la teoría y la realidad. Es decir, se buscó la trazar una ruta desde la teoría, de tal forma que permitan explicar las situaciones estudiadas, así como contar con formas de proceder que sean coherentes entre sí, con la teoría y los objetivos del estudio. En otras palabras, tal como refiere Hidalgo (1992, p. 112) se consideró el método como puente y camino entre lo teoría y la empiria.

En relación con la teoría y el método, se considera que, aunque es necesario poner atención en lo particular y especifico, "sin categorías y modelos nuestras explicaciones se pierden en una mirada de detalles no siempre significativos" (Rodríguez, Gil, y García, 1999, p. 86). Por tal motivo, la investigación abreva en todo momento de diferentes perspectivas teóricas y metodológicas que permitan una visión más nutrida del objeto de estudio, así como del proceder metodológico.

Para la construcción de la metodología a seguir se consideró una perspectiva que va más allá de la verificación de la teoría en casos específicos. A pesar de que no se sigue una estrategia constructivista como tal, puesto que no se pretende construir nuevos referentes para la comprensión de los hechos de realidades particulares, se coincide con la idea de "rebasar el uso prescriptivo, deductivo y formal de la teoría" (Hidalgo, 1992, p. 19). Es decir, se considera que la estrategia se construye de acuerdo con los referentes teóricos, además de la influencia determinante del medio. Así, se concibe que "la característica fundamental del diseño cualitativo es su flexibilidad, su capacidad de adaptarse en cada momento y circunstancia, en función del cambio que se produzca en la realidad que se está indagando" (Rodríguez, et al. 1999, p. 91).

3.1. ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

El enfoque al que se adhiere la investigación, es el paradigma cualitativo. La bondad de esta postura es el manejo y síntesis de información, la cual se interpreta bajo el enfoque de una investigación adherida al paradigma interpretativo (Godino, 2003). Se reconoce la complejidad del fenómeno a observar; pero también se considera que el reflejo del fenómeno puede darse en un contexto determinado con límites específicos. Por este motivo, se empleó el estudio de casos como estrategia de investigación. Un aspecto a considerar, es que a pesar de que se consideró un enfoque cualitativo de la investigación, no se dejó de lado el uso de herramientas propias de la investigación cuantitativa, para dar mayor sustento al trabajo desarrollado.

La ventaja del estudio de casos como estrategia, es su inserción en un marco temporal y geográfico específicos. El estudio de casos es particularista, descriptivo, heurístico e inductivo (Rodríguez, et al. 1999, p. 92), estas características ayudan a que el estudio se centre dentro de un límite y en las interacciones que se dan dentro de él. De esta forma, se evitó perderse entre la maraña de datos, obtenidos a partir del fenómeno. Dichos acontecimientos, fueron considerados en la medida en la que influyeron en el objeto de estudio, pero que no son el centro de la investigación, toda vez que no se establece una relación en línea directa con las representaciones, así como con su influencia para el aprendizaje de las sucesiones aritméticas.

Una característica particular de la investigación cualitativa, es el uso de diseños flexibles. La presente investigación cuenta con un diseño de este tipo, el cual abre la posibilidad configurar un estudio que, dadas las condiciones de abordaje del objeto de estudio, permitió hacer cambios. Estos cambios fueron moldeando los objetivos, la pregunta de investigación y las técnicas de recolección de datos (Mendizábal, 2006). Precisamente, los cambios que se presentaron respondieron únicamente a la riqueza de las situaciones observadas en el campo, las cuales no demandaron un cambio de enfoque, sino de estrategia. En el mismo sentido, los instrumentos para la recogida de información se vieron enriquecidos.

3.2. ESCENARIO Y PARTICIPANTES

La escuela secundaria elegida como escenario para el desarrolló la investigación, se inserta en un contexto rural. En la localidad se cuentan con los servicios básicos (agua potable, energía eléctrica, drenaje sanitario, transporte público, servicios educativos de nivel básico, entre otros.). Las principales actividades económicas de la comunidad son: la agricultura (cultivo de maíz principalmente); albañilería, en comunidades aledañas y en la Ciudad de México; trabajo en estacionamientos y *valet parking*; trabajo doméstico. Debido a las condiciones de trabajo, los padres de familia tienen que emigrar a la Ciudad de México y los alumnos se quedan solos en casa o al cuidado de algún familiar. Este factor, relacionado directamente con lo económico, provoca que los tutores en diversas ocasiones no puedan asumir su rol dentro de la escuela; no se cuenta con el apoyo en actividades escolares, lo cual se refleja en el desempeño de los estudiantes.

El centro escolar se encuentra ubicado en un municipio de la zona norte del Estado de México. En la escuela se atiende prácticamente a la totalidad de la población en edad escolar, para el nivel secundaria. Incluso, atiende alumnos de otros lugares, principalmente dos comunidades aledañas. La escuela secundaria brinda servicio a una matrícula de más de 200 alumnos, (distribuidos en 6 grupos, dos por cada grado) en el turno matutino. El mobiliario, las condiciones y los espacios con los que cuenta la escuela, son básicos y suficientes para brindar el servicio (energía eléctrica, drenaje sanitario, agua potable, salones con pizarrón y pupitres suficientes, sanitarios funcionales, canchas de basquetbol, laboratorio de ciencias y cómputo con equipo básico).

Los grupos, interés de la investigación, pertenecen al primer grado de secundaria. Las edades de los alumnos de primer grado oscilan entre 12 y 13 años. De acuerdo con las etapas del desarrollo cognoscitivo de Piaget, los alumnos están en el tránsito de la etapa de operaciones concretas y de operaciones formales. Esto implica que están pasando por un proceso en el cual el pensamiento se vuelve más abstracto; se privilegia el uso de la lógica proposicional sobre el pensamiento ligado a los fenómenos del mundo real (Meece, 2001, pp. 111-120). Lo anterior fundamenta la propuesta de la introducción del pensamiento algebraico en secundaria, pues anteriormente el currículo de matemáticas privilegiaba la aritmética y la geometría únicamente (SEP, 2017b).

3.3. TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

3.3.1. Observación

Debido al carácter flexible que se pretende tenga la investigación, se consideró la observación como estrategia de recolección de datos. El motivo de la elección, es que "permite acercar al investigador a estratos relativamente inferiores del escalafón educativo, particularmente a los maestros y, en ciertos casos, a los propios alumnos" (Walker, 1997, p. 107). El centro fueron las interacciones que se dan entre maestro, alumno y saber, teniendo énfasis en la relación del alumno con el saber. De esta forma, la observación se constituyó como la técnica ideal en la que se pudieron apreciar esas interacciones en el contexto natural en el que se desarrollaron.

El carácter de participante, responde a la necesidad que se tuvo de intervenir en ciertas situaciones, en las que se observó el potencial de obtener información importante para el estudio. En el momento en que se desarrollaron las actividades, se interactuó con los alumnos. De esta forma, se profundizó en la recopilación de la información que permitiera comprender las interpretaciones que los alumnos establecen con el saber, al momento de resolver problemas o trabajar con ciertos contenidos matemáticos.

Al realizar la observación, el foco de atención fue el uso de representaciones, las transformaciones que se suelen hacer de ellas en el aula, así como las representaciones que utiliza la docente y que promueve su uso en los alumnos. Se considera la transformación de representaciones, específicamente las conversiones, como indicio de aprendizaje en el estudiante. Sobre todo, porque abren la posibilidad de que el estudiante exprese generalizaciones de sucesiones aritméticas haciendo uso del lenguaje algebraico. Además de observar la transformación de representaciones, se puso especial atención en otros aspectos: el escenario en el que se promueven y posibilitan, las aparentes dificultades del estudiante al hacerlas, los procedimientos que sigue, las regularidades que muestra en sus razonamientos. Lo anterior como una forma de llegar a interpretar el proceso por el cual el alumno transforma las representaciones, implicadas en el aprendizaje de las sucesiones aritméticas.

En el siguiente capítulo, se desarrollan algunos diálogos entre los alumnos y la docente, los cuales son motivo de análisis, debido a los indicios de comprensión de las sucesiones por parte de los estudiantes. En algunos momentos, se observa mi participación en la interacción con los alumnos, cuestionándoles y dialogando con ellos. La referencia a mi persona como investigador se debe al rol que desempeñé en el proceso de observación.

3.3.2. Cuestionario

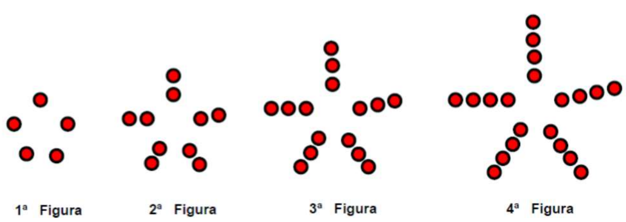
Los cuestionarios se consideran una herramienta auxiliar que se utilizó para encontrar información en cantidad significativa y, de acuerdo con su diseño, la información puede ser de gran calidad. La información arrojada permitió tener una idea acerca de los contenidos o conceptos en los que hay mayor frecuencia de error. Esto fue un indicador de las actividades en las que se puso mayor atención a la hora de observar. Las respuestas de los estudiantes, fueron factor que influyó en las decisiones relacionadas con la aplicación de las secuencias de ejercicios. Al identificar las transformaciones que el alumno hizo, o no, así como el escenario de la situación, se tomó la decisión de aplicar una secuencia de problemas con un grupo específico de alumnos.

La construcción de los cuestionarios se hizo a partir de los contenidos que el docente aborda al momento de la visita. De esta forma, se pueden contrastar los resultados que los estudiantes muestran en las actividades de aula, con aquellos que muestren en los cuestionarios. Este instrumento se diseñó y aplicó posterior al desarrollo de una sesión en la que varios estudiantes tuvieron dificultades para hacer las transformaciones de las representaciones de las sucesiones. De esta forma, fueron un mecanismo para seleccionar un grupo más pequeño, que pudo aportar información significativa.

En un primer momento, la docente de la asignatura de matemáticas en primer grado, aplicó un cuestionario para evaluar las actividades relacionadas con el tema de sucesiones. En dicho cuestionario se planteó saber si los estudiantes construían la fórmula que permitiera calcular el enésimo término de una sucesión y encontrar los elementos que componen una sucesión a partir de una expresión dada. Los resultados de dicho instrumento, muestran que varios alumnos no lograron resolver las actividades que son similares a las que se plantearon en clase; en una escala de 0 a 10, ambos grupos de 1° obtuvieron una calificación reprobatoria.

Debido a que las actividades del cuestionario aplicado por la docente, se enfocaban a la obtención y aplicación de reglas generales para una sucesión, se optó por diseñar reactivos tipo problema de enunciado en el que se aplicaran los principios de las sucesiones. El cuestionario se compuso por 5 reactivos que se muestran a continuación (ver tabla 3). Además, se incluye un apartado con los grados que permitieron clasificar el tipo de respuestas de los alumnos, de acuerdo con los razonamientos que mostraron o las estrategias que aplicaron al resolver las situaciones planteadas.

Tabla 3. Reactivos objetivos y tipos de respuestas del primer cuestionario de sucesiones

<table>
<tr><th colspan="4">Reactivos del primer cuestionario de sucesiones</th></tr>
<tr><th>N R.</th><th colspan="2">Reactivo</th><th>Objetivo</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1</td><td colspan="2">Si la siguiente sucesión continúa aumentando, ¿cuántas bolitas habrá en la figura 11ª?
</td><td>Identificar la forma en que los alumnos resuelven una situación de una sucesión de figuras simples, con crecimiento aritmético y las representaciones que utilizan.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Clasificación de las respuestas</th></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Respuesta</td><td>Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Sin respuesta</td><td>No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Operación aleatoria</td><td>Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica. Por ejemplo, los que toman los elementos de la 4ª figura (20) y los operan con la constante (5) o la figura deseada (11).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Uso de representación</td><td>Utilizó la representación y continuó dibujando las figuras para dar una respuesta. Incluye las respuestas de los alumnos que hacen una sola figura que representa la 11ª posición.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Continuar la sucesión</td><td>Utiliza la representación para obtener el número de elementos que conforman cada figura, identifica el patrón y continúa la sucesión de números hasta obtener la cantidad de elementos que conforman la figura 11. Incluye las respuestas de los alumnos que, aunque no continúan dibujando cada figura, aplican una operación aditiva para dar una respuesta o se intuye el uso de la misma por su argumento escrito.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>4</td><td>Identifica el patrón y calcula el valor</td><td colspan="2">A partir de la representación obtiene el número de elementos que conforman cada figura, identifica el patrón y utiliza una multiplicación para obtener la cantidad de elementos que conforman la figura 11. Incluye las respuestas de los alumnos que, a partir de su argumento escrito, se intuye el uso de una operación multiplicativa.</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Uso de expresión algebraica</td><td colspan="2">Utiliza la representación para obtener el número de elementos que conforman cada figura, identifica el patrón y construye una expresión algebraica que utiliza para calcular el término de la figura 11 de la sucesión. Incluye las respuestas de los alumnos que a pesar de no hacer explicita la sustitución de la posición en la expresión, la representan y operan de manera correcta.</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="8">2</td><td colspan="3">Reactivo: Observa la siguiente sucesión de números<table><tr><td>11</td><td>15</td><td>19</td><td>23</td><td>…</td><td>323</td><td>327</td><td>331</td><td>335</td><td>…</td></tr></table>¿Qué número está 25 posiciones delante del último número que está escrito?</td><td>Objetivo: Identificar las estrategias empleadas por los alumnos al resolver situaciones de sucesiones aritméticas, en las que se desconoce la posición del elemento a encontrar.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Clasificación de las respuestas</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Respuesta</td><td colspan="2">Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Sin respuesta</td><td colspan="2">No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Operación aleatoria</td><td colspan="2">Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Continuar la sucesión</td><td colspan="2">Continúa la secuencia sin llegar al elemento indicado. Se consideran aquellas respuestas en las que se continúa la sucesión para intentar dar una respuesta.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Identifica el patrón y calcula el valor</td><td colspan="2">Identifica el patrón y reconoce que la sucesión está incompleta. Utiliza una multiplicación para calcular el valor que está 25 posiciones delante el último número que está escrito (335). Incluye las respuestas de los alumnos que continúan la sucesión como estrategia para verificar su resultado.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Uso de expresión algebraica</td><td colspan="2">Identifica el patrón, calcula la posición del último número que está escrito y a partir de los datos construye una expresión algebraica para calcular la respuesta. Incluye las respuestas de los alumnos que buscan el número en la posición 25 (107) en lugar de buscar 25 posiciones delante del último número escrito (335).</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">Reactivo: Una nadadora entrenó todos los días durante tres semanas. El primer día nadó 20 minutos, y cada día nadaba 5 minutos más que el</td><td>Objetivo: Identificar la aplicación de los principios de las sucesiones aritméticas a problemas de enunciado y observar si se establecen relaciones entre los métodos y representaciones empleadas en las actividades de clase con este tipo de problemas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="9"></td><td colspan="2">día anterior. ¿Cuánto tiempo nadó el último día? ¿Y a lo largo de las tres semanas?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Clasificación de las respuestas</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Respuesta</td><td>Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Sin respuesta</td><td>No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Operación aleatoria</td><td>Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica. Incluye los alumnos cuya respuesta, a pesar de ser correcta, no está sustentada con las operaciones y argumentos que muestran.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Continuar la sucesión</td><td>Continúa la sucesión hasta obtener un valor que cumpla con la condición que plantea el enunciado. Incluye a los alumnos que además de contestar correctamente el primer cuestionamiento lo hacen también con el segundo siguiendo la misma estrategia.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Identifica el patrón y calcula el valor</td><td>A partir del enunciado obtienel los tiempos de nado, a partir de eso identifica el patrón, posteriormente utiliza una multiplicación y una adición para obtener el tiempo de nado indicado.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Uso de expresión algebraica</td><td>Identifica que el enunciado problema implica una sucesión y a partir de los datos construye una expresión algebraica que le permite calcular los minutos que nadó el último día. Incluye a los alumnos que, a pesar de no utilizar literales, siguen la lógica de una regla para calcular la respuesta de la situación planteada.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Tratamiento de expresión algebraica</td><td>Identifica que el problema trata de una sucesión, aísla los datos necesarios que le permiten construir una expresión algebraica para calcular los minutos que nadó el último día y utiliza una estrategia similar para calcular el tiempo de nado a lo largo de las tres semanas.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="6">4</td><td colspan="2">Las edades de 7 personas suman 378 años en total. Si de menor a mayor aumentan la misma cantidad de años entre cada persona y la menor tiene 18 años, ¿cuál es la edad de las otras seis personas?</td><td>Identificar la aplicación de los principios de las sucesiones aritméticas a problemas de enunciado y observar si se establecen relaciones entre los métodos y representaciones empleadas en las actividades de clase con este tipo de problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Clasificación de las respuestas</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Respuesta</td><td>Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Sin respuesta</td><td>No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Operación aleatoria</td><td>Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Continuar la sucesión</td><td>Identifica que la situación implica una sucesión, descubre el patrón y continúa la sucesión para dar una respuesta.</td></tr>
</table>

	4	Identifica el patrón y calcula el valor	Identifica la situación como una sucesión, identifica el patrón y a partir de los datos del problema opera (operación aditiva y/o multiplicativa) para dar una respuesta.
	5	Uso de expresión algebraica	Identifica que el enunciado problema implica una sucesión y a partir de los datos construye una expresión algebraica que le permite calcular la diferencia de la progresión, misma que utiliza para calcular las edades de las personas.
5	La distancia entre mi coche y el primer poste de una fila es de 7.25 metros, y la distancia entre el coche y el quinto poste es de 21.25 metros. Sabiendo que la distancia entre postes es la misma, ¿cuántos postes hay entre mi coche y un poste situado a 49.25 metros de él?		Identificar la aplicación de los principios de las sucesiones aritméticas a problemas de enunciado y observar si se establecen relaciones entre los métodos y representaciones empleadas en las actividades de clase con este tipo de problemas.
	Clasificación de las respuestas		
	Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
	0	Sin respuesta	No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.
	1	Operación aleatoria	Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica.
	4	Identifica el patrón y calcula el valor	Utiliza una representación para comprender mejor la situación. Identifica la situación como una sucesión y a partir de los datos del problema opera (operación aditiva y/o multiplicativa) para dar una respuesta.
	5	Uso de expresión algebraica	Identifica que el enunciado problema implica una sucesión y a partir de los datos construye una expresión algebraica que le permite calcular la diferencia de la progresión, misma que utiliza para calcular la cantidad de postes.

Fuente: construcción propia a partir de los reactivos aplicados en el primer cuestionario (anexo 1), así como el tipo de respuestas de los alumnos.

Se observa en la tabla, en el apartado de clasificación de respuestas, que se manejan grados en el tipo de respuestas de los alumnos. Esta situación responde la complejidad de las propias respuestas. De acuerdo con los planteamientos teóricos de Duval (2016), sobre el uso y transformación de representaciones, así como los de Sierpinska (1994), sobre las operaciones mentales de identificación, discriminación, generalización y síntesis, determinado tipo de respuesta puede dar cuenta de un mayor grado de comprensión. Por ejemplo, la identificación de un patrón, su uso para construir una expresión algebraica y calcular los términos faltantes, puede ser señal mayor comprensión con respecto a una respuesta en la que se continúa la sucesión hasta encontrar un valor deseado. Cabe destacar que, al momento de la clasificación del tipo de respuesta, no se pretendía aún asignar un nivel de comprensión, sino tener los primeros elementos que permitieran establecer los niveles con mayor sustento.

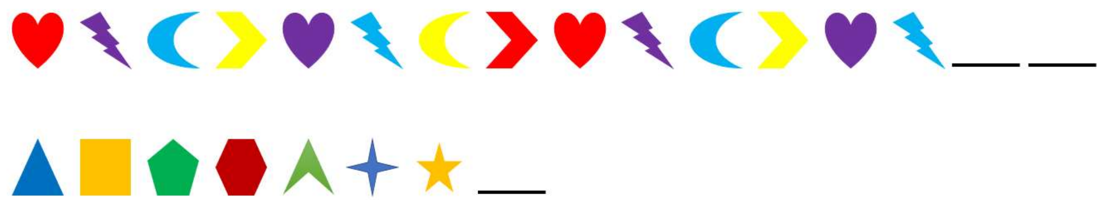
En general, el objetivo del primer instrumento, fue tener un acercamiento al tipo de representaciones que los alumnos utilizan, al resolver situaciones en las que se involucran las sucesiones aritméticas. Además, tener elementos, aunados a las observaciones de clase, para poder describir cómo es que los alumnos resuelven planteamientos en los que se involucran las sucesiones aritméticas.

A partir de los resultados identificados en un análisis preliminar del primer cuestionario que contestaron los alumnos, se planteó la necesidad de diseñar y aplicar otro cuestionario. En este caso, el cuestionario se enfocó en indagar sobre los antecedentes que los alumnos podrán tener en relación con el tema de sucesiones. Además, se indagó acerca de las representaciones de acuerdo con el grado de complejidad del reactivo. Al ser un contenido estrechamente relacionado con nociones básicas de conteo, los antecedentes se hallan desde los primeros ciclos de educación primaria, incluso antes.

Por lo anterior, se propuso seleccionar los aprendizajes esperados de los programas que utilizaron los docentes de primaria de los alumnos que, al momento del desarrollo de la investigación, se encuentran en 1° B. Para el diseño del instrumento se seleccionaron los aprendizajes esperados, por cada grado escolar, de los programas de primaria del Plan de Estudios 2011, los cuales además se relacionan directamente con las sucesiones. A partir de ahí, se elaboró un reactivo por grado de educación primaria, además de un reactivo para primer grado secundaria, correspondiente con un aprendizaje esperado del programa de matemáticas. La prueba se constituyó por un total de siete reactivos, distribuidos de la siguiente manera:

Tabla 4. Reactivos, objetivos y tipos de respuestas del segundo cuestionario de sucesiones

<table>
<tr><th colspan="5">Segundo instrumento de investigación</th></tr>
<tr><th>Nivel</th><th>Grado Escolar</th><th colspan="2">Bloque</th><th>Aprendizaje Esperado</th></tr>
<tr><td rowspan="12">Primaria</td><td>Primer grado</td><td colspan="2">Bloque 5</td><td>“Resuelve problemas que implican identificar relaciones entre los números; uno más, mitad, doble, 10 más, etcétera” (SEP, 2011c, p. 86).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reactivo 1
Elige 4 de los siguientes números y represéntalos utilizando sumas repetidas del mismo sumando hasta que completes la cantidad que representa dicho número
Por ejemplo: Número 18=3+3+3+3+3+3
<table><tr><td>75</td><td>27</td><td>42</td><td>39</td><td>38</td><td>22</td><td>93</td><td>36</td><td>54</td><td>55</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo
El objetivo del reactivo es identificar la descomposición que realizan los estudiantes de un número en sumandos, como primer paso para la identificación de una regularidad en una sucesión numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Clasificación de las respuestas</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td colspan="2">Respuesta</td><td>Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">Sin respuesta</td><td>No contestó. Incluye las respuestas en las que el valor total de los sumandos no coincide con el número elegido.</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Elige sumandos distintos</td><td>Elige los números y representa su valor descompuesto en sumandos distintos.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Descompone en un mismo sumando</td><td>Elige los números y representa su valor descompuesto en sumandos, considerando el mismo sumando</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Segundo grado</td><td colspan="2">Bloque 4</td><td>“Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con objetos o figuras” (SEP, 2011e, p. 86).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reactivo 2
En cada uno de los siguientes conjuntos de objetos dibuja la figura que sigue en los espacios disponibles. Para cada caso explica brevemente cómo supiste cuáles eran las figuras que continuaban.</td></tr>
</table>



Objetivo

Identificar las relaciones que los alumnos establecen entre representaciones figurativas para encontrar patrones que forman la sucesión, relacionando la figura, el color y las formas.

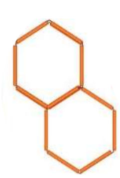
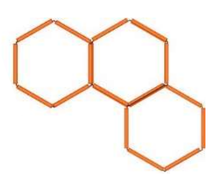
Clasificación de las respuestas

Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
0	Sin respuesta	No contestó o la figura dibujada no tiene relación lógica con la sucesión.
2	Reconoce patrón 1/4	Reconoce algún patrón de la sucesión de figuras (color o forma) y dibuja los siguientes elementos de la sucesión tomando en cuenta dichos patrones.
2	Reconoce patrón 2/4	Reconoce ambos patrones de la sucesión de figuras (color y forma) y dibuja los siguientes elementos de la sucesión tomando en cuenta dichos patrones.
2	Reconoce patrón 3-4/4	Reconoce todos los patrones de las sucesiones de figuras (color, forma, vértices y picos) y dibuja los siguientes elementos en ambas sucesiones tomando en cuenta dichos patrones. Incluye los alumnos que identifican por lo menos el color de la segunda sucesión.

Tercer grado	Bloque 4	“Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética” (SEP, 2011g, p. 76).

Reactivo 3

Observa la figura y contesta los cuestionamientos

			¿Cuántos palillos se necesitarán para la figura 6? ¿Cuántos palillos se agregan por cada nueva figura?
Figura 1	Figura 2	Figura 3	

Objetivo

Identificar las regularidades (aumento o disminución) que aprecia el estudiante y el uso que hace de las representaciones para continuar la sucesión o para encontrar el número de elementos que tiene una figura cercana.

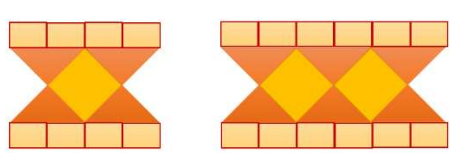
Clasificación de las respuestas

Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
0	Sin respuesta	No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.
1	No usa el patrón	Reconoce el patrón, pero no lo usa para dar respuesta al primer cuestionamiento.
1	Confunde el patrón	Considera el número de palillos por cada polígono aislado (6 palillos por polígono).
2	Uso de representación	Utiliza las representaciones para contar el número de palillos necesarios por figura. Identifica la diferencia o patrón de la sucesión y a partir de ese dato da respuesta de los palillos que se agregan y los que requiere cada nueva figura.
4	Identifica el patrón y calcula el valor	Utiliza las representaciones para contar el número de palillos necesarios por figura. Identifica la diferencia o patrón de la sucesión y a partir de ese dato establece una regla para calcular la cantidad necesaria para construir la figura indicada.

Cuarto grado	Bloque 4	“Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones compuestas” (SEP, 2011b, p. 77)

Reactivo 4

Benito trabaja arreglando su jardín. Él quiere poner un sendero con losas en forma de rombo, losas en forma de triángulo y ladrillos. Dependiendo del largo del sendero será el número de losas y ladrillos que utilizará.



Si el sendero llevará 3 losas en forma de rombo, ¿cuántas losas en forma de triángulo y cuántos ladrillos utilizará?

¿Es posible formar un sendero con 24 ladrillos y 5 losas en forma de rombo?, ¿cuántas losas en forma de triángulo necesitará?

Objetivo

Identificar si el alumno logra establecer relaciones entre las variables que intervienen en una sucesión compuesta y utiliza esa información para contestar un cuestionamiento, así mismo si logra identificar si una figura con determinado número de elementos corresponde a una sucesión.

Clasificación de las respuestas

Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
0	Sin respuesta	No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.
1	Operación aleatoria	Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica.
2	Uso de representación	Utiliza las representaciones de la sucesión para contar el número de elementos necesarios para cada figura y contesta. Sin estrategia evidente, afirma o niega la posibilidad que plantea el segundo cuestionamiento.
4	Identifica el patrón y calcula el valor	Encuentra el patrón aditivo de crecimiento de cada elemento de la sucesión (losas y ladrillos) y a partir de la regularidad encuentra el número de elementos necesarios para un sendero con tres losas en forma de rombo. Además, continúa las sucesiones o utiliza una estrategia de conteo para contestar los siguientes cuestionamientos.
4	Identifica el patrón, calcula y relaciona las variables	Encuentra el patrón aditivo de crecimiento de cada elemento de la sucesión (losas y ladrillos) y a partir de la regularidad encuentra el número de elementos necesarios para un sendero con tres losas en forma de rombo. Además, establece relaciones entre las variables de las sucesiones y calcula la respuesta a los siguientes cuestionamientos.
Quinto grado	Bloque 5	"Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica" (SEP, 2011d, p. 80)

Reactivo 5

Encuentra los términos faltantes de la siguiente sucesión y explica cómo hiciste para hallarlos

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Número	1	3	9		81		

Objetivo

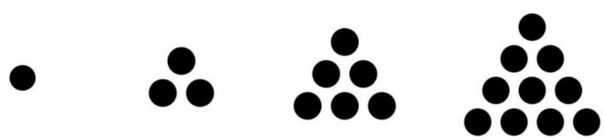
Identificar si el alumno logra encontrar la regularidad de una sucesión con progresión geométrica y cómo la utiliza para encontrar elementos faltantes en la sucesión.

Clasificación de las respuestas

Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
0	Sin respuesta	No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.
1	Operación aleatoria	Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica.
4	Identifica el patrón y calcula el valor	Identifica la razón de la progresión y la utiliza para continuar la sucesión o calcular el valor y completar los elementos faltantes.
Sexto grado	Bloque 5	"Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial" (SEP, 2011f, p. 79)

Reactivo 6

En la siguiente tabla anota los números que continúan la sucesión, anota brevemente cómo encontraste el resultado.

Números	Sucesión de figuras				
Triangulares					
Sucesión numérica	1	3	6	10		

Objetivo

Identificar si el alumno encuentra la regularidad de una sucesión de números triangulares y encuentra los términos que siguen en dicha sucesión. Además, se buscó identificar si hace uso de las configuraciones puntuales como representación para continuar la sucesión.

Clasificación de las respuestas

Grado	Respuesta	Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno
0	Sin respuesta	No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.
1	Operación aleatoria	Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar una respuesta lógica. Incluye los alumnos que utilizan las representaciones para intentar dar una respuesta.
2	Uso de representación	Utiliza las representaciones para dibujar los siguientes términos y encontrar los elementos faltantes de la sucesión numérica.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>4</td><td>Identifica el patrón y calcula el valor</td><td>Identifica el patrón de crecimiento de la sucesión, la utiliza para continuar la sucesión o calcular el valor y completar los elementos faltantes. Argumenta debidamente sus procedimientos. Incluye los alumnos que además del patrón, utilizan las representaciones para verificar.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="10">Secundaria</td><td>Primer grado</td><td>Temas: patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes</td><td>Aprendizaje esperado: “formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan” (SEP, 2017b, p. 175).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Reactivo 7
Observa la sucesión y contesta los cuestionamientos
<table>
<tr><td>Sucesión</td><td>7, 12, 17, 22, 27</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuál es la fórmula que permite calcular cualquier número de la sucesión?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué número ocupa la posición 11?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿El número 285 forma parte de la sucesión? ¿en qué posición se encuentra?</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo
Identificar si los alumnos logran construir una expresión algebraica que define a una sucesión y la utilizan para encontrar otros términos de dicha sucesión.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Clasificación de las respuestas</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Respuesta</td><td>Descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Sin respuesta</td><td>No contestó o su respuesta es un número escrito sin argumento o lógica aparente.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Operación aleatoria</td><td>Utiliza los datos del problema para operar con ellos y trata de dar respuestas lógicas. Incluye a los alumnos que escriben la expresión general para las sucesiones enseñada por la docente ($Dn \pm c$)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Continuar la sucesión</td><td>Identifica que la situación implica una sucesión, descubre el patrón y continúa la sucesión para dar una respuesta.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Uso de expresión algebraica</td><td>Identifica la diferencia de la progresión y a partir de los datos con los que cuenta construye una expresión algebraica que utiliza para calcular la posición 11 de la sucesión. Y calcula para saber si el 285 forma parte de la sucesión.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Tratamiento de expresión algebraica</td><td>Identifica la diferencia de la progresión y a partir de los datos con los que cuenta, construye una expresión algebraica que utiliza para</td></tr>
</table>

			calcular la posición 11 de la sucesión. Además, utiliza la expresión para igualarla con 285 y saber si este número forma parte de la sucesión y la posición en la que se encuentra.

Fuente: construcción propia, a partir de los cuestionamientos del segundo cuestionario (ver anexo 2), así como de los aprendizajes de primaria y secundaria relacionados con el contenido.

En la tabla, se observa la gradualidad de las habilidades que se busca que los alumnos muestren con cada reactivo. En suma, dichas habilidades llevan al alumno a poder obtener la regla general, en lenguaje algebraico, que define una sucesión con progresión aritmética. Por tal motivo, en los primeros reactivos hay una relación con habilidades básicas de identificar el patrón de una sucesión, en los reactivos intermedios con el uso de representaciones y cálculo de valores, finalmente en el último reactivo se busca la construcción y uso de una expresión algebraica, para calcular valores de la sucesión o saber si otros forman parte de la misma. Por la forma en la que se construyó la prueba, se esperaba que los alumnos no tuvieran mayor inconveniente con los primeros reactivos; puesto que demandan habilidades que se desarrollan desde los primeros grados de primaria. Sin embargo, en el apartado de análisis de resultados, se podrá constatar que los resultados no fueron del todo los esperados.

El instrumento que ayudó a clasificar las respuestas de los alumnos en el segundo cuestionario, fue similar al que se utilizó para las respuestas del primer cuestionario. A diferencia de la primera prueba, en la descripción del tipo de respuesta o estrategia seguida por el alumno, es más fácil identificar la gradualidad de la dificultad de los planteamientos; esto se debe a la naturaleza misma del cuestionario. Aunque la comprensión y el aprendizaje de las generalizaciones de las sucesiones, no se da siempre de manera secuenciada, la prueba permite tener una idea de en qué punto los alumnos pueden tener dificultades. Es decir, con qué elementos se cuenta, para lograr el aprendizaje esperado: construir expresiones algebraicas que definen los términos de una sucesión y utilizar dicha expresión para analizar las propiedades de dicha sucesión.

Aunado a lo anterior, además de clasificar las respuestas de los alumnos en grupos de respuestas similares, se construyó una tabla (ver tabla 5), en la que se relacionan con las operaciones mentales y la transformación de representaciones. Se asignaron colores, una escala de azules para vincular las operaciones mentales (identificación, discriminación, generalización, síntesis) que propone Sierpinska (1990), con las respuestas de los estudiantes. Por otra parte, se asignaron colores amarillo y verde para identificar las transformaciones de las representaciones (conversión y tratamiento) que plantea Duval (2016). En ambos casos, se argumentó la relación, de la operación mental o transformación, con las respuestas. Se hizo uso de la teoría y las características de las respuestas. A pesar de que, se considera que la respuesta no da cuenta de que el alumno ha desarrollado la habilidad para hacer la trasformación de representaciones u operación mental, es indicio de la misma; en dicho caso, el alumno se encuentra en vías de comprender.

Tabla 5. Tipo de respuestas en relación con las operaciones mentales y la transformación de representaciones

Habilidades relacionadas con las operaciones mentales (Sierpinska, 1990) y las transformaciones de las representaciones (Duval, 2016) relacionadas con la comprensión.			
	Operación mental	**Respuestas relacionadas**	**Argumento**
Anna Sierpinska (S)	**Identificación**	Descompone en un mismo sumando	La descomposición en sumandos o la descomposición factorial es un primer paso para el reconocimiento de patrones y posteriormente la identificación de una situación que implique una sucesión.
		Uso de representación	El uso de la representación, para contar elementos o continuar una sucesión figurativa, pone al estudiante en la vía de reconocer el patrón en una secuencia e identificar la situación como una sucesión.
		Continuar la sucesión	Continuar una sucesión implica que el alumno hace uso del patrón y por lo tanto está reconociendo la situación como una sucesión.
		Identifica el patrón	De acuerdo con la definición, el patrón forma parte de la regla que define a una sucesión. Cuando el alumno reconoce el patrón, reconoce también la situación como una sucesión y tiene la posibilidad de encontrar la regla que la define.
	Discriminación	Identifica el patrón, calcula el valor y relaciona las variables	El alumno identifica el patrón que define una sucesión y utiliza una operación para calcular un enésimo término. Considerando que no busca un elemento inmediato, discrimina los elementos que están desde el último termino conocido hasta aquel que busca. Además, establece relaciones entre determinadas variables, estableciendo correspondencia 2:1 y 4:1.

	Generalización	Uso de expresión algebraica	Una vez que los alumnos reconocen el patrón, pueden establecer las relaciones necesarias, coherentes con la situación, para determinar la regla que define una sucesión. Es decir, reconocer que un término es un caso particular de una agrupación de términos que tienen un patrón común de crecimiento, el cual los organiza y define. Además, son capaces de expresar en lenguaje algebraico la regla que define la sucesión.
	Síntesis	Tratamiento de expresión algebraica	El tratamiento de una expresión da cuenta, además de lo que implica la generalización, de que el alumno ha comprendido la sucesión como un todo. Cuando el alumno modifica la expresión, para encontrar, por ejemplo, la posición de un número, se hace un acto de síntesis al reducir a un proceso relativamente simple, el cálculo de un elemento distinto al término de la sucesión. Es decir, el alumno sale del estatus de confort de cálculos algorítmicos para, a partir de las relaciones entre las variables, calcular valores distintos.
Raymond Duval (D)	**Transformación**	**Respuestas relacionadas**	**Argumento**
	Tratamiento	Descompone en un mismo sumando	El registro utilizado es el de los números naturales, en el caso de las respuestas de los alumnos. La expresión de un número como la suma de sumandos no requiere cambiar las reglas de denotación, por lo tanto, no se cambia de registro de representación.
		Uso de representación	Las representaciones como las configuraciones puntuales o arreglos de líneas y figuras no dependen de un sistema semiótico, solamente son un apoyo para representar números. De esta forma, no se considera una conversión cuando el alumno hace uso de esas representaciones, para contar elementos o saber el número de elementos de un término cercano.
		Continuar la sucesión	Continuar la sucesión es una situación de tratamiento de las representaciones dentro de un mismo registro semiótico, debido a que no implica cambio de registro. Incluso en las situaciones en las que el alumno utiliza las representaciones figurativas para contar los elementos y seguir la sucesión de números, no se hace un cambio de registro puesto que las representaciones figurativas no dependen de un sistema semiótico.

		Identifica el patrón, calcula el valor y relaciona las variables	El patrón se puede expresar como un número, incluso cuando se obtiene de una sucesión de figuras o puntos. Los cálculos y la relación entre variables se hacen permaneciendo en el mismo registro de representación, por lo que se trata de una situación de tratamiento y no de conversión.
	Conversión	Uso de expresión algebraica	El uso de una expresión algebraica refiere desde la construcción de dicha expresión, incluso expresada como ecuación. En las respuestas anteriores se trabaja dentro de un mismo registro, en este caso existe un cambio de registro. Cuando el alumno es capaz de generalizar un número, lo expresa como una variable por lo que requiere de una literal. De esta forma, está cambiando, en este caso, de un registro de representación aritmético a un registro algebraico.
		Tratamiento de expresión algebraica	A pesar que, desde el título de la respuesta es posible apreciar que se habla de un tratamiento, se clasifica como una conversión, debido a que la implica. Es decir, para hacer el tratamiento de una expresión algebraica es necesario que primero sea construida. Se puede decir que es un tratamiento con mayor grado de complejidad porque deviene de una conversión.

Fuente: construcción propia a partir de los planteamientos de acuerdo con las operaciones mentales (Sierpinska, 1990) y las transformaciones de representaciones (Duval, 2016), así como el tipo de respuestas obtenidas en cada cuestionario.

Es importante destacar que, en un primer ejercicio, para cada reactivo se estableció una escala diferente, por lo que es un grado 4 en el reactivo 2 no implicaba las mismas habilidades de un grado 4 en el reactivo 3. Debido a la confusión que podría causar, se buscó la homologación de los grados en el tipo de respuestas, haciéndolos corresponder entre respuestas relacionadas y habilidades para la trasnformación de representaciones u operaciones mentales relacionadas con la comprensión. Por este motivo, se podrá notar una discontinuidad en los grados por tipos de respuesta para cada reactivo. Sin embargo ahora se da una lectura más fácil, puesto que un grado 4 en el reactrivo 1 del cuestionario 1 implica practicamente las mismas habilidades que un grado cuatro en el reactivo 7 del cuestionario 2. Esta situación aplica para ambos cuestionarios, por lo que es importante considerarla a la hora de la lectura del análisis de los resultados en el siguiente capítulo.

3.4. SELECCIÓN DEL CASO

Los resultados de ambos cuestionarios, así como la observación en clase, permitieron seleccionar 4 alumnos que constituyen el caso que se presenta en la investigación. Las razones de la selección de los estudiantes como informantes, tienen que ver con sus características, debido a que, al momento de seleccionarlos, se consideró que la información que aportarían sería de gran utilidad para la investigación. En general, los alumnos tienen calificaciones entre 7.0 y 9.0 en matemáticas, su desempeño es promedio, pero se eligieron porque se observó que son resilientes al resolver actividades de matemáticas. Los cuatro alumnos Alma, Brenda, José e Ignacio (nombrados así para proteger su identidad) son alumnos que a pesar de cometer errores en los ejercicios o problemas que resuelven, no se dan por vencidos tan fácilmente y continúan intentando, hasta lograr soluciones satisfactorias. Algunas de las características de los alumnos, de acuerdo con el Modelo de estilos de aprendizaje de Felder y Silverman (SEP, 2004), son las siguientes:

- Alma es una estudiante activa más que reflexiva, esto se nota porque ella aprende más aplicando los conocimientos en la resolución de problemas o haciendo tareas específicas; prefiere aprender haciendo escritos y ejercicios, así como al compartir conocimiento con sus compañeros. El tipo de información que retiene mejor es la que recibe por medios sensoriales: vista y oído principalmente. Además, es una alumna que gusta de seguir instrucciones.
- Brenda, al igual que Alma, es una estudiante que es más activa que reflexiva, a pesar de que en clase se nota pensativa, llega el momento en el que necesita estar discutiendo las actividades con sus compañeros. Es más intuitiva que sensorial, lo que implica que le gusta buscar soluciones innovadoras y poco convencionales; no le agradan las actividades en las que se tienen que repetir acciones. Además, la alumna es visual y secuencial, lo que significa que la información la adquiere de fuentes como esquemas o diagramas; aprende siguiendo pequeños pasos lógicos.
- José tiene mayor equilibrio entre sus estilos de aprendizaje. El suele ser un poco más reflexivo que activo; aunque puede comprender la información con la que trabaja de forma activa. Otra característica, es que existe equilibrio entre la intuición y la sensorialidad, con tendencia hacia esta última; aunque tiene la capacidad de seguir procedimientos establecidos, no le agrada la repetición. Un punto a destacar, es que tiene cierta dificultad al trabajar con abstracciones del

tipo matemático, él es más concreto. La diferencia más marcada entre sus estilos, es el predominio del medio visual para aprender sobre el verbal: recuerda y aprende mejor en el trabajo con esquemas, diagramas, tablas e imágenes. Él suele ser más global en su aprendizaje, lo que implica que puede aprender a grandes saltos, o comprender las cosas de forma repentina.

- Ignacio muestra cierto equilibrio entre las dimensiones de su estilo de aprendizaje. Él puede trabajar con información que recibe del exterior y la que trabaja en la mente. A pesar de ello, tiene la tendencia a comprender mejor cuando medita la información y trabaja solo. Tiene una ligera tendencia a trabajar mejor con la información que escucha o sobre la que comenta. También es secuencial, por lo que relaciona lo que ha aprendido anteriormente, si tiene conexión lógica con lo que trabaja. Aunque tiene dificultades en el trabajo con contenido de matemáticas, es capaz de explicar los procedimientos que desarrolla.

3.5. SECUENCIA GUIADA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Posterior a la selección de los alumnos que constituyen el caso investigado, se diseñó una secuencia de problemas, en la que los alumnos tenían que poner en práctica los conocimientos adquiridos al revisar el tema de sucesiones aritméticas. Las actividades tuvieron como objetivo general, identificar las estrategias que los alumnos ponen en juego para resolver situaciones propuestas, que tienen que ver con sucesiones aritméticas. Además, se buscó saber si es que éstas coinciden con las estrategias que promovió la docente en clase.

La secuencia estuvo constituida por dos partes. En la primera parte, se trató una situación relacionada con la leyenda del juego de ajedrez presente en el libro de *El hombre que calculaba* de Malba Tahan. En esa primera sección, el conocimiento que el alumno debía poner en juego, se relaciona con las sucesiones (aritméticas y geométricas) y las series; el alumno tenía que describir que estrategias utilizaría y elegir entre una sucesión y una serie para calcular el premio de un ganador de un torneo de ajedrez. La segunda parte consistía en calcular el enésimo término de una sucesión, a partir de una situación planteada; estas actividades tenían mayor parecido con las actividades que los alumnos trabajaron en clase con el tema de sucesiones aritméticas.

A pesar de que el objetivo de la investigación, se centra en las actividades relacionadas con las sucesiones aritméticas, en esta prueba se incluyeron actividades que tienen que ver con series. La razón es que, tal como se observó en los apartados 2.3.2 y 2.3.3 del capítulo anterior, las series pueden verse como continuidad y extensión de las sucesiones. Por este motivo, también se buscó indagar el alcance de los alumnos al revisar las series, a partir de sucesiones aritméticas y geométricas.

Tabla 6. Situaciones de la secuencia aplicada a los cuatro alumnos elegidos como caso

Apartado	Situación	Objetivo
Primera parte de la secuencia	**Campeonato de ajedrez:** En un campeonato de ajedrez aquel que resulte ser el ganador tiene la opción para elegir entre dos premios: • Premio 1: recibir un peso por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos pesos por la segunda, cuatro pesos por la tercera, ocho pesos por la cuarta y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas del tablero. • Premio 2: recibir 500 pesos por la primera casilla, 510 por la segunda, 520 por la tercera y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas del tablero. ¿Cuál opción crees que convenga al ganador y por qué?	El objetivo del reactivo fue conocer el tipo de procedimientos que utilizan los alumnos, para resolver la situación (intuitivos o formales) y saber si logran identificar los elementos esenciales que les permitan determinar el crecimiento de una serie, en cada uno de los premios.
	Una historia sobre el ajedrez: [Se contó a los alumnos la adaptación de la historia del ajedrez presente en el libro *El hombre que calculaba* de Malba Tahan y posteriormente se hicieron algunos planteamientos] **1.** Supón que tú eres un matemático del reino de Iadava, describe cómo harías para calcular la cantidad de granos que hay que pagar a Sessa por el obsequio que dio al rey. **2.** Si la dinámica hubiera sido diferente y el premio que recibiera Sessa fueran solo los granos correspondientes a una casilla elegida al azar, ¿cuántos granos habría de recibir si solamente recibiera los que corresponden con la casilla	Para cada uno de los cuestionamientos se fijó un objetivo diferente: Cuestionamiento 1: que el alumno argumente el procedimiento que utilizaría para resolver dicha situación e identificar si se trata de procedimientos formales que hacen uso de diferentes representaciones (lenguaje algebraico, lenguaje común o auxiliares como esquemas y dibujos). Cuestionamiento 2: identificar las representaciones y transformaciones (si es que las hace) que el alumno utiliza para

	número 31? Considera que la primera casilla equivale a un grano, la segunda a dos granos, la tercera a cuatro granos, la cuarta a ocho granos y así sucesivamente. **3.** Si se aplicara la dinámica del premio 2 del problema inicial, en la que se recibe 500 por la primera casilla, 510 por la segunda, 520 por la tercera y así sucesivamente, y la aplicáramos al dilema de Sessa ¿Cuántos granos habría de recibir si solamente se le entregaran los que corresponden con la casilla número 31?	calcular el enésimo término de una sucesión geométrica. Cuestionamiento 3: identificar las representaciones y transformaciones (si es que las hace) que el alumno utiliza para calcular el enésimo término de una sucesión aritmética
Segunda parte de la secuencia	**Limpieza de cristales** Una empresa dedicada a la limpieza va a limpiar los cristales exteriores de un edificio, el costo depende del piso que se limpie. Para limpiar los vidrios del primer piso la empresa cobra \$350, y cada piso adicional cuesta \$25 más que el anterior. Si en el edificio urge que se limpien los cristales de la sala de juntas ubicada en el piso 27 ¿cuál será el costo por limpiar solo ese piso? Si el edificio tiene 35 pisos, ¿cuál será el costo de la limpieza de todos los cristales exteriores?	Al igual que en la segunda situación del apartado anterior, cada cuestionamiento tuvo un objetivo: Cuestionamiento 1: identificar las representaciones y transformaciones (si es que las hace) que el alumno utiliza para calcular el enésimo término de una sucesión aritmética. Cuestionamiento 2: identificar las representaciones y transformaciones (si es que las hace) que el alumno utiliza para resolver una serie.

Fuente: elaboración propia a partir de los planteamientos de la secuencia aplicada al caso (ver anexo 3)

CAPÍTULO 4

COMPRENSIÓN Y REPRESENTACIÓN DE LAS SUCESIONES. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Presentación

En el presente capítulo se desarrolló el análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas. Se aborda cada uno de los cuestionamientos aplicados en los dos instrumentos aplicados previo a la selección de un grupo más reducido para estudiar. Las respuestas fueron clasificadas de acuerdo con las habilidades relacionadas con las operaciones mentales (Sierpinska, 1990) y las transformaciones de las representaciones (Duval, 2016) relacionadas con la comprensión. De esta forma se tiene un acercamiento a la comprensión que logran los estudiantes de las sucesiones aritméticas.

4.1. Observación de clases en las que se trabajó el tema de sucesiones

La primera de las sesiones que se observó con el grupo de 1°B, la docente trabajó cuestiones de inducción de los alumnos al tema. La actividad con la que inicia la docente, es el cuestionamiento directo a los alumnos acerca que lo que entienden por sucesión. La mayoría de los estudiantes muestran nociones cercanas a la definición y las vinculan generalmente a la existencia de un patrón de regularidad o crecimiento. Llama la atención de la docente la respuesta que da una alumna. De acuerdo con la percepción de la docente, parece haberle dado una respuesta más cercana a una serie que a una sucesión:

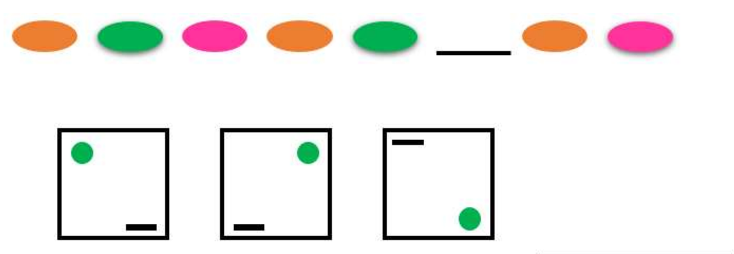
- Alma: es como un patrón de figuras que se repiten de nuevo o que aumentan la misma cantidad que se le aumentó al primero.
- Martín: yo le puse que es una sucesión de números y de figuras que va uno después de otro.
- Álvaro: es el aumento de números pares e impares, por ejemplo, dos, cuatro, seis, ocho, diez, o uno, tres, cinco, siete y nueve.
- Ignacio: es un seguimiento numérico.
- Miguel: es como una serie que va de dos en dos.
- Brenda: es una numeración y a ese número se le va sumando una cantidad.
- Docente: se le va sumando una cantidad… —la docente medita un poco la respuesta— Es que existe una diferencia entre sucesión y una serie, la definición que tú me estás dando ahorita es de una serie, porque en una serie se suman y en una sucesión no.

En un cuestionamiento cercano con Brenda, ella me aclara que su respuesta hacía referencia a un número que se agrega al número anterior para obtener el siguiente, en un procedimiento que se repite. Es decir, ella reconoce desde el principio, al igual que varios de sus compañeros la idea de diferencia o patrón en una sucesión. Además, identifica cómo es posible obtener diversos términos a partir del primer elemento y la diferencia.

En esta escena se puede apreciar la importancia que da la docente a la parte formal de la matemática. Generalmente al iniciar un tema, fue posible observar que iniciaba con las nociones previas de los alumnos sobre el tema, actividad que forma parte de los Principios Pedagógicos (SEP, 2017a). A pesar de ello, no se aprovechan dichas ideas a partir de actividades diversas, retomándolas en diversos momentos de la clase para observar la evolución de las nociones de los alumnos, para comentar o enfatizar una idea.

Posteriormente, la docente plantea una actividad en la que tienen que encontrar el patrón en dos sucesiones diferentes de figuras (ver ilustración 4). En la primera actividad de los óvalos de color, los alumnos rápidamente hicieron comentarios como "hace falta el verde", "ahí va una de color verde", por lo que la docente aprovechó lo que dijeron los alumnos para cuestionar acerca del motivo de sus afirmaciones. Las respuestas de los alumnos giraron en torno a la existencia de un orden de colores que se repite: amarillo, café, verde.

Ilustración 4. Actividades planteadas en clase para encontrar patrones



Fuente: planeación semanal de la docente.

En contraste, las respuestas a la sucesión de los cuadrados con el pequeño círculo y el segmento no fueron inmediatas. La docente discute con algunos alumnos acerca de dónde debe ir el "punto" y la "raya" en el cuadrado que continúa la sucesión. Después de algunas respuestas erróneas, Miguel pasa al pizarrón para compartir su respuesta y dibuja un cuadrado con el círculo pequeño en la esquina inferior izquierda y el segmento en la esquina superior derecha, lo cual es una respuesta correcta. La docente pide que alguien dibuje el cuadrado que seguiría (en la quinta posición). Miguel afirma que es como la primera y la docente le pregunta si está seguro.

La pregunta que planteó la docente hace dudar al grupo. Una vez que está el cuadrado Miguel toma un marcador y dibuja el círculo y el segmento, lo hace en la misma posición en la que están en el tercer elemento de la sucesión. Ante la respuesta del alumno, la docente cuestiona:

— Docente: ¿y luego cómo sigue el otro? —contrario a lo que se esperaría, por la reacción de los cuestionamientos anteriores, el grupo permanece en silencio, quizá porque no hubo corrección por parte de la docente para obtener el elemento que pensaban que estaría en la quinta posición—.

— Miguel: sería la línea aquí y el punto acá —señalando en un cuadrado imaginario la esquina superior derecha y la esquina inferior izquierda, respectivamente—.

— Docente: otra vez como el de ahí —señalando el cuarto elemento de la sucesión—.

— Miguel: —asiente ligeramente mientras varios de sus compañeros niegan—.

— Docente: ¿entonces cómo quedaría? —refiriéndose al quinto término de la sucesión—.

— José: el punto del lado izquierdo arriba y la raya abajo —contesta mientras varios de sus compañeros dan sus respuestas—.

— Docente: —indica a Miguel con un ademán para que corrija— si efectivamente. Si se dan cuenta allá el patrón —señalando la sucesión de elementos de color— es anaranjado, verde, rosa, anaranjado, verde y falta el…

— Varios: rosa.

Con este tipo de ejercicios, la docente inicia la clase poniendo a los alumnos en el escenario en el que reconocen el tema que se habrá de desarrollar. En este sentido, Sierpinska (1994) indica que un proceso de comprensión comienza con la identificación de un objeto determinado, como un objeto digno de estudio. En este caso, la docente trata de presentar a los estudiantes situaciones que se relacionan con la búsqueda de patrones y regularidades, situación que les es familiar, puesto que lo han trabajado desde los primeros años de escolarización. Incluso, como se mencionó en el segundo capítulo, desde el concepto mismo de número, los estudiantes entran en el juego del reconocimiento de patrones lógico-matemáticos.

Posterior a la escena descrita, la docente revisa nuevamente la sucesión con los alumnos, haciéndoles que describan cómo se comporta la sucesión. Cuando los alumnos parecen haber identificado el patrón del arreglo de figuras, se les cuestiona ¿qué pasaría si se ocupan números en lugar de figuras? Al mismo tiempo que escribe tres sucesiones en el pizarrón (ver ilustración 5) y les pide que escriban el número que falta.

Ilustración 5. Ejercicios planteados en la primera sesión observada

2	4	8	16	32	_____	128
4	8	10	20	22	_____	46
1	2	6	24	120	_____	

Fuente: planeación semanal de la docente

Es preciso aclarar que en los diálogos que se presentan a partir de ahora, a lo largo del capítulo, aparece la figura de *Investigador*. Esto se hace en atribución a mi persona, por el rol que asumí en el proceso de observación.

Deambulo entre los lugares, mientras los estudiantes resuelven la actividad planteada. Cuestiono a los alumnos acerca de la forma en la que encontraron el elemento que falta en cada sucesión. Aproximadamente, 15 de los alumnos descubren los patrones para la primera y tercera sucesión. En el caso de la primera sucesión, la mayoría de los estudiantes duplican cada uno de los elementos para obtener el elemento que sigue. En el caso de la tercera sucesión, multiplican el primer elemento por dos para obtener el segundo, el segundo elemento por tres para obtener el tercero, el tercero por cuatro para obtener el quinto y así sucesivamente. Sin embargo, gran parte del grupo tiene dificultad con la segunda sucesión, como se ejemplifica a continuación:

— Investigador: podrías explicarme ¿cómo sale el elemento que falta?
— Ignacio: aquí —refiriéndose a la tercera sucesión— es uno por dos, dos, dos por tres son seis, seis por cuatro son veinticuatro, veinticuatro por cinco son ciento veinte y ciento veinte por seis son setecientos veinte.
— Investigador: muy bien, ¿y la primera?

— Ignacio: en la primera le va sumando el doble, dos más dos son cuatro, cuatro y cuatro ocho, ocho y ocho son dieciséis, dieciséis por dos son treinta y dos y treinta y dos son sesenta y cuatro.

— Investigador: ¿y el de en medio? —refiriéndose a la segunda sucesión—.

— Ignacio: se va sumando de dos en dos aquí —señala el ocho y el diez—, pero acá ya no, acá se suma el doble —señala el diez y el veinte—. Es que aquí ya no le entendí.

La docente interrumpe el trabajo de los alumnos para revisar en grupo, pues la mayoría de los estudiantes han concluido la actividad. La docente, con ayuda de la participación de los alumnos explica el patrón que define el comportamiento de los elementos de las sucesiones. Tal como la mayoría de los alumnos lo calcularon (aproximadamente 28 alumnos), en la primera sucesión el elemento que continúa se encuentra duplicando el elemento anterior. Para la tercera sucesión, en la que el número de aciertos redujo a 17 alumnos, la docente aclara que el elemento faltante se encuentra al multiplicar por un número que no es constante, sino que aumenta y lo denomina "posición"; es decir, para obtener el número de determinada posición, se multiplica esa posición por el elemento anterior. Para el ejercicio número 2, donde solamente 3 alumnos pudieron dar con una respuesta satisfactoria y argumentarla, la docente explica que es un "patrón alternado" pues el primer elemento se multiplica por dos y para el siguiente se suma dos, después se multiplica por dos para el cuarto elemento y se suma dos para obtener el quinto y así sucesivamente. Al finalizar la explicación, la sesión termina.

En esta actividad, la docente nombra un elemento que será clave, con él habrá de conducir a los alumnos a la formulación de expresiones algebraicas que definen a una sucesión: la posición. Aunque en la primera actividad buscó que el alumno descubriera al patrón como aquello que cambia de un término a otro en una sucesión. La sesión finalizó con la asociación de cada término de la sucesión con la posición en la que se encuentra, vinculando dicha posición con el término anterior para generar uno nuevo.

En esta sesión, fue posible observar que en las sucesiones "simples", no existió mayor dificultad para que los alumnos encontraran el patrón que determina a los elementos del arreglo. Sin embargo, en sucesiones con elementos más elaborados o cuyos términos están alternados, los alumnos presentan mayor dificultad para encontrar el patrón; incluso cuando parecen haberlo encontrado, suelen cometer errores. En relación con la progresión geométrica, no parecen tener dificultad, junto con el tercer ejercicio, son los que tuvieron mayor cantidad de aciertos. A partir de la observación de la primera sesión en ambos grupos (1°A y 1°B), se decide centrar la atención en el grupo de 1° B, debido a las características de los alumnos. A pesar de ser considerados en la escuela como un grupo indisciplinado, participan activamente en clase y se expresan con cierta elocuencia.

Durante la segunda sesión observada, la docente planeó una actividad de evaluación de grupo. La actividad consistió en que los alumnos se organizaron en equipos de 4 integrantes para que uno a la vez conteste los cuestionamientos. Ubicada a cierta distancia de los equipos, la docente lanza la pregunta y el integrante en turno del equipo la escribe en un papelito, si la respuesta es correcta, la docente recibe el papelito (el cual tiene el número de equipo) y es un punto para el equipo; solamente se reciben 3 papelitos. Al final de la actividad gana el equipo que acumula más papelitos (respuestas correctas). Las preguntas que se formularon son de matemáticas, de los contenidos que se han revisado hasta el momento, además se incluyeron algunas preguntas de otras asignaturas o de cultura general. Los primeros planteamientos son: ¿cuántos años duró la guerra de independencia?, ¿cuántos ángulos interiores tiene un pentágono?, ¿fórmula para calcular el área de un trapecio?, ¿capital de Sonora?, ¿cuánto es $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$?, ¿cuánto es $(-6)(-5)(4)$?, ¿un número negativo por un número negativo qué da?, díganme tres características de un triángulo isósceles, ¿cuál es el valor de "x" en la siguiente ecuación $7x + 9 = 58$?, ¿cuál es el valor de “pi”?...

De esta primera etapa de la sesión, destaca un cuestionamiento relacionado directamente con el tema de sucesiones: “¿fórmula general para calcular la fórmula de una sucesión?”. Un equipo que tarda en anotar su respuesta, se da el diálogo siguiente entre los alumnos:

— Alma: es D por…
— José: menos p.
— Alma: ¡no!
— José: ¡que sí!
— Arturo: ¿$D - p$?
— José: p - 1, algo así ¿no?
— Investigador: pero, ¿qué significa cada literal o para qué servía? Si se acuerdan para que sirve, quizá la anotan más fácil.
— Alma: yo me acuerdo que era D, c, ¿más o por?
— Investigador: ¿pero no se acuerdan qué representaba cada letra?
— Alma: no
— Investigador: nada más de la fórmula

— Alma: sí

Esta situación evidencia que los alumnos procuran la memorización de la fórmula, pero no la comprensión de la misma a partir de su uso. En este sentido, se considera que "memorizar algoritmos y manipular signos y representaciones matemáticas, sin comprender profundamente sus significados, degrada la actividad cognitiva del individuo al nivel de reflejo simbólico" (Wilder 1968, citado en Sáenz-Ludlow, p. 129). Los alumnos están esforzandose por recordar un algoritmo, el cual les permite crear expresiones algebraicas y usar las mismas para obtener un valor; están actuando como replicantes, pero no estan comprendiendo la estructura misma y el significado de las literales involucradas.

En otro equipo discuten acerca de las literales que componen la fórmula:

— María: Es la de constante
— Brenda: La "D"
— María: ¡Que no era esa!
— Brenda: A que sí, era esa, $Dn + c$ —quita el papelito a Ernesto y comienza a escribir—. Algo así era, a ver si estamos bien —corre a entregar el papel—.
— Investigador: —pregunta a los demás integrantes del equipo— ¿qué significa cada letra?, ¿la D qué significa?
— Ernesto: D es… quién sabe
— María: posición

Brenda regresa de entregar el papelito

— Investigador: ¿la tuvieron bien?
— Brenda: sí, pero dijeron que ya la habían entregado
— Investigador: pero, ¿qué significa cada letra?, la C ya dijeron que era, constante. ¿Y las otras dos? Una la dijiste bien tu —refiriéndose a María—
— María: ¿la D?
— Investigador: pero la D no es posición
— Brenda: posición es la otra —señalando la n—
— Investigador: aja, y la otra —pregunta por la D—
— Brenda: es la distancia que tiene de uno al otro
— Investigador: pudiese decirse que si es una distancia.

La conversación termina por el regreso al aula.

Nuevamente, se evidencia el poco sentido que tiene para el alumno cada una de las literales y el conjunto que forman. El significado que porta cada elemento de la expresión algebraica, parece irrelevante para ellos. A pesar de que cada letra se asocia con la inicial de la palabra que significa, el alumno no logra recordarlo. Hacen constantes intentos por recordar las grafías, mas no el significado que portan. En este sentido, los alumnos tendrían que hacer una conversión de representaciones, para llegar de la afirmación de la docente, a la representación como una expresión algebraica. Es decir, para llegar de la oración "multiplicar la diferencia por la posición y sumar o restar una constante" a la expresión algebraica $Dn \pm c$. De esta forma, dicha conversión puede mirarse como una traducción o codificación (Duval, 2016, p. 74), debido a que, al fragmentar la oración en sus partes esenciales, cada una está representada por una literal: D es la diferencia de la sucesión, n es la posición y c es la constante. Incluso en esa conversión, el alumno habrá de reconocer propiedades de la escritura del álgebra, como el hecho de que el valor de dos literales que se escriben juntas está relacionado por una multiplicación; Dn es lo mismo que decir "de" por "ene".

Una conversión no debe confundirse con una codificación, ni una interpretación (Duval, 1993, p. 43). En muchos casos, puede percibirse que los alumnos están realizando una codificación más que una conversión de representaciones. Incluso, existen practicas docentes, que conducen a obstáculos didácticos (D'Amore, 2005), al privilegiar una especie de codificación sobre la conversión de representaciones. Esto se puede verificar, incluso es una situación análoga a la resolución de ejercicios en lugar de problemas: se le da al alumno una sucesión, se le pide que identifique el patrón de crecimiento o decrecimiento, este siempre será la "diferencia" que estará representada por la letra D y que habrá de multiplicarse por la posición, que estará representada por la letra n, finalmente se agrega o se quita lo que hace falta y que estará denominado por la c de constante. Esto se vuelve un instructivo para los alumnos y al final de cuentas, se da a manera de sustituciones, tal como se mencionó.

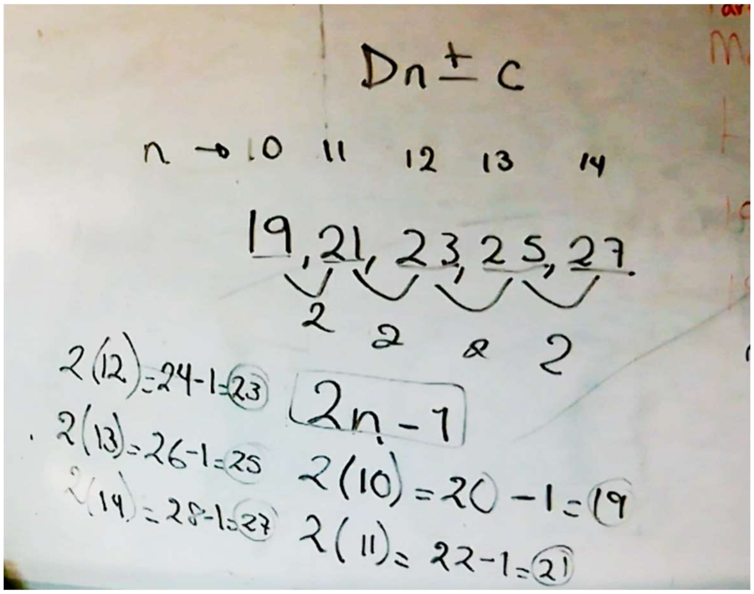
Aunado a lo anterior, si el alumno ha logrado comprender cómo calcular el término de una sucesión, aunque no memorice la fórmula, la puede construir. Esto debido a que el alumno sabe que el número que encontró como aumento entre cada término de la sucesión, es aquel que se va a sumar tantos términos delante se busque. Lo que es lo mismo, lo puede multiplicar considerando que la suma es iterada. Posteriormente, puede verificar si esa multiplicación cumple con los términos conocidos de la sucesión, de acuerdo con la posición. En caso de ser negativo, habrá de agregar o restar un valor y repetir el procedimiento.

La estrategia mencionada, es aquella que propuesta por la docente como vía eficaz para obtener una expresión que define los términos de una sucesión. Sin embargo, los alumnos parecen haberla olvidado debido a que centraron su atención en recordar la fórmula. La explicación a este tipo de escenarios la ofrece Duval (2016, p. 83), cuando refiere que se margina el uso de registros multifuncionales (como el lenguaje natural) y prevalece el uso de registros monofuncionales (lenguaje matemático), debido a que el tratamiento puede tomar forma de algoritmo. En este caso, el predominio del uso de registros monofuncionales, es causa de la atención centrada en los algoritmos. De esta forma, se cae en convertir al registro semiótico monofuncional en el objeto de estudio sobre el estudio del objeto que se representa a través de dicho registro. Similar a la cuestión que plantea D'Amore (2005) en la que se aprenden signos en lugar de aprender conceptos.

Continuada la sesión, en la segunda etapa de la misma, los alumnos debían revisar una hoja ejercicios de sucesiones que planteó la docente. Ella cuestionó si habían existido dudas, a lo que varios alumnos dijeron que no, solo se escuchó la voz de una alumna que dijo haber tenido dudas, pero no recordaba dónde. Varios alumnos no terminaron el ejercicio y la docente pidió que lo concluyeran en clase. Los alumnos trabajan, mientras la docente recorre los lugares anotando participaciones de la actividad anterior y revisando el trabajo que hacen. Me acerqué a una alumna porque me llamó la atención su resultado en un ejercicio (ver ilustración 7).

- Investigador: ¿cómo llegaste a esos cuarenta y ocho? —refiriendo al resultado que obtiene en la primera pregunta del ejercicio de tarea (¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura que ocupe el lugar 15? —.
- Nadia: bueno, aquí se va aumentando de 3 y nada más le fui sumando 3 —comienza a dudar su respuesta y continúa— pero creo que se sumaba 4 y se quita uno.
- Investigador: ¿por qué?
- Nadia: porque así es una regla que nos dio —haciendo referencia a la docente—.
- Investigador: ah, como ahí que tiene menos uno —señala un ejemplo en el pizarrón que escribió la docente (ver ilustración 6)— ¿cómo saldría con la regla que les dio?
- Nadia: —cuenta los cuadritos blancos de la figura 3 y hace cálculos en voz alta— son doce más cuatro, menos uno… serían quince.
- Investigador: y eso sería el número de cuadritos que tendría ¿cuál?
- Nadia: la que sigue, la figura 4. Ah, está más fácil esta —señalando una operación que tiene escrita $2 \times 8 = 16 - 1 = 15$.

Ilustración 6. Expresión desarrollada de una sucesión



Fuente: anotaciones hechas por la docente en el pizarrón durante la sesión

Esta situación, evidencia que algunos alumnos como Nadia asocian la escritura de la expresión algebraica con ejemplos anteriores, no por lo que representan, sino por la letra o número mismos. Es decir, como en varios ejemplos que revisaron el valor de la constante es -1, los alumnos tienden a utilizar ese valor en las expresiones de nuevas sucesiones. Esta situación se repite sobre todo con la constante, puesto que la diferencia generalmente es un dato que encuentran con mayor facilidad.

La docente pide la atención para hacer comentarios generales, que puedan servir de orientación a los alumnos para resolver las actividades planteadas en su hoja de ejercicios.

— Docente: ¿cuál es la fórmula que nos ayuda a encontrar las otras fórmulas de las sucesiones?
— Varios: —recitan mientras la docente escribe— $D\ldots\ n\ldots\ +\ldots\ -\ldots\ c$.
— Docente: ¿qué significa D?
— Varios: diferencia —algunos alumnos contestan distancia—.
— Docente: ¿qué significa n?
— Alma: posición.
— Docente: ¿qué significa la c?
— Varios: constante.
— Docente: sale, tengo la siguiente sucesión 4, 6, 8, 10, 12, … ¿qué significan los puntos suspensivos?
— Alma: que todavía sigue.

- Docente: exactamente, ahora, ¿cómo voy a encontrar la diferencia?, ¿quién me dice?, o ¿cuál es la diferencia de la sucesión?
- Arturo: de dos en dos.
- Docente: de dos en dos porque —comienza a anotar las diferencias entre los números y uniéndolos con líneas— del cuatro al seis ¿cuánto hay? —espera el dos como respuesta de los alumnos—, ¿del seis al ocho?, ¿del ocho al diez?, ¿del diez al doce?, entonces D vale…
- Varios: dos.
- Docente: dos por n que es mi posición, ¿qué posición ocupa el número 4? (señala al cuatro de la sucesión)
- Varios: uno
- Docente: uno, ¿el número seis? —espera a que los alumnos contesten y continúa numerando conforme las respuestas de los alumnos—, ¿el número ocho? tres, ¿diez? cuatro, y doce cinco. Entonces n para sacar la primera ¿cuánto vale? —hace una pausa breve esperando una respuesta—, si se supone que es mi posición y quiero sacar la primera
- Varios: uno
- Docente: ¿dos por uno? —anotando la expresión $2(1)$ en el pizarrón—
- Varios: dos
- Docente: ¿para cuatro?
- Varios: más dos
- Docente: vamos a ver si en las demás coinciden, —la docente comienza a escribir las expresiones en el pizarrón y esperando para cada caso que los alumnos contesten: $2(2) = 4 + 2 = 6$; $2(3) = 6 + 2 = 8$; $2(4) = 8 + 2 = 10$; $2(5) = 10 + 2 = 12$—. Entonces, ¿cómo quedaría mi fórmula?
- Varios: —comentando las ideas y complementando las afirmaciones— $2n + 2$
- Docente: recuerden, 2 es la diferencia que hay entre un número o una figura y la otra; n es la posición; $+$ o $-$ podría ser lo que le voy a quitar o lo que le voy a aumentar para que me de mi sucesión, en este caso le aumenté 2. Y esa es la fórmula general —señalando la expresión $2n + 2$ escrita en el pizarrón— para calcular la sucesión de esto —señalando la sucesión $4, 6, 8, 10, 12, ...$, también escrita en el pizarrón—. Ahora, por ejemplo, me pueden hacer una pregunta, *¿qué número va en la veinteava posición?*, ¿qué tengo que hacer para saber ese número?
- Brenda: dos por veinte
- Docente: multiplico veinte, o dos por veinte —anota la expresión $2(20)$— y le sumo dos, cuarenta y dos. Entonces como conclusión ¿qué podemos decir?, ¿para qué nos sirven esas fórmulas?
- Víctor: para calcular
- Docente: para calcular ¿qué?
- Alma: la sucesión
- Docente: la sucesión, ajá, en el 20 va el número 42. Obviamente la fórmula nos sirve para calcular la posición que nos pidan más extensa, por ejemplo, si me piden la 120 para no hacer toda la sucesión completa puedo ocupar esta fórmula —señalando la expresión $2n + 2$— para encontrarla más rápido sin estar haciendo tanto número. Ahorita les comentaba a sus compañeras, si se les dificulta un poco con figuras, esas

> figuras conviértanlas a números y así poder encontrar su fórmula para encontrar la sucesión, porque les piden qué número va en el quinceavo lugar. Entonces, si yo encuentro mi fórmula, puedo encontrar cuántos cuadritos van en la quinceava posición. A trabajar por favor, ¿dudas? —algunos alumnos comentan que no hay duda o que ya le entendieron—.

En esta situación se identifica claramente la importancia que la docente da a la memorización de la fórmula para su uso en la construcción de expresiones de las sucesiones. A partir del primer cuestionamiento de la intervención, se espera que los alumnos reciten la fórmula general para calcular la fórmula de una sucesión. A pesar de que hace énfasis en el significado de cada literal, varios alumnos dudan y ella continúa con la explicación. Se hace énfasis en el origen del valor de la diferencia, el cual no representa mayor dificultad para los alumnos, puesto que prácticamente todos logran identificarlo con precisión.

El momento en que la docente comprueba la expresión $2n + 2$ con algunos de los valores conocidos, es el punto de ruptura entre la mecanización y la comprensión. Muchos alumnos logran hacer los procedimientos en diferentes sucesiones hasta este punto. Hacen un proceso semejante al que sugiere la docente: encontrar la diferencia, multiplicar por la primera posición, agregar o quitar un valor faltante para llegar al término en la primera sucesión y finalmente evaluar en las primeras posiciones para comprobar que la expresión sea correcta. Varios alumnos encuentran la diferencia y la multiplican por la posición agregando lo que falta para comprobar los primeros términos; si los resultados coinciden con los términos en las posiciones utilizadas, buscan el término de la posición que les indica el ejercicio.

Esta explicación que se da a los alumnos, también pone de manifiesto lo que Duval (2016) denomina la transparencia del tratamiento simbólico. Es decir, la docente desarrolla una práctica común entre muchos profesores en el aula: utilizar simultáneamente dos registros de representación. Esta situación es de lo más cotidiana en educación matemática pero que a la vez es compleja para los estudiantes, sobre todo en los primeros años de escolarización. En este caso, los registros empleados son el registro multifuncional del lenguaje natural y el registro monofuncional de las expresiones simbólicas del álgebra.

Por otra parte, la docente ha hecho una transformación de representaciones. Como se mencionó, ha llevado una expresión del lenguaje común, a una expresión en el simbolismo propio del álgebra.

Esto plantea una situación compleja de reconocimiento: “reconocer el mismo objeto en dos representaciones cuyos contenidos son muy diferentes porque corresponden a dos registros diferentes” (Duval, 2006, p. 159). En este caso, la docente promueve la transformación de representaciones, a partir de la formulación de expresiones algebraicas que definen el enésimo término de una sucesión. Sin embargo, lo hace a través de un algoritmo bien definido, el cual se espera que los alumnos sigan. El mismo procedimiento es repetido constantemente, en cada ocasión en la que algún alumno parece no estar comprendiendo como resolver la situación.

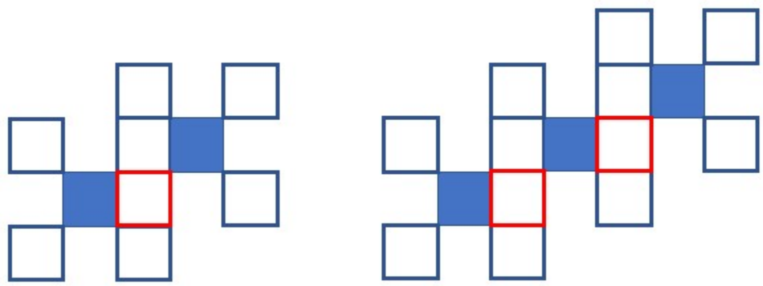
Otra manera de ver la influencia del docente en el actuar y la comprensión del alumno, es desde el tipo de lenguaje que se emplea y la forma en la que se emplea. En este sentido, Sierpinska (1994) refiere que el docente se apoya de muchas herramientas del lenguaje, como auxiliares para que el alumno logre la comprensión: discurso figurativo, lenguaje corporal, variaciones en el tono de voz, entre otras (Sierpinska, 1994, p. 83). Estos apoyos que utiliza el docente, pueden ser de utilidad para que el alumno advierta el tipo de registro de representación se utiliza en determinado momento. El énfasis en la voz, puede ayudar a identificar al alumno cuando el valor de la posición debe ser expresado con la incógnita; un movimiento ascendente de la mano, facilita que el alumno advierta que debe agregar cierta cantidad para completar la expresión algebraica. Sin embargo, esos apoyos del docente no siempre estarán presentes cuando el alumno deba resolver diversas situaciones por sí solo.

La explicación de la docente, parece ser eficiente en la inmediatez y algunos alumnos logran captar lo que tienen que hacer en los ejercicios que tienen asignados como tarea. Esto se evidencia con el ejemplo siguiente, donde se describe el diálogo que se reanuda con la alumna Nadia:

- — Investigador: crees que esto pueda ajustar a eso de allá —señalando lo que la docente acaba de escribir en el pizarrón para apoyar su explicación—
- — Nadia: sí
- — Investigador: ok, vamos a ver, la primera figura ¿cuántos cuadritos tiene de los que te pide?
- — Nadia: tiene 4
- — Investigador: ¿la segunda?
- — Nadia: tiene 8 y la siguiente 12. Ah entonces va aumentando de 4 no de 3. Aquí me equivoqué —señalando el cuadro que queda en la unión del módulo de ambas figuras (ver cuadrados rojos en ilustración 7)—

— Investigador: exactamente, el del hueco. Y en la figura que sigue ¿cuáles no consideraste?
— Nadia: este de aquí en medio y este de acá —señala los cuadritos que quedan en las uniones de los módulos de la figura (ver cuadrados rojos en ilustración 7)—.
— Investigador: mira, le ibas quitando cada vez más, en una figura le quitaste uno y en la que sigue dos y así sucesivamente. Bueno, continúa.

Ilustración 7. Actividad de sucesiones propuesta a los alumnos



Fuente: planeación semanal de la docente

De la observación de las sesiones, fue posible identificar de manera asistemática, algunas dificultades que enfrentan los alumnos al resolver problemas que tienen que ver con sucesiones aritméticas. Las dificultades son de tres tipos: relacionadas con la identificación de patrones en una sucesión; relacionadas con la obtención de sucesiones numéricas a partir de arreglos de figuras; relacionadas con la comprensión de los elementos que se ponen en juego para obtener la expresión algebraica, que define a una sucesión y permite calcular el enésimo término de una sucesión.

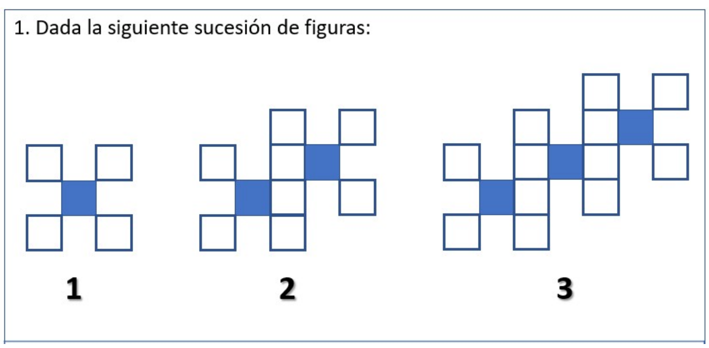
En relación con la primera dificultad enunciada, se observó que algunos alumnos aún tienen problema para encontrar los patrones que definen el crecimiento de una sucesión. En varios casos aíslan los elementos de la sucesión o los toman de dos en dos, lo que dificulta en mayor medida encontrar la relación existente, que sea patrón, entre los términos de dicha sucesión. Esa dificultad está relacionada directamente con la segunda, en muchos casos, en los que se trabajan las sucesiones a partir de figuras, los alumnos encuentran el patrón fácilmente de aquellas sucesiones en las que la relación es evidente: repetición de color, variación regular en el número de lados, variación regular en el número de elementos. La dificultad se hace evidente cuando varía más de un elemento o son sucesiones compuestas: un cuadrado con dos figuras al interior, figuras que rotan más de una vez en cada ocasión, arreglos de mosaicos compuestos por más de un tipo de módulos. En el caso de la actividad planteada en la primera sesión, se evidencia que, al utilizar figuras, que parece que hacen más entendible el trabajo y comprensión de las sucesiones, la situación suele parecer más compleja para el alumno.

Este escenario se presentó en actividades (ilustración 4), en las que las figuras representaban un patrón de movimiento o forma, y no un patrón de variación de cantidad. En este último caso, sucede que los alumnos comprenden mejor las situaciones de variación y el patrón que refine a determinadas sucesiones. Como se ha demostrado, el uso de representaciones como las configuraciones puntuales (Castro, 1995), ayudan al estudiante de secundaria a descubrir patrones para poder expresar generalidades, debido a su carácter gráfico. La importancia de los recursos gráficos es vital, desde etapas iniciales de escolarización, aplicando actividades lúdicas (Cortez, 2017), con actividades de lápiz y papel o en entornos tecnológicos (Butto y Rojano, 2010). A partir de las mismas los alumnos tienden a los procesos de generalización en matemáticas.

Este enfoque parece predominante en educación en general. En el preescolar se comienza con el desarrollo de habilidades motrices. Los primeros años de educación primaria se comienza con el desarrollo de habilidades del pensamiento a través de objetos concretos. Poco a poco, conforme se avanzan en los grados escolares, el uso de objetos concretos pasa al uso de simbolizaciones. Se trata de una actividad más intelectual, si bien se refleja en representaciones simbólicas, se espera que suceda un proceso simultáneo y similar en la mente del estudiante. En este sentido, Piaget (1978) concibe la comprensión como una construcción, “un complejo proceso dialéctico entre acción y reflexión sobre la acción o en un movimiento de ida y vuelta desde un uso instrumental de las operaciones a través de la abstracción reflexiva hasta una abstracción reflejada” (citado en Sierpinska, 1994, p. 121). Pero dicho proceso muchas veces es obviado y tal como las acciones del alumno, las acciones del docente se vuelven mecánicas.

Por último, se observó que muchos estudiantes dan importancia a la memorización de la fórmula, que les permite encontrar la expresión que define una sucesión, por encima de la comprensión de las relaciones entre los elementos que la componen. Incluso, se les dificulta encontrar el valor que se debe asignar a cada literal, aun cuando han encontrado la diferencia entre los términos de una sucesión, tienen dificultad para saber qué hacer con ese número. Esa situación parece ser incentivada por la docente, cuando reitera el aprendizaje de la fórmula general para encontrar la fórmula de una sucesión, al parecer por cuestiones prácticas, para que los alumnos resuelvan las situaciones que se les plantean. Aunado a ello, debido a la redacción de los cuestionamientos y los ejercicios, los cuales tienen la misma estructura, pero con diferentes datos, contexto o figuras (ver tabla 7 e ilustración 6), los alumnos aprenden a resolver actividades de cierto tipo; dichas situaciones parece que dan prioridad a la mecanización de algoritmo sobre el razonamiento y el descubrimiento de la lógica que subyace al trabajo con sucesiones.

Tabla 7. Estructura de los ejercicios planteados en clase a los alumnos

Planteamiento	Observaciones
Dada la siguiente sucesión de figuras 	Se presenta al alumno un arreglo de figuras que aumenta determinada cantidad cada vez. A partir de la figura, el alumno puede obtener una sucesión de números. En este caso, la representación se considera auxiliar para la sucesión de números, por lo que al obtener las cantidades de cada figura no se considera como una conversión.
a) ¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura que ocupe el lugar 15?	Los primeros cuestionamientos buscan que el alumno determine la cantidad de mosaicos de determinada figura, respuesta a la cual pueden llegar continuando la sucesión de figuras, de números o mediante operaciones.
b) ¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura que ocupe el lugar 27?	
c) ¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura que ocupe el lugar 49?	
d) Si x representa a los mosaicos azules, ¿Cómo se representa algebraicamente a los mosaicos blancos?	El cuestionamiento requiere específicamente que el alumno haga uso del lenguaje algebraico para generalizar la expresión.

Fuente: elaboración propia a partir de las observaciones de clase y la planeación docente.

En relación con este último componente de la mecanización, Sierpinska (1990) concibe la comprensión como un proceso y no como un acto. Además, la misma autora refiere la importancia de la mecanización, para la acumulación de información necesaria; en muchos casos, una mente más experimentada tiene la posibilidad de explicar mejor una situación (dar pruebas de comprensión y validar información o afirmaciones), porque cuenta con más referentes conceptuales.

> Al principio, los conceptos en la memoria generalmente están parcialmente definidos y débilmente relacionados con otra información almacenada. En años posteriores, cuando los recursos de información son ricos y organizados en un banco de datos construido sobre un elaborado sistema de conexiones entrecruzadas, el carácter del aprendizaje cambia (Sierpinska, 1990, p. 25).

En consecuencia, se considera que la mecanización forma parte importante del desarrollo intelectual y la comprensión del estudiante. Sin embargo, esta debe enfocarse hacia el cúmulo de recursos e información que se tenga y debe estar precedida por la comprensión. Dicha comprensión, se considera que se alcanza con la transición entre diferentes niveles, que se logran con el desarrollo de habilidades del pensamiento: identificación, discriminación, generalización y síntesis (Sierpinska, 1994); así como con la transformación de representaciones (Duval, 2016).

Al respecto de esta última habilidad, se observó que la docente promueve el cambio de registro de representación del mismo objeto denotado (conversión). Sin embargo, el desarrollo de dicha habilidad se tornó mecánica, en el sentido en el que el proceso fue el mismo para cada sucesión empleada. Los registros empleados, a pesar de ser uno multifuncional (lenguaje común) y uno monofuncional (simbolismo algebraico), fueron registros que en clase se trataron como aquellos en los que siempre es posible hacer una conversión congruente (Duval, 2016, p. 74). Es decir, las representaciones se mostraron en correspondencia uno a uno (ver ilustración 8). Cuando la docente expresa “recuerden, 2 es la diferencia que hay entre un número o una figura y la otra; n es la posición; $+$ o $-$ podría ser lo que le voy a quitar o lo que le voy a aumentar para que me de mi sucesión, en este caso le aumenté 2. Y esa es la fórmula general”, el alumno piensa en la expresión $2n + 2$.

Ilustración 8. Ejemplo de conversión congruente de la expresión para calcular el enésimo término de la sucesión

Para obtener una expresión que me permita calcular cualquier término en una sucesión aritmética multiplico la **diferencia** por la **posición** y le **sumo** o le **resto** **lo que haga falta** para coincidan los términos

$$Dn \pm c$$

Fuente: elaboración propia a partir de las afirmaciones de la docente y la fórmula empleada para calcular la expresión general que define al enésimo término de una sucesión.

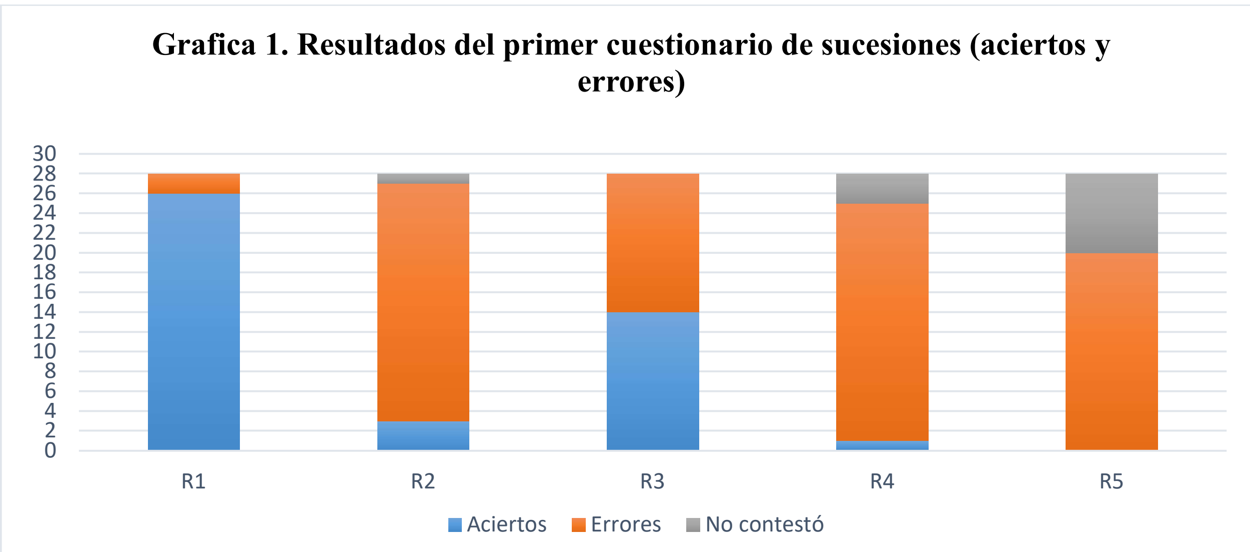
En este sentido, tal como lo plantea Duval (2016) “cuando, dentro de un registro fuente, se varía sistemáticamente una representación para convertirla en una representación en el registro de llegada, se puede observar una variación sistemática de desempeños” (p. 84). Es decir, en situaciones similares los alumnos pueden cometer errores distintos, como se menciona, parece que depende de la distancia cognitiva en los registros. Por ejemplo, puede haber más aciertos cuando el alumno tiene que generalizar una expresión que tiene similitud con los ejercicios que les planteó la docente. En contraste, la cantidad de errores puede aumentar cuando en la generalización de la expresión parecen tratarse situaciones ajenas.

Por lo anterior, al analizar el desarrollo de las clases y el trabajo de la docente, se proyecta que el alumno habrá de memorizar la expresión que le permite calcular el enésimo término de la sucesión. Sin embargo, es probable que en situaciones posteriores el mismo alumno olvide dicha fórmula, debido a que se establece poca conexión entre sus componentes y el significado que portan. Al existir variaciones en las representaciones, los alumnos enfrentarán dificultades para convertirlas de un registro a otro, puesto que se pierde la relación con el objeto denotado.

Finalmente, el trabajo de conversión en el aula fue promovido por la docente. Sin embargo, se trató de una conversión tipo codificación, el ejercicio planteado siempre da pistas al alumno y generalmente tiene una misma estructura. Aunque se utilizaron elementos gráficos de apoyo, no se promovió una conversión de representaciones distinta a la habitual; el ejercicio en determinado punto llegaba a la misma estructura. Esta situación está lejos de contribuir a combatir “la raíz del problema en el aprendizaje de las matemáticas: la capacidad de comprender y de hacer por sí mismo cualquier cambio de registro de representación” (Duval, 2016, p. 85).

4.2. PRIMER CUESTIONARIO DE SUCESIONES

En los resultados de la aplicación del primer cuestionario, se observó que muchos alumnos no tuvieron problema para identificar el patrón y obtener el enésimo término de una sucesión simple (reactivo 1). Sin embargo, en las demás situaciones, en las que los ejercicios diferían de los habituales, o eran problemas en los que se planteaban los principios de las sucesiones aritméticas y no la obtención directa o aplicación de una regla general (expresión algebraica), los alumnos contestaron de manera errónea en la mayoría de las ocasiones.



Fuente: elaboración propia a partir de los resultados (aciertos y errores) de la aplicación del primer cuestionario de sucesiones.

El objetivo del primer cuestionario, fue hacer un contraste entre la aplicación de un procedimiento mecánico, enseñado por la docente, y la aplicación de los principios de generalización de las sucesiones para resolver problemas. Con esta información, se obtuvo un acercamiento a la descripción de la forma en que los alumnos resuelven actividades que tienen que ver con sucesiones aritméticas. Es por ello, que se opta por un análisis por pregunta, donde cada situación plantea un reto diferente y da cuenta de estrategias que siguen los alumnos para su resolución. Para la siguiente lectura, se hace énfasis en la situación mencionada al finalizar el apartado 3.3.2, en el que se menciona que diferentes grados implican diferentes habilidades para cada reactivo. En general, el presente capítulo tiene una fuerte conexión con el anterior, por lo que es necesario remitirse al mismo para comprender ciertas cuestiones.

En los siguientes apartados del presente capítulo, se utilizan gráficas que representan el tipo de respuestas que los alumnos dan a diferentes cuestionamientos. Además de mostrar la cantidad de alumnos, las gráficas representan las operaciones mentales con las que se relaciona el tipo de respuesta o las transformaciones de las representaciones. Cabe destacar que, en las gráficas de la clasificación del tipo de respuestas, el objetivo no fue considerar si eran respuestas erróneas o acertadas, sino tratar de agrupar el tipo de respuestas que los alumnos daban a cada reactivo.

Con la finalidad de recordar dicha relación, se presenta a continuación una tabla con los colores asignados a cada operación mental y transformación. La justificación del vínculo con cada tipo de respuesta se encuentra en el capítulo anterior, por lo que, de considerarse necesario, deberá remitirse a dicho capítulo para cualquier aclaración.

Tabla 8. Colores asignados en las gráficas a las operaciones mentales y la transformación de representaciones

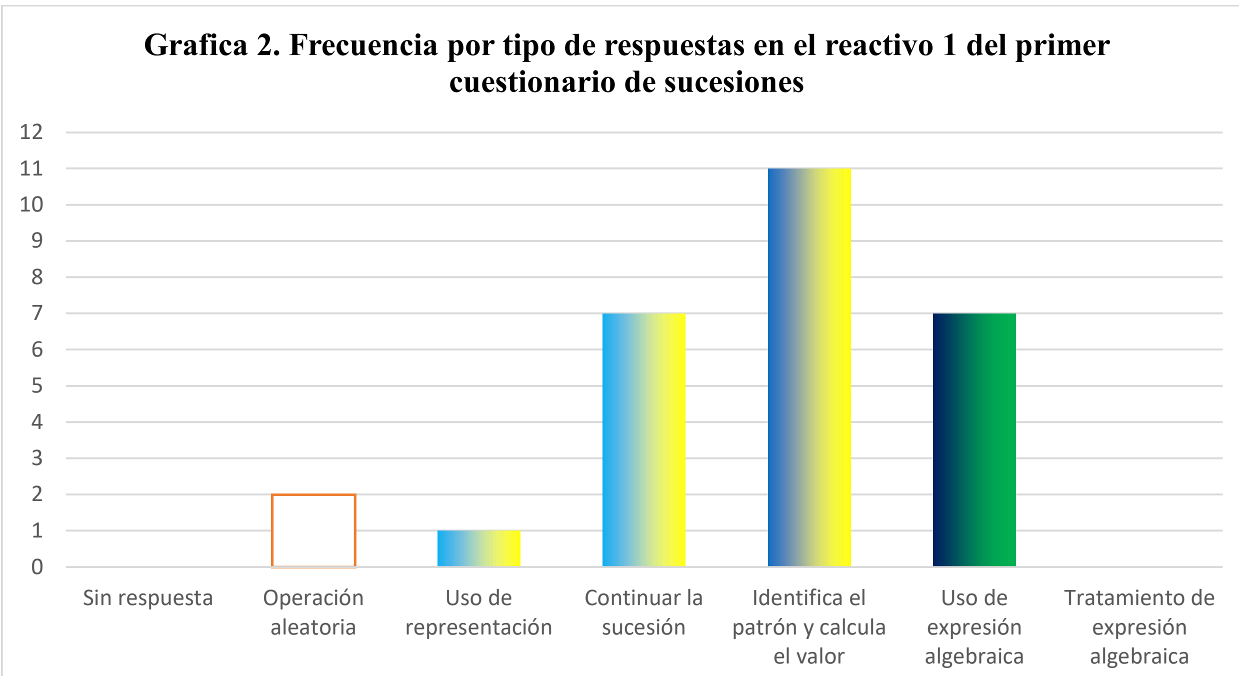
Habilidades relacionadas con las operaciones mentales (Sierpinska, 1990) y las transformaciones de las representaciones (Duval, 2016) relacionadas con la comprensión.				
Anna Sierpinska	Identificación	Discriminación	Generalización	Síntesis
Raymond Duval	Tratamiento		Conversión	

Fuente: elaboración propia a partir de la tabla 5 del presente documento.

4.2.1. Cuestionario 1 Reactivo 1

Al revisar la situación planteada en el primer reactivo, se identifica que es posible resolverlo de diferentes maneras, desde un dibujo hasta la obtención de una expresión algebraica. El supuesto es que los alumnos eran capaces de contestar utilizando una expresión algebraica. Sin embargo, la complejidad del reactivo no lo demanda así, por lo que muchos hicieron uso de estrategias menos elaboradas para dar respuesta. En su mayoría las respuestas fueron correctas.

En el primer reactivo, la mayoría de los alumnos logran identificar el patrón y a partir del mismo hacen cálculos para encontrar el valor de la posición 11, solicitada en el cuestionamiento. En este caso, el arreglo de pequeños círculos o "bolitas", ayuda a que los alumnos identifiquen el patrón y puedan utilizar una multiplicación para encontrar las bolitas necesarias para la figura en la 11ª posición. Algunos otros alumnos hacen uso de la representación para llegar a una respuesta, o continúan la sucesión de alguna forma (con la figura de bolitas o el número de bolitas de cada figura). Otros alumnos hacen uso de una expresión algebraica, la cual construyen a partir del patrón y la posición representada con una literal.



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 1 del primer cuestionario.

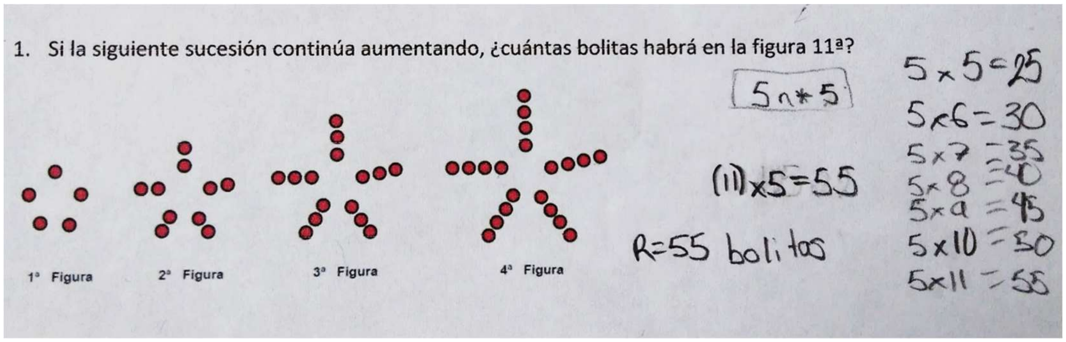
Relacionando con las operaciones mentales involucradas en la comprensión, la mayoría de los alumnos hacen la discriminación de términos subsecuentes, lo que no hacen aquellos alumnos que requieren continuar la sucesión para obtener el resultado. Es decir, hacen uso de un cálculo para evitar continuar término a término hasta encontrar la respuesta indicada. En relación con la transformación de las representaciones, la mayoría de los alumnos hacen tratamientos de representaciones, puesto que se mueven dentro de un mismo registro de representación: los números y las operaciones aritméticas. En este caso, no se considera que exista una transformación de representaciones, puesto que la configuración puntual (arreglo de bolitas en cada figura) no pertenece a un registro de representación en el que existan reglas para su ordenamiento.

El último tipo de respuestas, en la que los alumnos construyen una expresión algebraica a partir de los datos que obtienen la sucesión, es el tipo de respuestas que se buscan. La formulación y uso de expresiones algebraicas, son habilidades que se espera el alumno desarrolle en primer grado de secundaria (SEP, 2017b). En este caso, por la relativa sencillez del reactivo, es probable que los alumnos no hicieran uso de una expresión algebraica para resolver el planteamiento.

Lo simple del reactivo, se debe a que el primer término de la sucesión es igual a la diferencia de la sucesión. Es decir, al buscar cualquier término de la sucesión, se puede construir la expresión $a_n = 5 + (n-1)5$. Si se simplifica esta expresión, resulta $a_n = 5 + 5n - 5$ y en su mínima expresión sería $a_n = 5n$. La expresión que define al enésimo término en la sucesión del primer reactivo no tiene término independiente (viéndolo como una función). Incluso, en la forma que la docente utilizó para enseñar a los alumnos a obtener la expresión general de una sucesión ($Dn \pm c$, donde D es la diferencia, n es la posición y c es la constante), la expresión obtenida es simple $5n$; no hay una constante que agregar o restar para obtener la cantidad de bolitas en cada término de la sucesión. A pesar de eso, fueron 7 alumnos que escribieron dicha expresión algebraica y la utilizaron para calcular el 11° término de la sucesión.

El tipo de respuestas que fue más frecuente en el primer reactivo, es aquella en la que el alumno logra identificar el patrón que define la sucesión y a partir del mismo, hace un cálculo (generalmente una multiplicación) para obtener el valor. En el siguiente ejemplo (ilustración 9), se muestra una respuesta que pudiese haber sido clasificada como continuar la sucesión. Sin embargo, fue clasificada dentro del grado 4, debido a que el alumno hizo énfasis en la operación que lo lleva a la respuesta (multiplicación).

Ilustración 9. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*

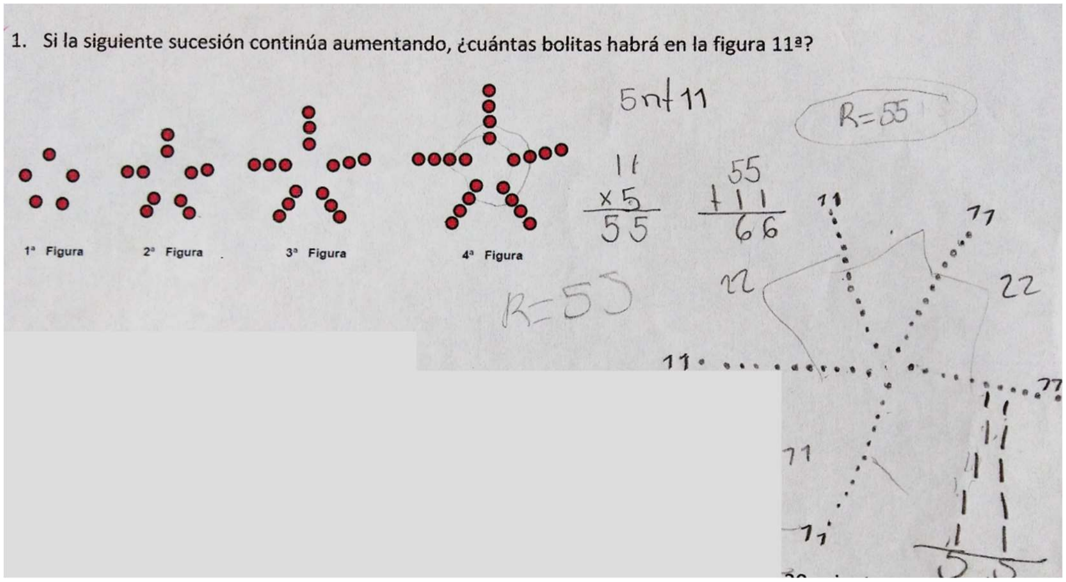


Fuente: respuesta de un alumno en el primer reactivo del primer cuestionario.

Las respuestas que se clasifican dentro del grado 4 (identifica el patrón y calcula el valor), son muy similares a las que se muestra en la imagen. Estas respuestas están vinculadas con el uso de una expresión algebraica, puesto que se hacen operaciones equivalentes, a pesar de que no han construido la misma. Se considera que aquellos alumnos que hacen uso de estas operaciones, están muy cercanos a lograr construir expresiones generales que definen al enésimo término de la sucesión. Sin embargo, en la misma imagen es posible notar el intento del alumno por construir una expresión algebraica, a partir de la información presente en el mismo reactivo.

La construcción de una expresión algebraica utilizando los datos del problema, a pesar de que esta no se relaciona con la sucesión, también se presenta en el siguiente ejemplo (ilustración 10). El alumno que da la respuesta del ejemplo que se menciona, utiliza la diferencia (5) y la posición deseada (11) para escribir la expresión algebraica, en lugar de utilizar únicamente la diferencia. De haber seguido la recomendación de la docente, pudo llegar a la expresión algebraicas que es correcta.

Ilustración 10. Ejemplo del tipo de respuesta *continúa la sucesión*

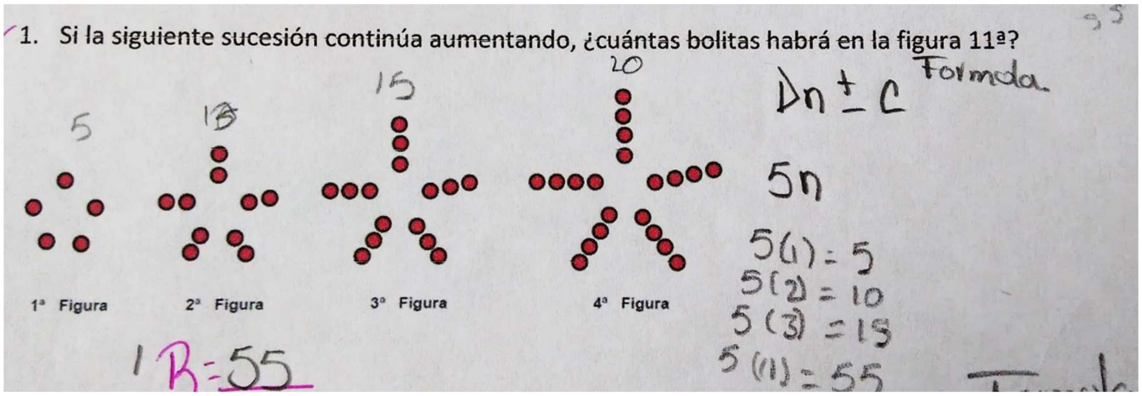


Fuente: respuesta de un alumno en el primer reactivo del primer cuestionario.

El ejemplo que se muestra en la ilustración 10 corresponde al tipo de respuesta de continuar la sucesión. Es notorio que el alumno usa la representación, pero destaca que lo hace para continuar la figura hasta la onceava posición y posteriormente obtiene las bolitas por cada "brazo" de la figura. Como estrategia, el alumno utilizó una operación multiplicativa para obtener el resultado. A pesar de que es un procedimiento laborioso, prefirió hacer la figura término a término hasta obtener los puntos de la 11° figura para asegurarse de que el resultado es correcto.

En contraste, una estrategia efectiva es la formulación y uso de una expresión algebraica. En la ilustración 11, se muestra un ejemplo en el que la alumna hace un conteo de bolitas por figura, de esta manera descubre el patrón y lo utiliza para construir la expresión algebraica. Posteriormente comprueba la expresión que construyó con las primeras tres posiciones, finalmente calcula con la onceava posición para obtener la respuesta al reactivo. Es notorio que la alumna utilizó la fórmula que les propuso la docente, para obtener la expresión que les permite encontrar el enésimo término de una sucesión.

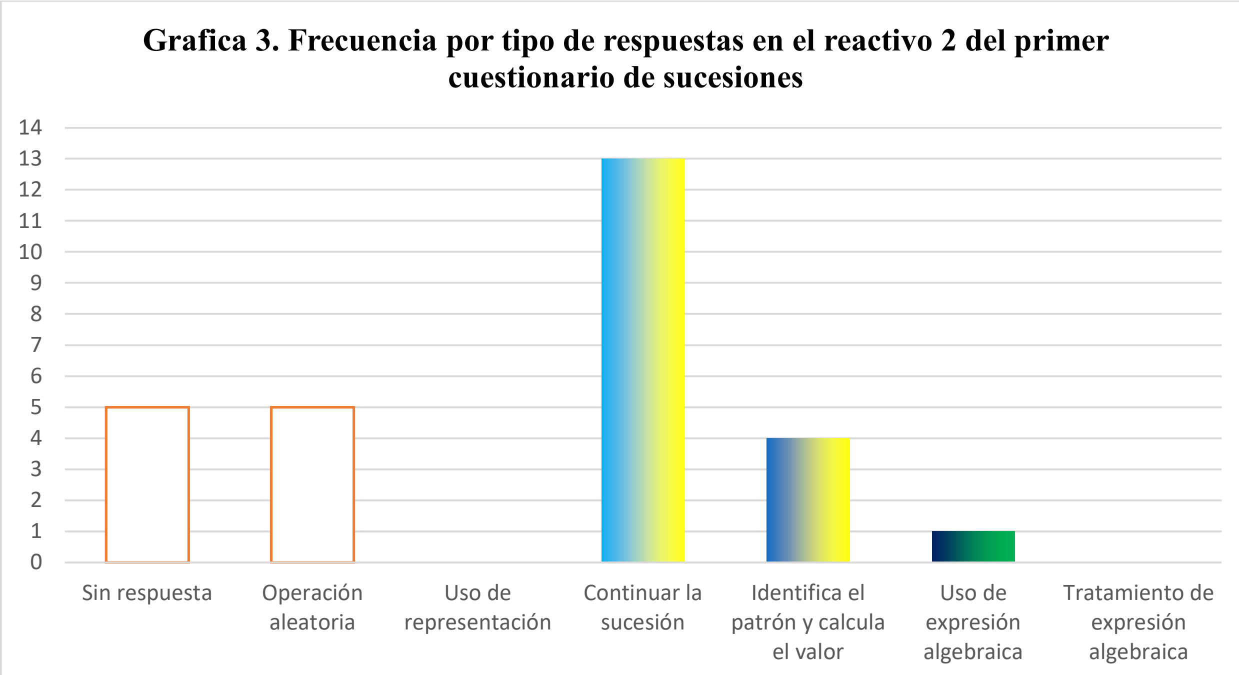
Ilustración 11. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de expresión algebraica*



Fuente: respuesta de un alumno en el primer reactivo del primer cuestionario.

4.2.2. Cuestionario 1 Reactivo 2

En el segundo reactivo del primer cuestionario, la mayoría de los alumnos continúan la sucesión como estrategia para resolver el planteamiento. De ellos, gran parte lo hace apenas unas posiciones después del último término escrito. También, lo hacen considerando que el último término escrito está en la posición número ocho y faltan únicamente 17 posiciones. Otros cuantos alumnos, calculan el valor a partir de identificar que la sucesión aumenta cuatro por posición. Únicamente es una alumna, la que construye una expresión algebraica y la utiliza para dar una respuesta. En contraste con el primer reactivo, hay más alumnos que no contestan o hacen operaciones con los datos del problema. En esta última situación, las operaciones no evidencian relación lógica con el cuestionamiento.



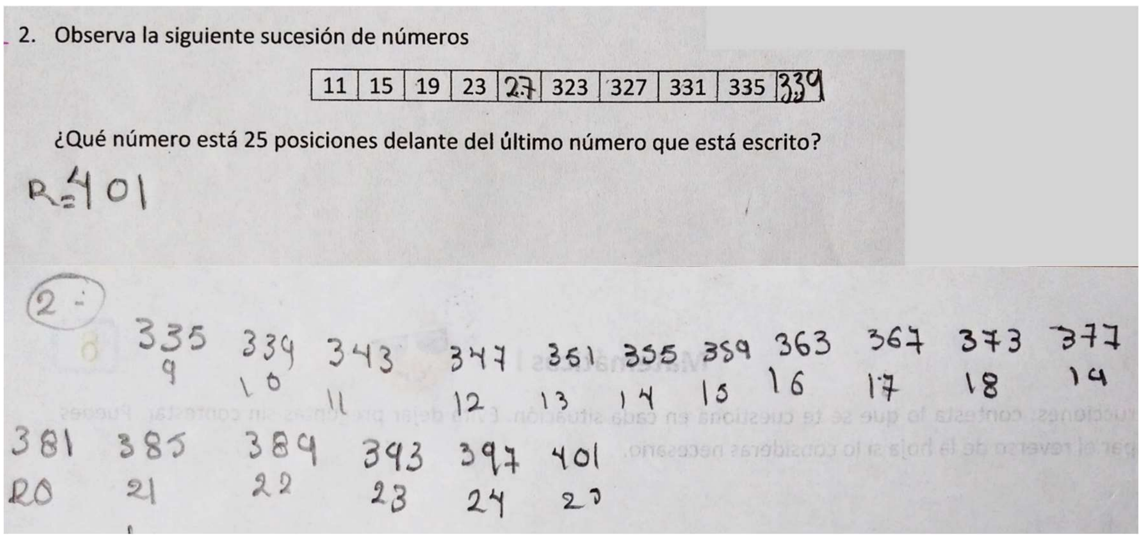
Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 2 del primer cuestionario.

A diferencia con el gráfico del cuestionamiento 1, es posible ver que la mayoría de las respuestas de los alumnos se relacionan con la identificación, de las operaciones mentales involucradas en la comprensión. Por otro lado, al igual que en la pregunta 1 del cuestionario 1, la mayoría de las respuestas se relacionan con el tratamiento, hablando de la transformación de representaciones. Son pocos los alumnos que se encuentran en un nivel de discriminación, evidenciándose esto, cuando van directamente al elemento indicado en el reactivo a través de cálculos, principalmente una multiplicación y una adición.

El reactivo en cuestión, estuvo diseñado para identificar las estrategias de los alumnos, cuando se encuentran con una sucesión incompleta. Es decir, una sucesión que se corta en un punto y continúa varias posiciones delante. Eso explica, en cierta medida, que varios de los alumnos tuvieran complicaciones en la lectura de la sucesión y decidieran continuarla como estrategia de resolución.

A pesar de que muchos alumnos escribieron 339 como respuesta, pues entendieron que debían anotar el número que continuaba, existen estrategias dentro de la misma clasificación (continuar la sucesión) que destacan de otras respuestas. Por ejemplo, la respuesta que se muestra en la ilustración 12. En este caso, la alumna había anotado en un principio los números 27 y 339 en los espacios que tienen los puntos suspensivos (los cuales corresponden a las posiciones 5 y 79 respectivamente). La estrategia que decidió hacer a continuación, fue tomar el 335 como la novena posición; a partir de ahí continuó término a término hasta hallar el número que, en su lógica, se encuentra en la posición 25. A pesar de cometer un error de la posición 17 a la 18, la alumna llegó al 401 como respuesta. De no ser por la interpretación del enunciado y el error en la secuencia, la alumna habría llegado al 435 que era la respuesta esperada.

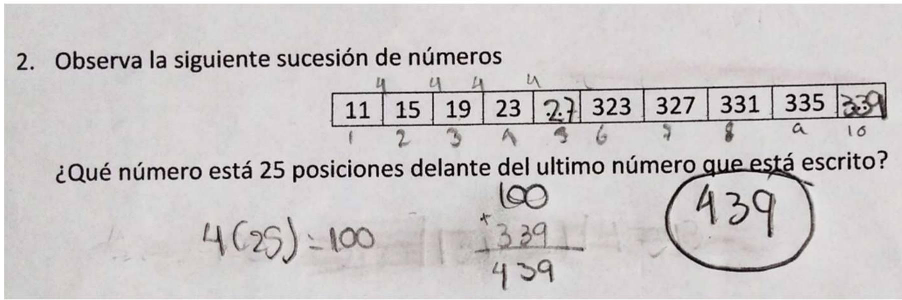
Ilustración 12. Ejemplo del tipo de respuesta *continuar la sucesión*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 2 del primer cuestionario.

Por otro lado, 4 de los 28 alumnos tienen respuestas que se clasifican dentro del tipo identifica el patrón y calcula el valor. En este tipo de respuestas, los alumnos anotan entre cada término de la sucesión la diferencia que es 4 o +4. A partir de ese dato, utilizan una multiplicación para saber la cantidad que aumenta después del número que está escrito en la última posición; obtienen como resultado 100 y lo agregan al 335 para obtener 435 que es la respuesta correcta. En algunos casos, como el que se muestra en el ejemplo de la ilustración 13, los alumnos anotan el número que continúa la serie (339) y con ese número aplican el mismo algoritmo para dar una respuesta. En este ejemplo, es posible observar también que el alumno inició con una estrategia similar a la que está en la ilustración 12 (considerar al 335 como la novena posición y buscar el valor que está en la posición 25), sin embargo, esta estrategia no se continuó.

Ilustración 13. Ejemplo del tipo de respuesta *identificar el patrón y calcular el valor*



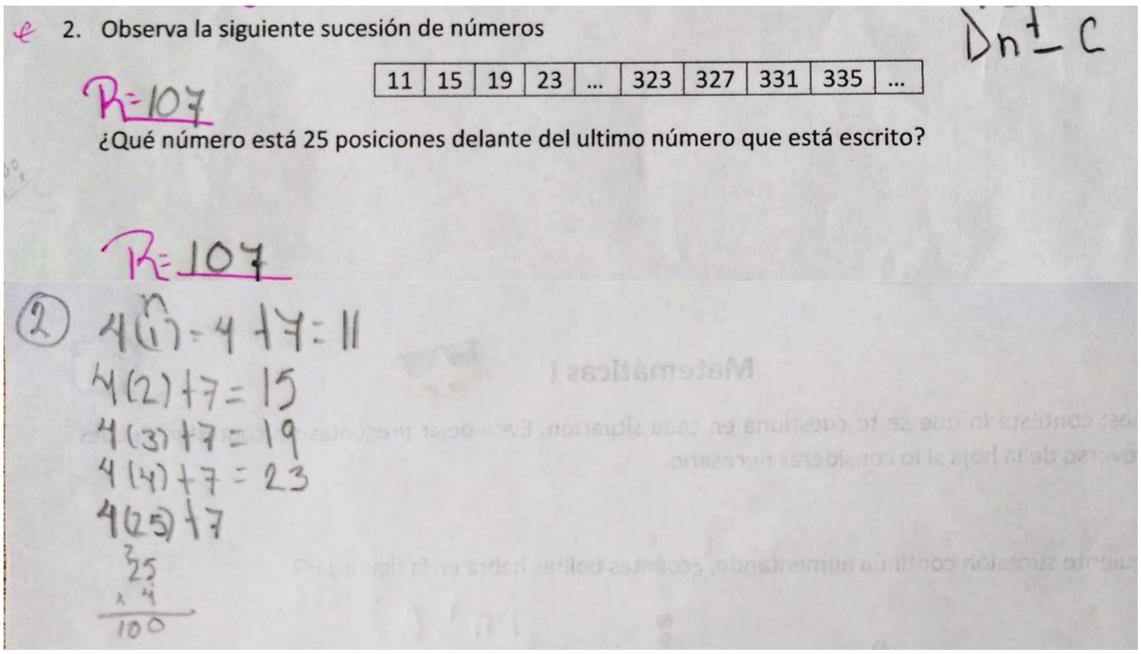
Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 2 del primer cuestionario.

Aunado a lo anterior, se evidencia que en estrategias como las del ejemplo de la ilustración 13, se desarrolla un algoritmo similar al uso de una ecuación o expresión algebraica. Dicha estrategia, es similar a la forma que la docente enseñó a los alumnos: multiplicar la diferencia por la posición y agregar un valor denominado constante; esto se resume en la expresión enseñada $Dn \pm c$. Para el ejemplo mostrado, los datos son los siguientes: diferencia 4, posición 25 y constante 339. En ese caso, a pesar de que los alumnos no son conscientes de ello, toman 339 como la posición 0 y a partir de ahí, aplican los cálculos que harían si hubiesen construido la fórmula $4n + 339$.

En el siguiente tipo de respuesta (ver ilustración 14), la alumna aplicó una estrategia similar, pero haciendo uso de una expresión que formuló. El proceso seguido fue encontrar la diferencia (4), multiplicarla por una posición buscada (1) y agregar o quitar lo que falta para que el resultado coincida (+7). En sus propias palabras, la alumna afirma que así fue como les enseñó la maestra a “sacar la fórmula”. Después de comprobar que su fórmula cumplía con los valores de las primeras cuatro posiciones, decidió buscar el valor de la posición 25. En este caso, la alumna no se percató de que el enunciado preguntaba por el número que está 25 posiciones delante del último número escrito y no por el número de la posición 25 de la sucesión.

Resolver el planteamiento haciendo uso de una ecuación habría implicado, además de la formulación de dicha ecuación, el tratamiento de la misma. En ese caso, la respuesta de la alumna habría sido clasificada en el grado 6, lo cual implicaría la operación mental de síntesis (el nivel más alto) y la conversión de representaciones. La estrategia pudo haber sido igualar su expresión con el valor 335 para saber su posición $4n + 7 = 335; n = 82$ y a partir de ahí calcular el valor que está 25 posiciones delante (107). Sin embargo, lo complicado del procedimiento y del enunciado mismo, condujeron a la alumna a la respuesta que mostró.

Ilustración 14. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de expresión algebraica*



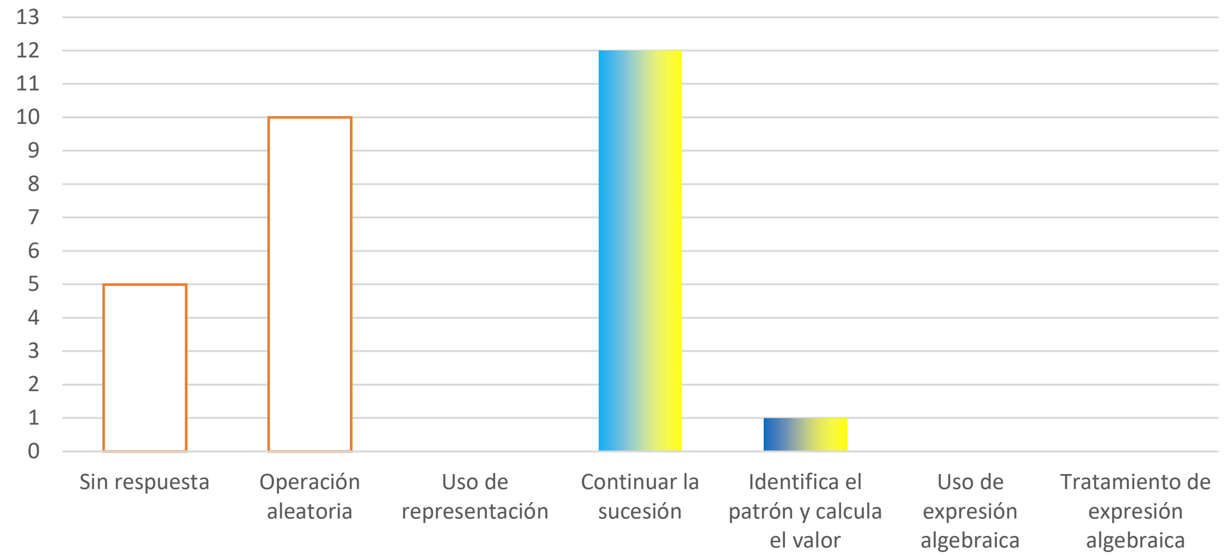
Fuente: respuestas de un alumno en el reactivo 2 del primer cuestionario.

4.2.3. Cuestionario 1 Reactivo 3

El reactivo 3, es el primero de los dos reactivos que consta de un enunciado verbal. Este tipo de reactivos evidencian el objetivo general del instrumento: saber cómo los alumnos aplican los principios de las sucesiones a un problema con un contexto diferente a los ejercicios trabajados en clase. Es importante recordar que la mayoría de los ejercicios que los alumnos revisaron en clase tenían la siguiente estructura: sucesión propuesta (números o figuras), uno o dos cuestionamientos de términos cercanos, cuestionamiento de la fórmula para calcular cualquier término de la sucesión, cuestionamiento de un término remoto (para que el alumno utilice la fórmula).

En el caso del tercer reactivo del cuestionario, es notorio que una mayor cantidad de alumnos no dieron respuesta o dieron una respuesta sin relación lógica aparente con el problema (ver gráfica 4). Prácticamente, el resto de los alumnos construyeron una sucesión y la continuaron para llegar a una respuesta. Únicamente un alumno formuló una expresión algebraica y la utilizó para calcular la respuesta a los cuestionamientos de la situación.

Grafica 4. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 3 del primer cuestionario de sucesiones



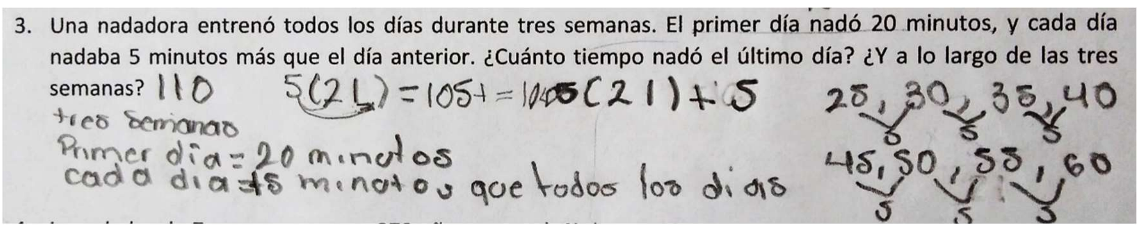
Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 3 del primer cuestionario.

Al igual que en la gráfica del reactivo 2 del cuestionario 1, se evidencia el predominio del color azul, asignado a la operación mental de identificación, así como el amarillo, asignado al tratamiento de las representaciones. Es decir, las respuestas de los alumnos se clasifican dentro de los primeros niveles de comprensión. El nivel de identificación, se evidencia cuando los alumnos logran escribir la sucesión de los tiempos correspondientes a los 21 días de las tres semanas; aquellos que logran hacerlo, han identificado la situación como una sucesión aritmética. Por otra parte, esas mismas respuestas se clasifican en la transformación de las representaciones como tratamiento, puesto que únicamente movilizan las representaciones dentro del sistema de numeración decimal.

Pudiera pensarse por un momento, que el alumno está haciendo una conversión de representaciones, debido a que resuelve numéricamente un problema que está planteado en un enunciado verbal. Sin embargo, lo único que hace el alumno es tomar un dato numérico del enunciado y seguir la regla que indica el mismo; no se trata siquiera de una codificación. Incluso, en ese caso, la conversión se trata de una actividad más compleja que una codificación (Duval, 2006, p. 150).

Sucede lo mismo con aquellos alumnos que identifican el patrón y calculan el valor, puesto que se mueven dentro del mismo registro de representación. Sin embargo, a diferencia de aquellos que continúan la sucesión, se reconoce que calcular el valor se relaciona con la operación mental de discriminación. La razón es porque el alumno reconoce que, a pesar de tratarse de una sucesión, no se busca un término inmediato, por lo que es más practico hallarlo a través de una multiplicación y una adición. Esta situación se puede observar en la ilustración 15.

Ilustración 15. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*

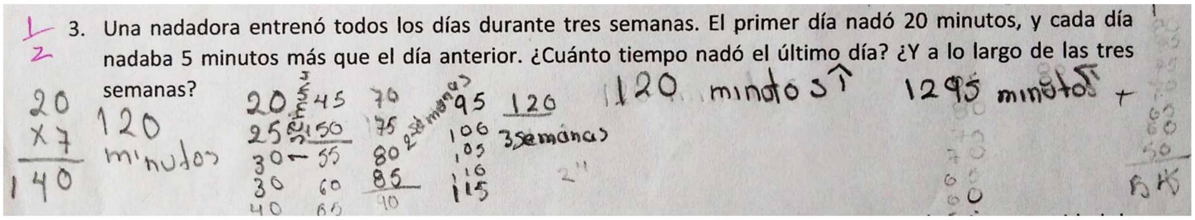

3. Una nadadora entrenó todos los días durante tres semanas. El primer día nadó 20 minutos, y cada día nadaba 5 minutos más que el día anterior. ¿Cuánto tiempo nadó el último día? ¿Y a lo largo de las tres semanas? 110 5(21)=105+=1005(21)+5 25, 30, 35, 40
tres semanas
Primer día=20 minutos
cada día 15 minutos que todos los días 45, 50, 55, 60

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 3 del primer cuestionario.

En este caso, se puede observar que el alumno obtiene el patrón y lo utiliza para calcular el valor correspondiente a los 21 días. Para hallar el patrón, el alumno considera necesario anotar los primeros ocho términos. A pesar de cometer un error al utilizar 5 como constante y no 15, se sigue un proceso similar al uso de una ecuación.

Por otra parte, las respuestas de los alumnos que continúan la sucesión, están bien ejemplificadas en la ilustración 16. En ese ejemplo, se puede observar que la alumna anota toda la sucesión de tiempos, desde el 20 hasta el 120 y los segmenta por semanas. Esta sucesión, le permite contestar que la nadadora hace 120 minutos de nado el último día. Al mismo tiempo, la suma de los valores le permite obtener la respuesta del tiempo de nado, correspondiente a las tres semanas; aunque cometió un error en la escritura de la sucesión y, en consecuencia, en la adición. Esta estrategia, pudo clasificarse en la respuesta del tipo identifica el patrón y calcula el valor. Además, en esa respuesta sobresale el hecho de la escritura de la sucesión finita utilizada.

Ilustración 16. Ejemplo del tipo de respuesta *continuar la sucesión*

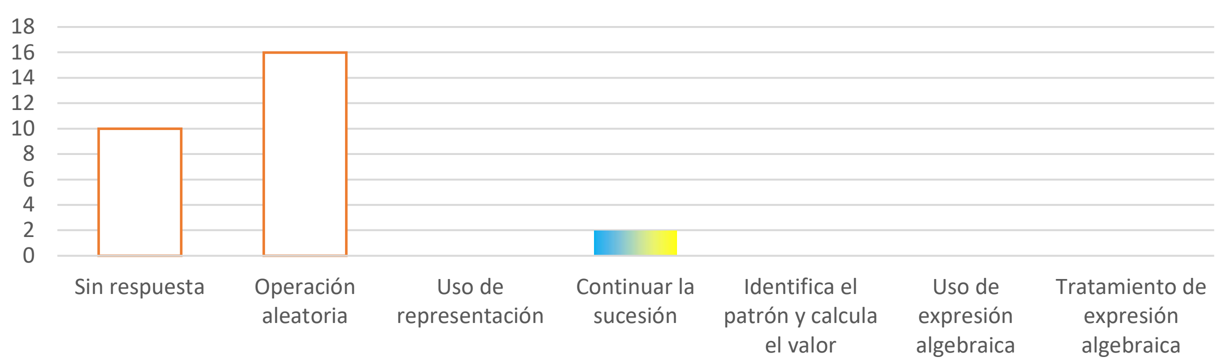


Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 3 del primer cuestionario.

4.2.4. Cuestionario 1 Reactivo 4

Los resultados de los alumnos en el reactivo 3, son totalmente contrastantes con resultados del reactivo 1. En este caso, únicamente dos alumnos dieron una respuesta que se puede clasificar dentro de las operaciones mentales relacionadas con la comprensión, así como con las transformaciones de las representaciones. Las dos respuestas son del tipo continuar la sucesión, considerada en el grado 3. La mayoría de las respuestas de los alumnos son números que no aparentan relación lógica con el problema, no tienen justificación por escrito ni a través de operaciones. En otro caso los alumnos no contestaron (ver gráfica 5).

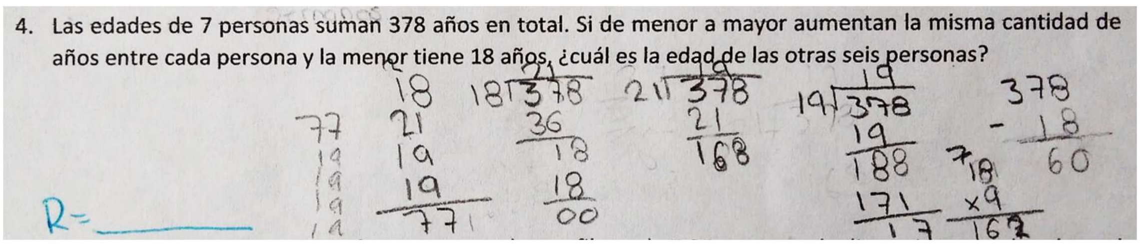
Grafica 5. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 4 del primer cuestionario de sucesiones



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 4 del primer cuestionario.

Al igual que el reactivo anterior, el cuestionamiento número 4 se constituyó por un enunciado verbal, para observar la aplicación de los principios de las sucesiones. La mayoría de las respuestas clasificadas como operación aleatoria, son respuestas fallidas de la estrategia de ensayo y error. Es decir, a partir de los datos del problema, los alumnos hacen operaciones para tratar de encontrar respuestas que satisfagan las condiciones del problema. Sin embargo, este tipo de respuestas son poco sistemáticas, por lo que se denominan aleatorias (ver ilustración 17).

Ilustración 17. Ejemplo del tipo de respuesta *operación aleatoria*

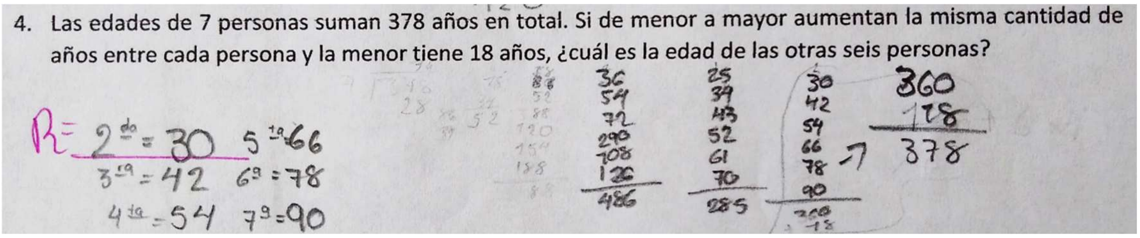


Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 4 del primer cuestionario.

En este ejemplo, el alumno aplicó un procedimiento iterado. Dicho procedimiento, consiste en dividir la cantidad total de años sumados entre la edad del menor, el cociente entero se convierte en divisor del total de años y se repite el ciclo una vez más. Otras operaciones se incluyen en el intento por encontrar una respuesta lógica, una resta y una adición, pero ninguna de ellas da indicio de ir por el camino correcto. De hecho, el alumno no da una respuesta definitiva, dejando sus operaciones abiertas, inconclusas.

Por otro lado, las respuestas que utilizan la estrategia de continuar la sucesión por ensayo y error para dar solución, pueden ser de dos tipos: probando conjuntos de valores (ver ilustración 18) o basadas en la búsqueda de un patrón (ver ilustración 19). En el primer caso, la alumna toma un primer número, aparentemente aleatorio, suma un valor constante en cada ocasión y finalmente suma los números obtenidos. Si el valor coincide con los 378 años que suman las edades de las 7 personas, el resultado será correcto. La alumna se percata que debe agregar también los 18 años de la menor de las personas, en ese intento el resultado coincide y escribe su respuesta.

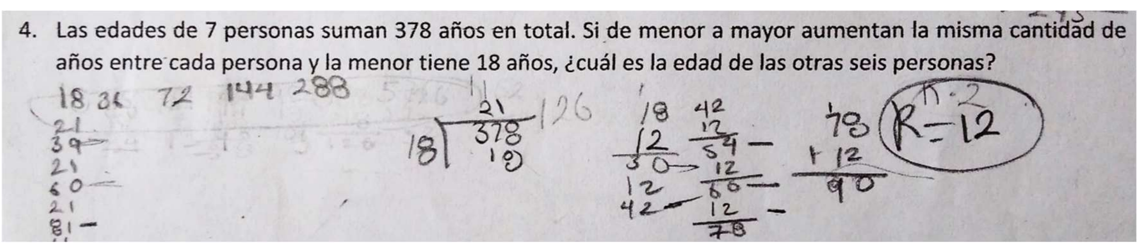
Ilustración 18. Ejemplo del tipo de respuesta *continuar la sucesión*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 4 del primer cuestionario.

En el caso de la búsqueda de un patrón por ensayo y error (ilustración 19), el alumno comienza por dividir el total de años entre la edad del menor. El resultado del cociente lo resta con la edad del menor, obtiene el número 3 como patrón y construye una sucesión. En esa primera sucesión formada, no encuentra la suma buscada (378) y decide probar duplicando el valor. En esta segunda estrategia, tampoco encuentra la suma del total de años. Finalmente, toma el número 12 como patrón y lo usa para hallar los valores que lo llevan a la suma del total de años. A pesar de descubrir el patrón y obtener la suma de los 378 años, no toma en cuenta el cuestionamiento del reactivo y da como respuesta el número 12.

Ilustración 19. Ejemplo del tipo de respuesta *continuar la sucesión*



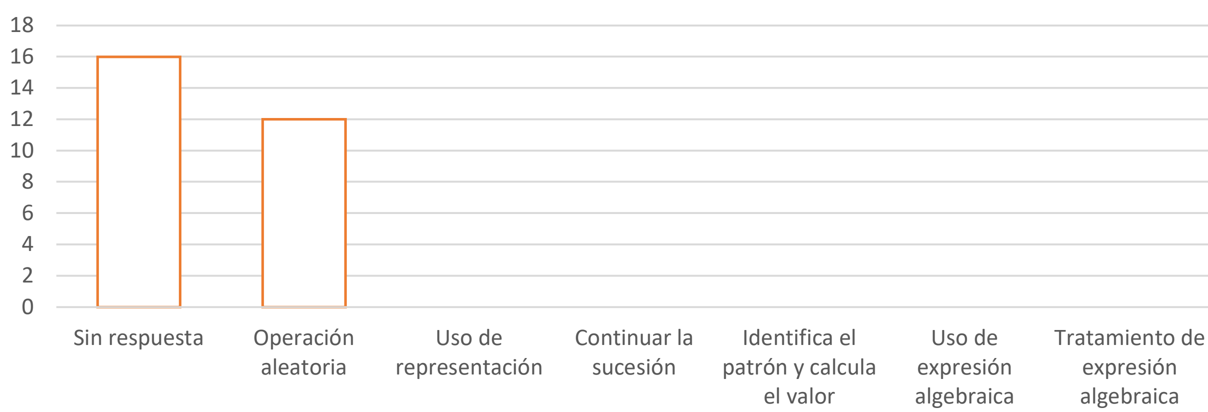
Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 4 del primer cuestionario.

4.2.5. Cuestionario 1 Reactivo 5

Los resultados de la última pregunta del primer cuestionario aplicado, son abrumadores. Ninguna respuesta alcanzó el grado 2 o superior. Es decir, no existe en las respuestas ninguna que pueda clasificarse en las operaciones mentales de la comprensión y la transformación de representaciones. En contraste con el primer cuestionamiento, donde únicamente dos alumnos dieron una respuesta considerada aleatoria, en este último reactivo hubo 16 cuestionamientos faltos de respuesta (o que anotaron un número sin justificación o lógica aparente) y 12 que contestaron con una operación aleatoria (ver gráfica 6).

Al revisar las respuestas de los alumnos, o al ver el hecho de que no hayan contestado en absoluto, puede considerarse que el tiempo fue un factor que influyó. Sin embargo, en el momento de la aplicación del cuestionario, la mayor parte de alumnos terminaron antes del tiempo destinado. Algunos otros permanecieron con el cuestionario largo tiempo, sin hacer anotaciones u operaciones, únicamente esperaron a que se les diera la indicación de devolverlo. Por este motivo, se descarta la falta de tiempo como factor que llevó al tipo de respuestas del último reactivo.

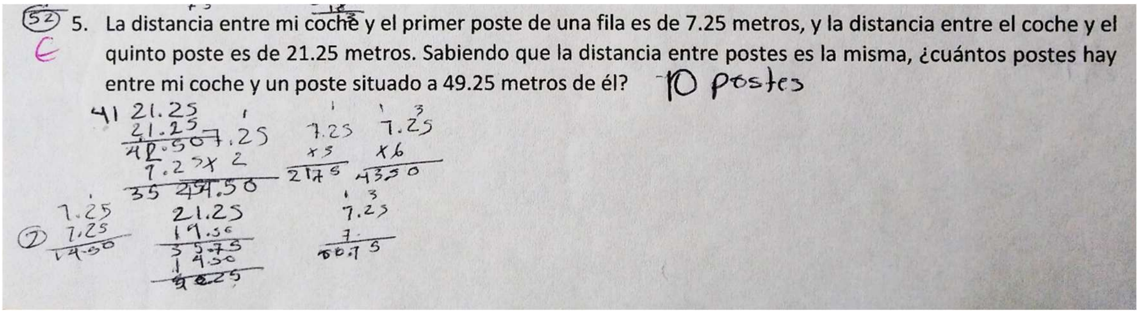
Grafica 6. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 5 del primer cuestionario de sucesiones



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 5 del primer cuestionario.

La complejidad del reactivo, es otro factor que pudo haber influido en el tipo de respuestas. En el momento de la aplicación se escuchó decir a un alumno "este con decimales está difícil". Probablemente, al ver las cantidades decimales, algunos alumnos entraron en conflicto. La redacción del cuestionamiento tampoco se considera un factor determinante, a pesar de ello 2 alumnos dieron una respuesta en metros y un alumno dio su respuesta en kilómetros. Únicamente, 7 alumnos anotaron la palabra "postes" al número que dieron como respuesta. El número que en varias respuestas se anotó como resultado, se obtuvo a partir de operar (sumar, multiplicar o dividir) los datos del problema. Incluso en ese tipo de respuestas, el número que anotan como resultado no parece venir de las operaciones que hicieron (ver ilustración 20).

Ilustración 20. Ejemplo del tipo de respuesta *operación aleatoria*

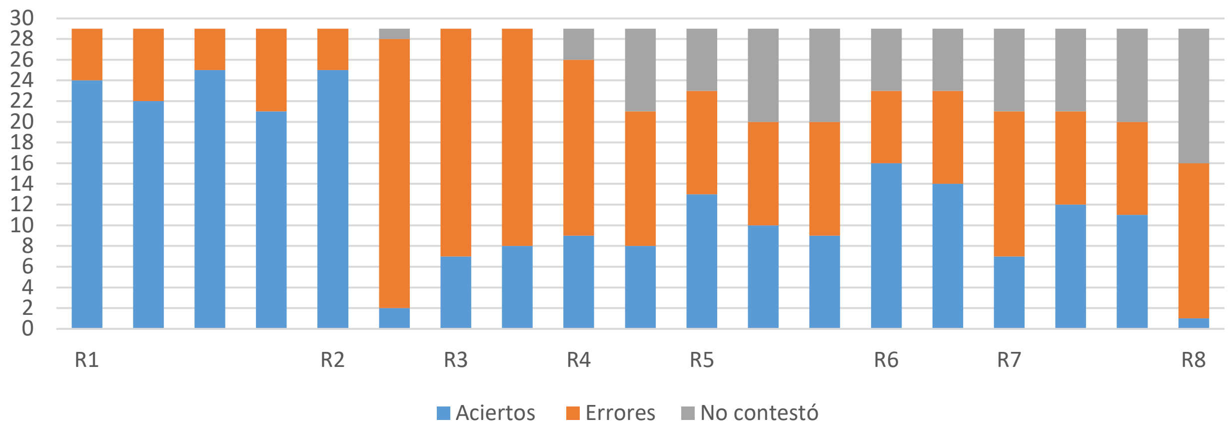


Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 5 del primer cuestionario.

4.3. SEGUNDO CUESTIONARIO DE SUCESIONES

El objetivo del segundo cuestionario, fue tener un acercamiento a las habilidades y el tipo de representaciones que se usan para resolver situaciones que implican sucesiones aritméticas. Además, se buscó identificar cuáles de esas habilidades presentaban un mayor reto para los alumnos. La dificultad de los reactivos fue gradual y coincidió con los aprendizajes esperados de primaria y secundaria, los cuales también son graduales. Ante este escenario, el resultado esperado era que los primeros reactivos tuvieran el total o la mayor parte de las respuestas correctas y estas redujeran conforme se avanza de grado escolar. Sin embargo, la tendencia se vuelve un tanto homogénea, a partir del reactivo correspondiente a tercer grado de primaria.

Grafica 7. Resultados del segundo cuestionario de sucesiones (aciertos y errores)



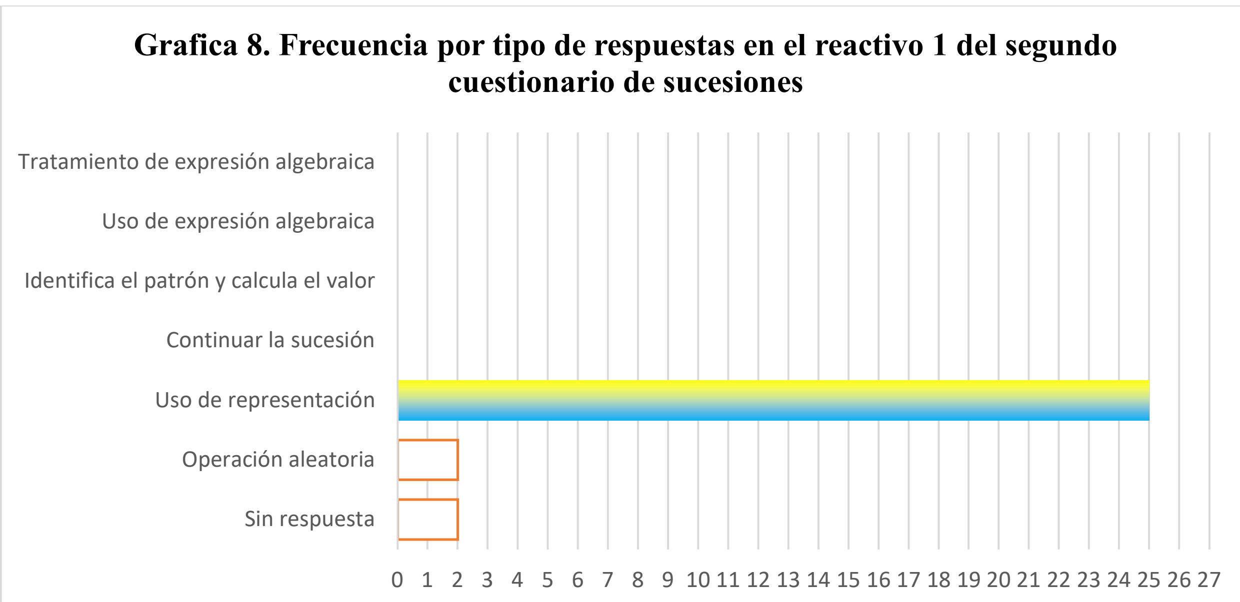
Fuente: elaboración propia a partir de los resultados (aciertos y errores) de la aplicación del segundo cuestionario.

A pesar de que los reactivos coinciden con los aprendizajes esperados de cada uno de los grados de primaria, se procuró que tuvieran un nivel acorde con el primer grado de secundaria. Esto es una posible razón, de que la tendencia de las barras de color azul en la gráfica no sea de alta a baja. Es decir, aunque los primeros reactivos, que devienen de los aprendizajes esperados de primaria, eran más sencillos, se buscó darles el nivel de complejidad para alumnos de secundaria.

4.3.1. Cuestionario 2 Reactivo 1

El primer reactivo del segundo cuestionario, es el planteamiento más simple, consiste en hacer la descomposición en sumandos de un número. A la hora de formular el reactivo, se esperaba que los alumnos escogieran los números que pudieran descomponerse en la menor cantidad de sumandos. Por ejemplo, $22 = 11 + 11$, en lugar de descomponerlo como $22 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (ver ilustración 21). Sin embargo, esta tendencia no fue observable en las respuestas de los alumnos. La mayoría eligió números pares o terminados en 5 para descomponerlo en 2 o 5 como sumando.

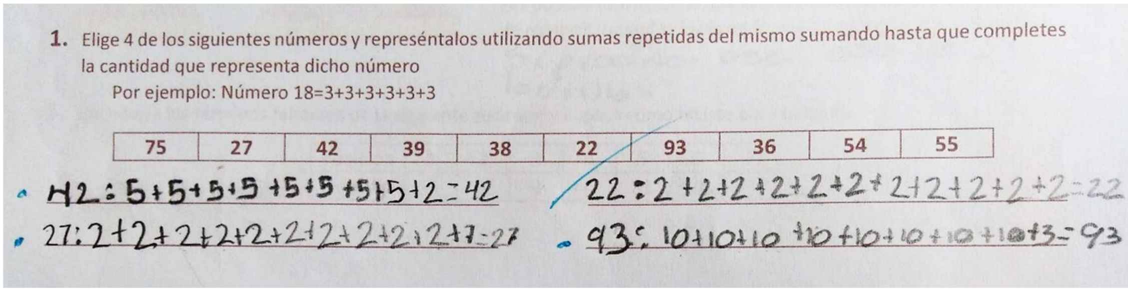
La estrategia predominante en las respuestas al primer reactivo, es el uso de la representación (ver gráfica 8). Considerando los grados que se establecieron, no pudo ser distinto el tipo de respuesta. Los alumnos utilizan las mismas representaciones (números) del reactivo y los expresan de una forma distinta dentro del mismo registro de representación. Por ese mismo motivo, la barra se colorea de amarillo, puesto que corresponde con el tratamiento de las representaciones. A su vez, también corresponde con la identificación, de las operaciones mentales relacionadas con la comprensión. Esto se debe a que, tal como lo especifica el objetivo del reactivo, se considera la descomposición de los números como una actividad relacionada con la identificación del patrón de una sucesión.



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 1 del segundo cuestionario.

En ese mismo reactivo, los dos alumnos que cometieron errores fue por no seguir las instrucciones. Es decir, en lugar de ocupar un único sumando, escribieron un sumando varias veces, de modo tal que la suma se acercara al número elegido y finalmente agregaron lo que faltaba, aunque no fuera el mismo sumando (ver ilustración 21). Aquellos que tuvieron respuestas clasificadas en el grado 2 (uso de representación), siguieron la instrucción correctamente. Las respuestas que fueron clasificadas en el grado 0, son aquellas en las que utilizaron números diversos, cuya suma no coincidía con el número seleccionado.

Ilustración 21. Ejemplo del tipo de respuesta *operación aleatoria*


1. Elige 4 de los siguientes números y represéntalos utilizando sumas repetidas del mismo sumando hasta que completes la cantidad que representa dicho número

Por ejemplo: Número 18=3+3+3+3+3+3

75	27	42	39	38	22	93	36	54	55

42: 5+5+5+5+5+5+5+5+2=42

22: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=22

27: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+7=27

93: 10+10+10+10+10+10+10+10+3=93

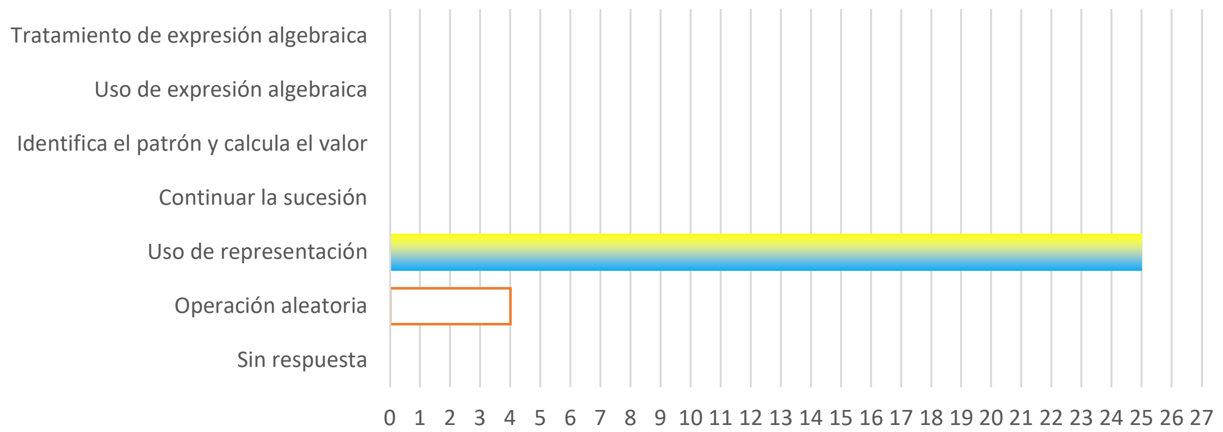
Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 1 del segundo cuestionario.

4.3.2. Cuestionario 2 Reactivo 2

En el segundo reactivo, la situación planteada fue distinta, en ese caso se trataba de identificar dos patrones en cada caso: color y forma. Se reconoce que el patrón de forma, buscado en la segunda sucesión, era más difícil de hallar. Por tal motivo, los resultados del reactivo (correcto – incorrecto) se reflejan de mejor manera en la primera barra de la gráfica 7, mostrada al inicio del apartado. En varios casos, fue posible observar que algunos alumnos solamente tomaron en cuenta uno de los patrones, principalmente el de forma y omitieron el color.

Al igual que en el reactivo anterior, en este caso las estrategias se clasifican dentro del grado 2, uso de representación (ver gráfica 9). A pesar de que pudieron clasificarse dentro de la identificación del patrón (grado 4), no se hizo así debido a que no se requiere cálculo de algún valor. En este caso, la identificación del patrón se reconoce con el color amarillo de la barra. Las respuestas de los alumnos se relacionan con la identificación, como operación mental de la comprensión. Del mismo modo, se relacionan con la primera transformación de representaciones, el tratamiento. Esto se evidencia en una sucesión en la que, a pesar de no existir una reconfiguración visual, se requieren habilidades de visualización (Duval, 2016).

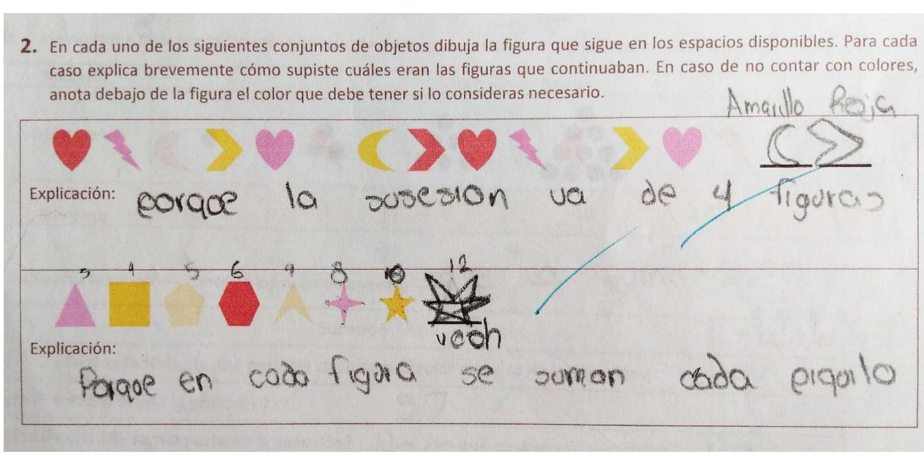
Grafica 9. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 2 del segundo cuestionario de sucesiones



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 2 del segundo cuestionario.

Las respuestas de los alumnos que se clasificaron como operación aleatoria, son aquellas en las que se da una respuesta que parece no tener lógica con la secuencia. Es decir, aquellos que únicamente dibujan dos figuras de la sucesión, pero que en ocasiones ni siquiera entre ellas son sucesivas. De las respuestas, únicamente un alumno logró identificar ambos patrones en cada una de las sucesiones de figuras y con ellos dio una respuesta satisfactoria (ver ilustración 22). En ese caso, el alumno contó los vértices (picos) de cada polígono, formó una sucesión y dibujó un polígono similar que coincidiera en el número de vértices, con el número que continuaba la sucesión.

Ilustración 22. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de representación*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 2 del segundo cuestionario.

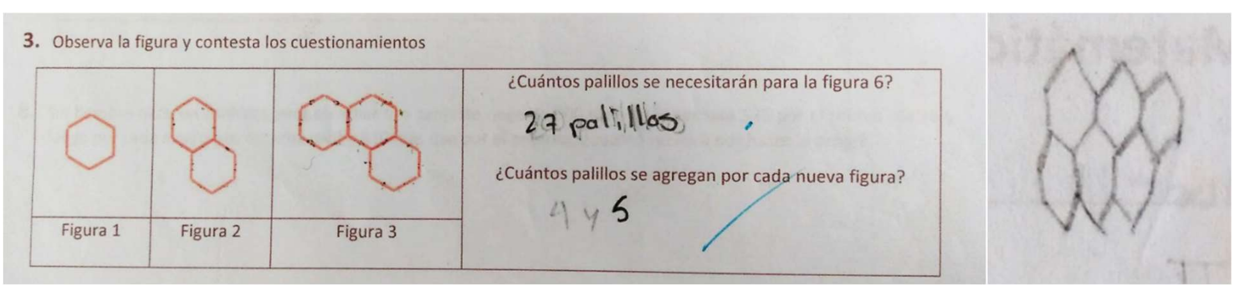
4.3.3. Cuestionario 2 Reactivo 3

El tercer reactivo del instrumento tiene una estructura distinta a los dos anteriores. Este cuestionamiento, muestra una representación de una sucesión, sobre la cual es posible hacer trazos para continuar la sucesión. Otra estrategia es escribir el número de elementos y hacer el tratamiento con los numerales del sistema decimal. Además, la posibilidad de continuar la sucesión de diferentes formas (ver ilustración 23), puede llevar a los alumnos a diferentes resultados. A pesar de eso, existen alumnos que no reconocen el patrón y consideran el número de palillos que componen cada hexágono; en consecuencia, sus respuestas son erróneas. Por otra parte, se hace el énfasis en los diferentes arreglos de la figura, debido a la respuesta de una alumna (ver ilustración 24).

Ilustración 23. Posibles configuraciones de la figura 6 en el reactivo 3 (segundo cuestionario)

Fuente: elaboración propia a partir del reactivo 3 del segundo cuestionario de sucesiones (ver anexo 2).

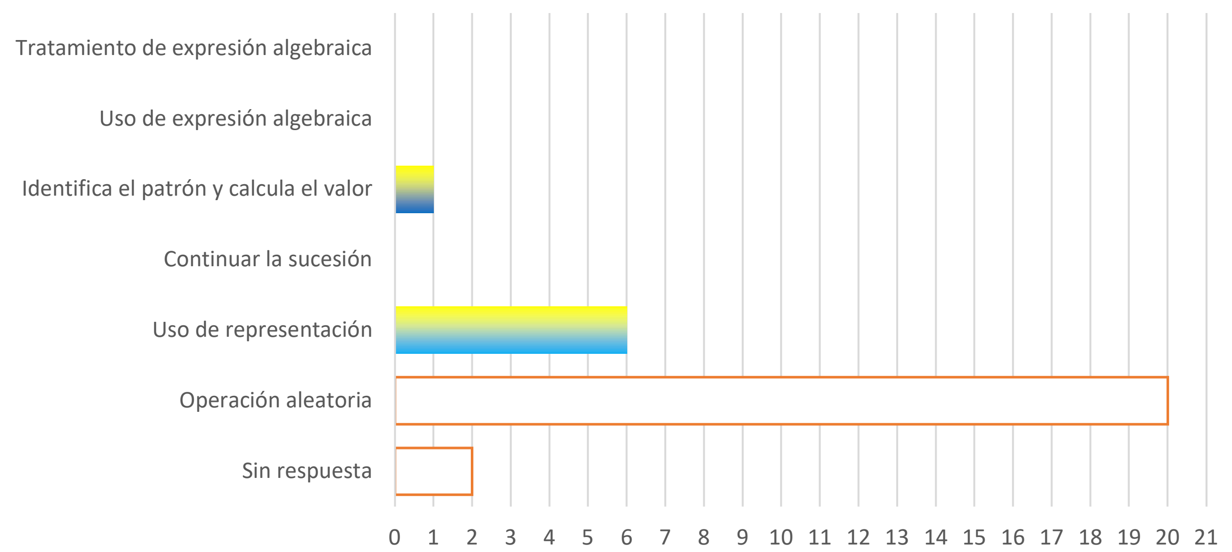
Ilustración 24. Respuesta de una alumna (configuración distinta a la esperada) en Cuestionario 2 Reactivo 3



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 2 del segundo cuestionario.

Esta situación provoca que se hayan clasificado gran cantidad de respuestas como operación aleatoria (ver gráfica 10). Es decir, las respuestas basadas en un patrón numérico diferente a 5 (cantidad de palillos que se agregaban por cada nueva figura), se clasificaron dentro del grado 1; se incluyeron las que identificaron 6 como diferencia o patrón de la sucesión. De hecho, prácticamente la totalidad de las respuestas grado 1 identificaron 6 como patrón de la sucesión. Esto se debe a que los alumnos consideran la cantidad de palillos que componen un hexágono; consideran cada uno de los hexágonos de manera aislada, sin considerar que comparten uno de los palillos que lo forman.

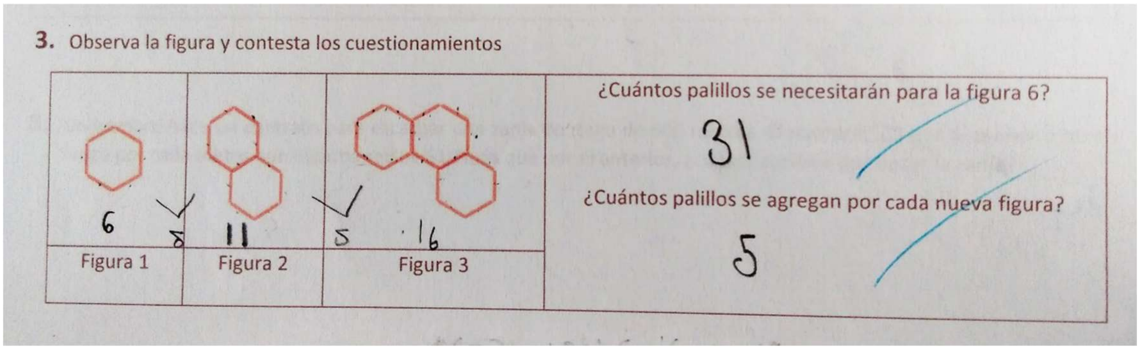
Grafica 10. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 3 del segundo cuestionario de sucesiones



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 3 del segundo cuestionario.

Por otra parte, las respuestas consideradas en el grado 2 (uso de representación), son aquellas que hacen explicito el uso de la representación para contar los elementos de cada figura y trabajar sobre las cantidades. Este tipo de respuestas, se clasifican dentro de la identificación y el tratamiento; de las operaciones mentales relacionadas con la comprensión y la transformación de representaciones, respectivamente. Esta forma de resolver la situación planteada da mayor seguridad a los alumnos, para identificar el patrón, puesto que hacen el conteo de los elementos de cada figura y obtienen la diferencia entre ellos (ver ilustración 25). La estrategia mencionada, les permite estimar con mayor precisión la cantidad de palillos necesarios para la figura 6.

Ilustración 25. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de representación*

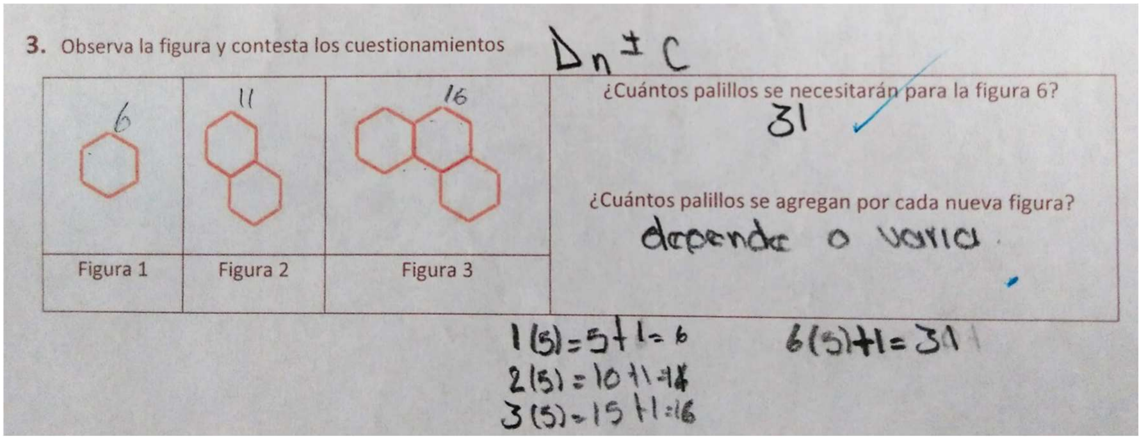


Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 3 del segundo cuestionario.

En el mismo reactivo, se clasificó una respuesta dentro del grado 4. Al igual que las respuestas del nivel 2, utiliza la representación para identificar la diferencia de la sucesión. Sin embargo, en este caso no utiliza la representación para llegar a la respuesta, ni continúa la sucesión, sino que utiliza una multiplicación y una adición para calcular los palillos de la figura 6 (ver ilustración 26). Los cálculos son similares a los que algunos alumnos hacen al utilizar una expresión algebraica (ver ilustración 11), a pesar de no escribir dicha expresión. En este caso, la alumna escribe la expresión para el cálculo de los palillos, para las primeras tres figuras; acción similar a lo que hacen los alumnos que comprueban la expresión algebraica que construyen (ver ilustración 11, en el Cuestionario 1 Reactivo 1), y finalmente calcula los palillos de la figura número 6.

De lo anterior, deriva la afirmación de que los alumnos cuyas respuestas se clasifican dentro del grado 4 (identifica el patrón y calcula el valor), se encuentran muy cerca de lograr construir una expresión algebraica, para calcular cualquier término en una sucesión aritmética. De hecho, es por ello que se asocia este tipo de respuestas con la operación mental de discriminación, considerando también que los alumnos han logrado la identificación. Sin embargo, el lenguaje empleado, a pesar de que se expresa de manera más formal y ordenada, se da dentro del mismo registro de representación. Es decir, en este punto se encuentra la delgada línea entre la discriminación y la generalización, así como entre el tratamiento y la conversión de registros de representación.

Ilustración 26. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*

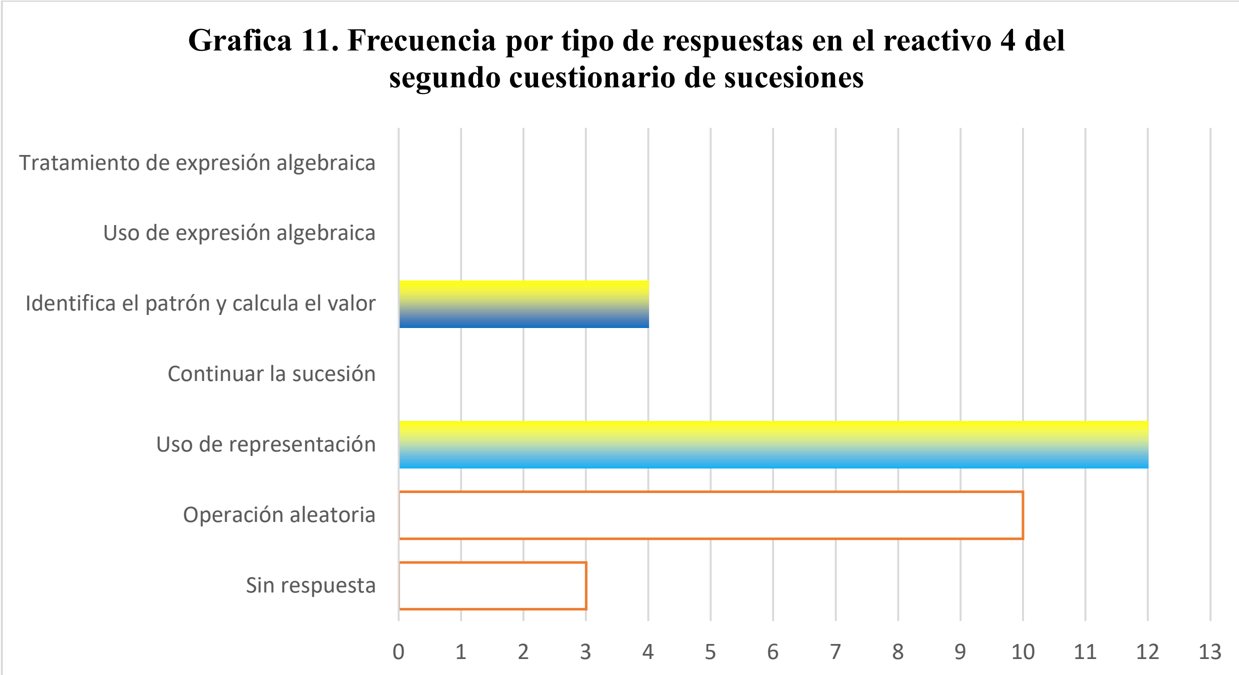


Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 3 del segundo cuestionario.

4.3.4. Cuestionario 2 Reactivo 4

El cuarto reactivo del segundo cuestionario, se enfocó al uso de sucesiones simultáneas y proporcionales. Dicho de otra forma, las sucesiones que se utilizaron relacionan cada uno de sus términos correspondientes en una proporción. El objetivo era saber si los alumnos relacionaban dichas variables y utilizaban esa relación para contestar algún cuestionamiento. Algunas de las estrategias empleadas por los alumnos para contestar, son el uso de relaciones entre las variables, principalmente doble y cuádruple. En este caso, todos los alumnos identifican plenamente el patrón que rige en cada una de las tres sucesiones. Otra estrategia que prevaleció, es la de utilizar la representación de dos formas: la primera fue hacer los dibujos necesarios para llegar a una respuesta; la segunda fue marcar los elementos para establecer cantidades y llegar a un resultado.

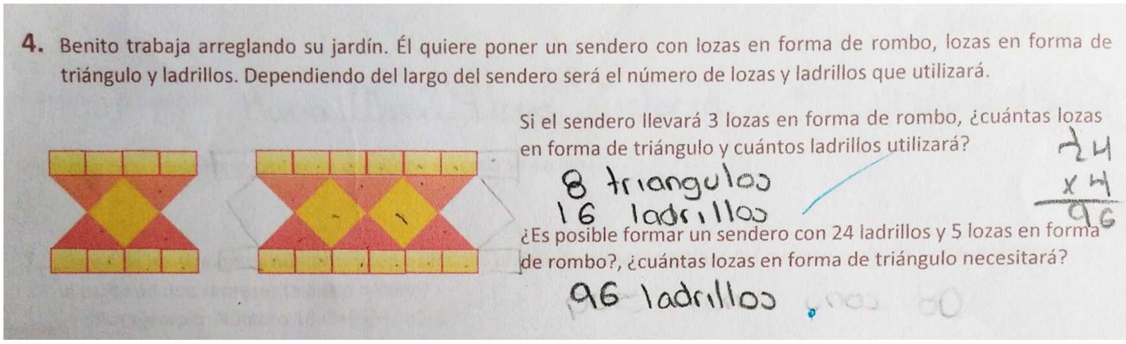
En general, la mayoría de las respuestas de los alumnos alcanzó el grado necesario en la clasificación propuesta. De esta forma, pudieron ser relacionadas con las operaciones mentales de la comprensión y la transformación de representaciones. A pesar de eso, un gran número de respuestas se clasifican en grado 1, porque muestran operar con los datos del problema fuera de una lógica que los acerque a la respuesta correcta. De las respuestas clasificadas, la mayoría hacen uso de una representación, en segundo lugar, hacen una operación aleatoria y algunas otras, logran identificar el patrón y calcular una respuesta con él (ver gráfica 11).



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 4 del segundo cuestionario.

Aquellas respuestas que hacen uso de la representación, generalmente cuentan el número de losas y a partir de conocer la cantidad logran dar una respuesta; en las respuestas no se explicita la relación de doble o cuádruple, únicamente aparece el número y las marcas de conteo. En casos como ese, resulta lógico que los alumnos lleguen a la respuesta por conteo en el primer cuestionamiento del reactivo. Sin embargo, sin descartar el uso de la representación, el segundo cuestionamiento es más factible por una operación, relación doble o cuádruple. Esta última relación, la intentó establecer un alumno que confundió las variables. En el ejemplo, la relación 1:4 que hay entre losas romboidales y losas triangulares, la estableció entre ladrillos y ladrillos (ver ilustración 27). Por ese motivo, multiplicó los 24 ladrillos que plantea la situación por cuatro, obteniendo 96 ladrillos para la figura.

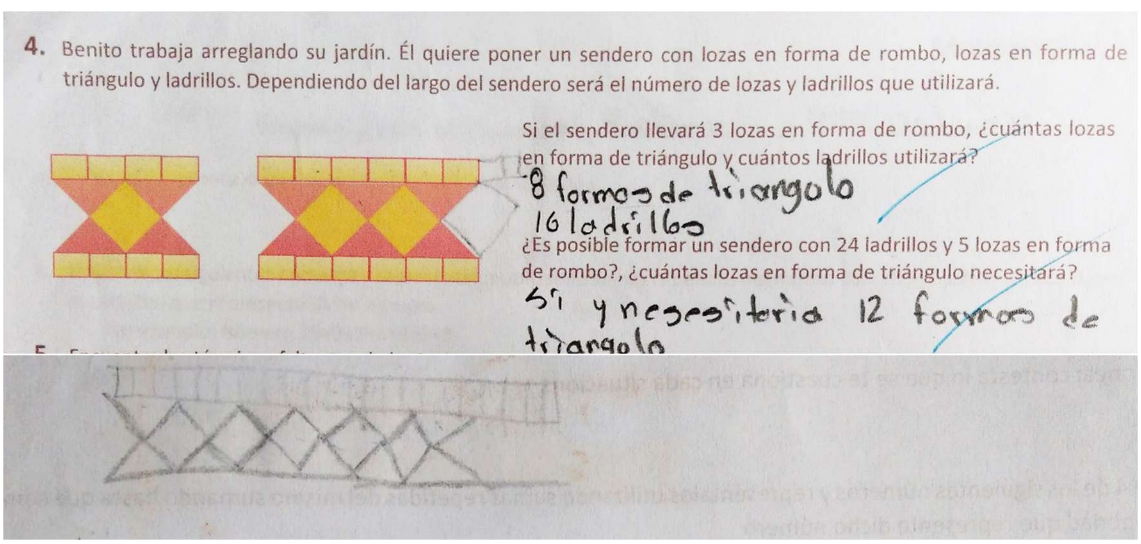
Ilustración 27. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de representación*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 4 del segundo cuestionario.

En cuanto a las respuestas clasificadas en el grado 4, los alumnos dibujan uno o dos elementos (losas) de la figura y a partir de la relación con las otras variables logran dar una respuesta. Es decir, logran establecer la relación entre variables, aunque consideran necesario el uso de la representación, para asegurarse de que su respuesta sea correcta. Tal es el caso de una alumna, que para el segundo planteamiento del reactivo hace casi todo el dibujo. Representa las cinco losas en forma de rombo y las losas en forma de triángulo, aunque no todos los ladrillos, aun así, su respuesta es correcta (ver ilustración 28).

Ilustración 28. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 4 del segundo cuestionario.

Para el caso de este reactivo, nuevamente la mayoría de las respuestas se relacionan con la identificación. Esta operación, relacionada con la comprensión, se evidencia cuando el alumno es capaz de identificar que se trata de una situación que implica sucesiones y proporcionalidad. Además, otra forma en la que se hace patente el nivel de identificación, es cuando el alumno halla la diferencia o patrón que rige la sucesión. Por otro lado, el tratamiento de representaciones, es la transformación que más se evidencia en las respuestas de los estudiantes. Esto se hace notar porque los alumnos permanecen en el registro de los números naturales y sus operaciones, así como los dibujos del sendero, los cuales fungen como representaciones auxiliares.

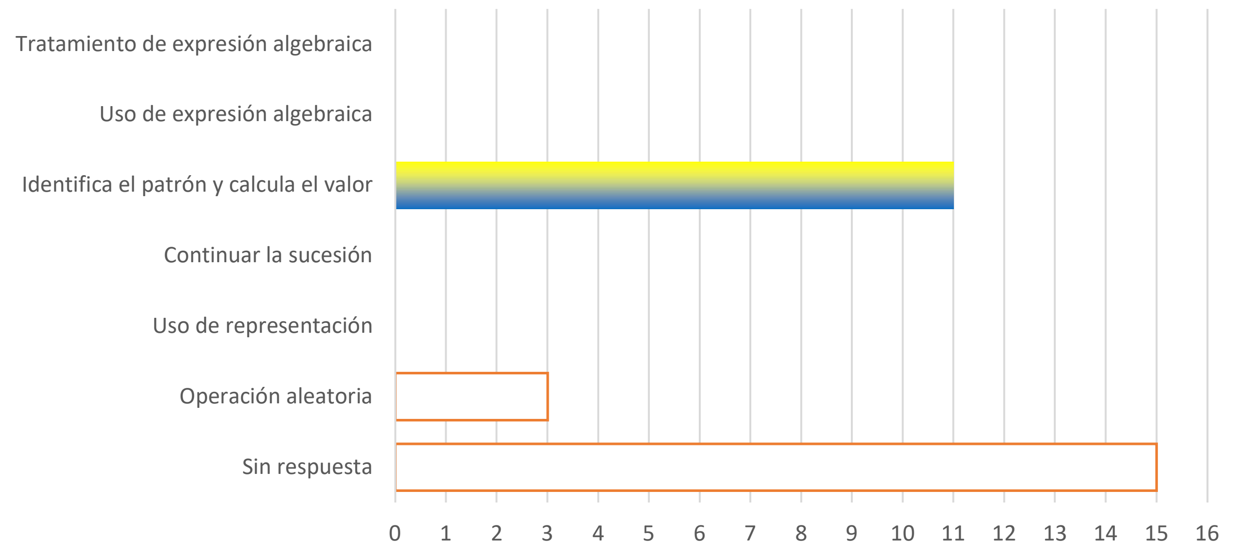
4.3.5. Cuestionario 2 Reactivo 5

El reactivo número cinco de la prueba, no implica una situación de sucesiones aritméticas, trata de sucesiones geométricas. Aunque el tema en el que se centra la investigación son las sucesiones aritméticas, las sucesiones geométricas ayudan a evidenciar la habilidad para identificar patrones. En quinto grado de primaria, se busca la solución de situaciones en las que se tengan que identificar regularidades en progresiones aritméticas o geométricas. Se considera que identificar patrones, es una de las habilidades esenciales, que llevan al alumno a poder establecer generalizaciones de las sucesiones.

En este reactivo, la totalidad de las respuestas distintas al grado 0 o 1, se ubicaron en el grado 4. Es decir, en las respuestas se nota que el alumno logra identificar el patrón que define la sucesión y lo utiliza para calcular los valores faltantes. Además, argumenta su respuesta con las operaciones y por escrito. Aunque no hubo respuestas de otro tipo, hubiera sido interesante encontrar alumnos que hicieran uso de una representación, por ejemplo, dibujar configuraciones puntuales o algún otro tipo de representación auxiliar.

Considerando todos los grados de respuestas de los alumnos, el mayor número de ellas se concentró en el grado 0. Esta situación responde a que, a pesar de que en promedio 8 alumnos no dieron respuesta alguna, muchas respuestas no evidenciaron lógica con todos los términos de la sucesión. En menor cantidad, existieron respuestas que trataron de operar con las cantidades de la sucesión, buscando de hallar los valores correctos sin éxito alguno. Fueron únicamente 11 de los 29 alumnos cuestionados, los que alcanzaron respuestas satisfactorias (ver gráfica 12).

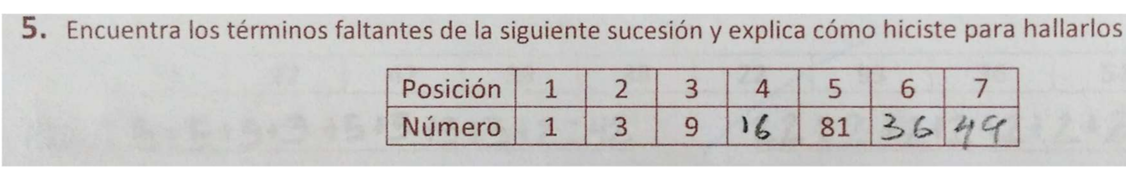
Grafica 12. Frecuencia por tipo de respuestas en el reactivo 5 del segundo cuestionario de sucesiones



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 5 del segundo cuestionario.

De las respuestas que se clasifican en el grado 1, hay algunas que resultan interesantes. Por ejemplo, un alumno ignoró los primeros términos de la sucesión y basó sus respuestas en la sucesión definida por la expresión $n = p^2$, donde n es el número resultante o término de la sucesión y p es la posición en la que se encuentra dicho número. Por esa razón, el alumno completó con los números 16, 36 y 49 para las posiciones 4, 6 y 7 respectivamente, (ver ilustración 29).

Ilustración 29. Ejemplo del tipo de respuesta *operación aleatoria*



5. Encuentra los términos faltantes de la siguiente sucesión y explica cómo hiciste para hallarlos

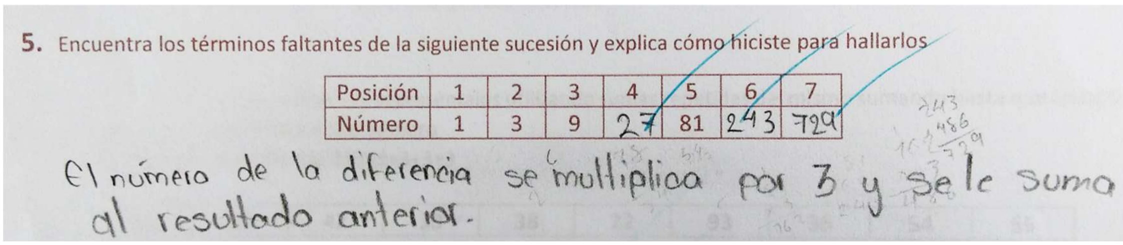
Posición	1	2	3	4	5	6	7
Número	1	3	9	16	81	36	49

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 5 del segundo cuestionario.

De las respuestas clasificadas en el grado 4, se destacan la forma de expresar los patrones de diferentes alumnos. Existen respuestas en las que expresan que cada valor se multiplica por 3 y aquellos que lo suman tres veces, para obtener el siguiente. Sin embargo, destaca la respuesta de una alumna que obtuvo los valores a partir de un procedimiento más elaborado (ver ilustración 30).

Para obtener cada término, la alumna utiliza la diferencia entre los números que anteceden al que se busca, la razón de la sucesión y el antecesor del número por hallar.

Ilustración 30. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 5 del segundo cuestionario.

Este tipo de respuesta, implica que la alumna identifica la razón que define la progresión geométrica, pero en lugar de utilizarla únicamente para multiplicar, decide hacer un cálculo más elaborado. El cálculo que hace la alumna se puede definir por la expresión $a_n = 3(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n1}$, donde a_n es el enésimo término buscado. En este caso, el cálculo de la alumna requiere el conocimiento de los dos términos que preceden al que se busca. Siendo consciente de que se trata de una sucesión con progresión geométrica, probablemente la alumna no habría desarrollado tales cálculos o la argumentación que muestra.

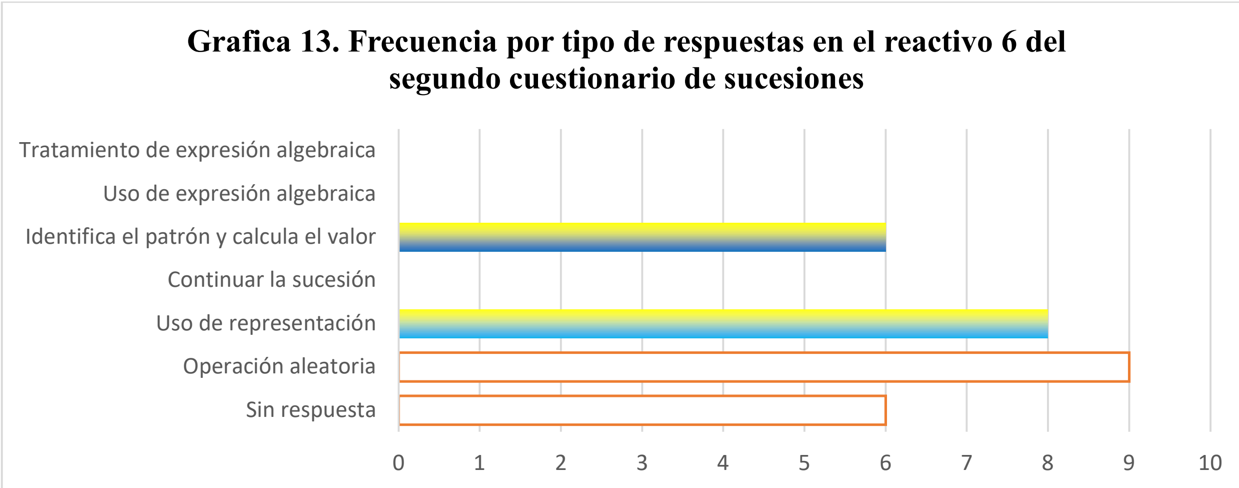
Este tipo de respuestas (ilustración 30) y las mencionadas dentro del grado 4, se consideran dentro de la operación mental de discriminación. Esto responde a que diferencian el tipo de patrón que define a la sucesión; no se trata de un patrón en el que aumenta o disminuye una cantidad constante, como en las sucesiones aritméticas, sino que esa constante define cuántas veces crece el número. Por otra parte, al no explicitarse el uso de una expresión algebraica o cualquier otro indicio de un cambio de registro de representación, los alumnos siguen haciendo un tratamiento de las representaciones de los números; hacen uso de las reglas de operación del propio sistema de numeración.

4.3.6. Cuestionario 2 Reactivo 6

En el sexto reactivo del cuestionario, es más notorio la utilización de estrategias cercanas al uso de una expresión algebraica. En teoría, los alumnos de sexto año de primaria no utilizan expresiones algebraicas de manera explícita, los alumnos que contestaron la prueba si lo han hecho. A pesar de ello, el planteamiento no estuvo diseñado específicamente para hacer uso de una expresión algebraica. Al igual que el reactivo 5, el objetivo era que los alumnos resolvieran situaciones en las que había que identificar el patrón en progresiones aritméticas, geométricas o con crecimiento especial. En este caso, la situación se relaciona con números triangulares, los cuáles se definen por la ecuación cuadrática $a_n = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ donde a_n es el enésimo término y x es la posición en la que se encuentra dicho término.

Una estrategia para saber los términos faltantes, podría ser obtener una expresión algebraica y sustituir las posiciones buscadas. Por supuesto, esta estrategia está lejos de lo que se espera que hagan los estudiantes de primer grado de secundaria. A pesar de que se trata de una sucesión, cuyos elementos están definidos por una ecuación cuadrática, es fácil saber el número de elementos en los términos siguientes a través de su representación. En este caso la configuración puntual, ayuda a los alumnos a saber el número de puntos de la figura siguiente, simplemente con dibujarla o a través de un conteo.

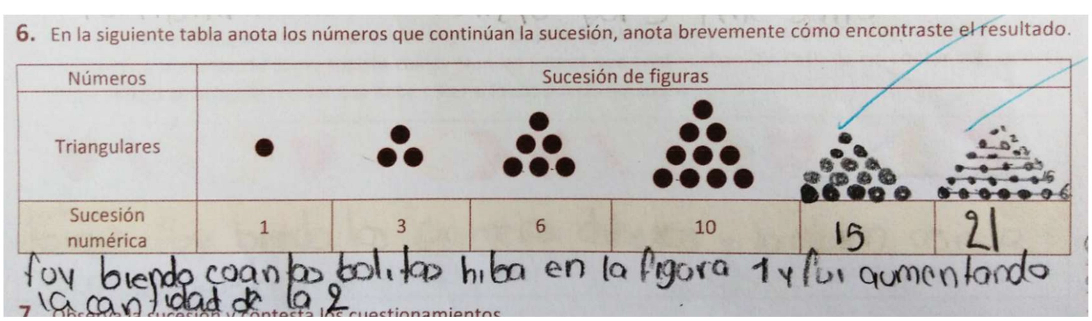
Como se puede observar en la gráfica 13, el uso de la representación fue el tipo de respuesta que tuvieron la mayor parte de los alumnos, después de la operación aleatoria. Específicamente, ocho alumnos, de un total de 29 que contestaron la prueba, utilizaron la representación para dar una respuesta al reactivo. La forma en que usaron dicha representación, fue para hacer el conteo o dibujando la figura para obtener el número de puntos de los siguientes dos términos. El otro tipo de respuesta que alcanzó un grado mayor a 1, es la de identificar el patrón y cálculo del valor. En este caso, los alumnos no mostraron evidencia del uso de la representación, sino de cálculos numéricos para llegar a la respuesta.



Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 6 del segundo cuestionario.

En el tipo de respuestas clasificadas en el grado 2, se reconoce que, al hacer uso de la representación, es posible que estén reconociendo el patrón, pero no lo explicitan. Los alumnos que dan este tipo de respuestas, toman como condición de la respuesta hacer el dibujo de la figura, a pesar de que no se pide en el reactivo. Los alumnos únicamente hacen el recuento de los círculos que componen cada figura, para dar una respuesta que continúe la sucesión. Incluso hay quienes argumentan encontrar la siguiente figura a partir de las bolitas que aumenta (ver ilustración 31). Este tipo de respuestas, se relacionan con la operación mental de identificación, puesto que, a través de la representación y su uso, el alumno está en vías de identificar los patrones de las sucesiones. Además, se relaciona con el tratamiento de dichas representaciones, sobre todo de los pequeños círculos como representación auxiliar de los números.

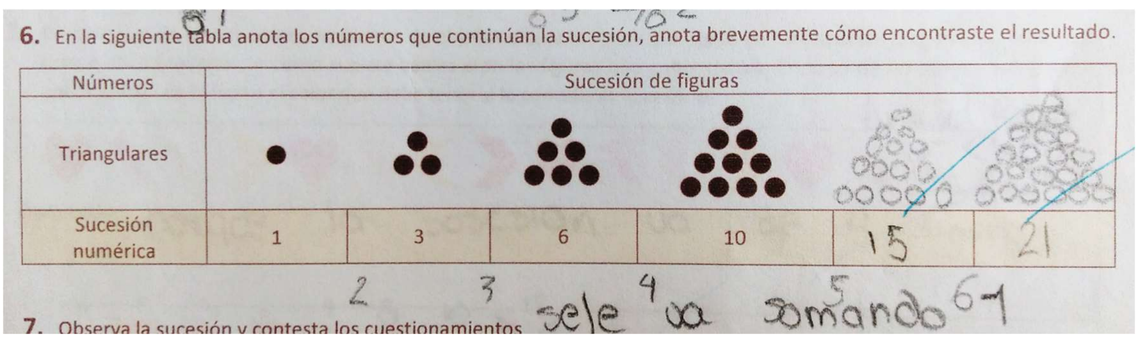
Ilustración 31. Ejemplo del tipo de *respuesta uso de representación*



Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 6 del segundo cuestionario.

En relación con las respuestas del grado 4, la forma de contestar es muy similar a las respuestas de grado 2. Sin embargo, las respuestas se dan por el uso de los números que permitieron descubrir el patrón y no a partir de la representación misma (ver ilustración 32). Se reconoce de manera abierta que los estudiantes han identificado el patrón de crecimiento de la sucesión, independientemente de su representación como número triangular. Este tipo de respuestas, al igual que las de grado 2, se relacionan con el tratamiento de representaciones, por permanecer dentro del mismo registro de representación. En este caso, se plantea que se encuentran en el nivel de discriminación de las operaciones mentales relacionadas con la comprensión. Esto se debe a que cuando el alumno descubre un patrón, puede hacer cálculos para obtener el término que se encuentre varias posiciones delante.

Ilustración 32. Ejemplo del tipo de respuesta *identifica el patrón y calcula el valor*



6. En la siguiente tabla anota los números que continúan la sucesión, anota brevemente cómo encontraste el resultado.

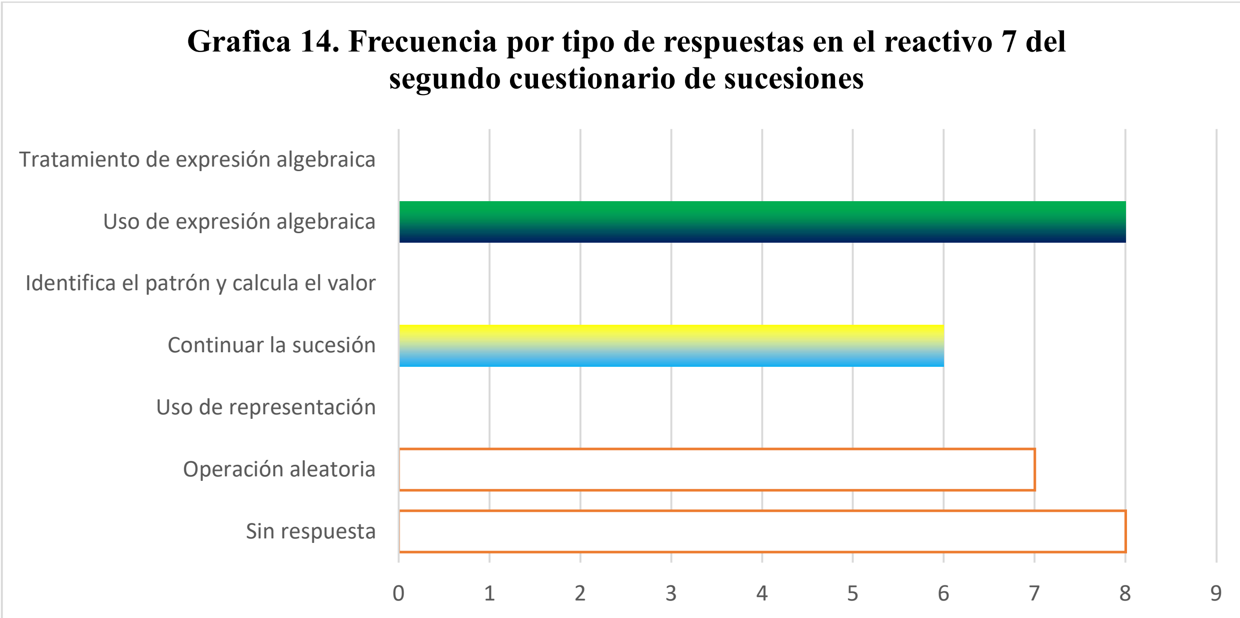
Números	Sucesión de figuras					
Triangulares						
Sucesión numérica	1	3	6	10	15	21

2 3 se le 4 va 5 somando 6-1

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 6 del segundo cuestionario.

4.3.7. Cuestionario 2 Reactivo 7

Las respuestas del último reactivo del cuestionario, contrastan ampliamente con todas las demás. Es posible observar que la mayor cantidad de respuestas hacen uso de una expresión algebraica (ver gráfica 14). La misma cantidad tienen aquellas respuestas clasificadas en grado 0, aunque estas últimas no se consideran en la clasificación de las operaciones mentales de la comprensión y la transformación de representaciones. A este tipo de respuestas, le siguen aquellas en las que se continúa la sucesión para llegar al resultado. Se considera que aquellos alumnos que siguen esta estrategia, han identificado plenamente el patrón o diferencia de la sucesión.

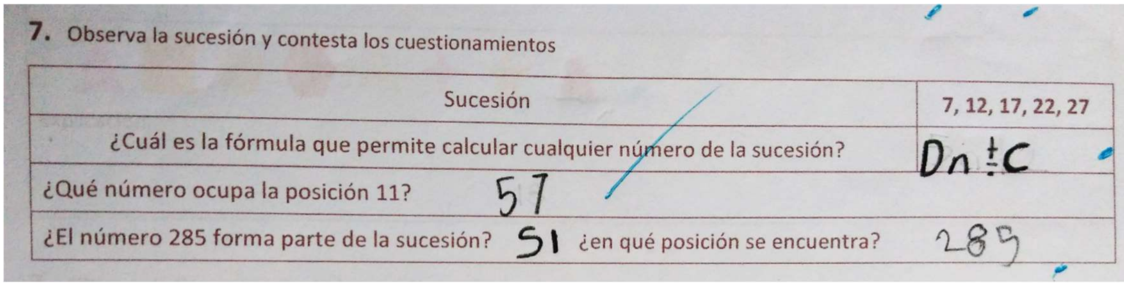


Fuente: elaboración propia a partir del tipo de respuesta (ver tabla 5) en el reactivo 7 del segundo cuestionario.

El uso de la expresión algebraica en el reactivo, se debe en gran medida a su similitud con los ejercicios planteados en clase. Es decir, la estructura del reactivo muestra una sucesión, se pide al estudiante que formule una expresión que defina a la sucesión y posteriormente la utilice para calcular algún término o posición. En este caso, no se planteó una situación en contexto, únicamente un ejercicio similar a los que los alumnos estaban acostumbrados.

En el tipo de respuestas clasificadas en el grado 1, los alumnos anotaron números que no corresponden con la sucesión, números que están dentro del enunciado o resultados de operar con los datos del planteamiento. En 3 casos de las respuestas grado 1, los alumnos anotaron la fórmula que se les dio en clase para hallar la expresión que define al enésimo término, en cualquier sucesión lineal: $Dn \pm c$. A pesar de recordarla, no la usaron con los datos del ejercicio, para encontrar la expresión que define a la sucesión. En el ejemplo de la ilustración 33, se observa que además de la situación mencionada, el alumno responde correctamente el segundo cuestionamiento. Considerando que se cuestiona por una posición cercana a las primeras posiciones, el alumno pudo haber continuado la sucesión para llegar a una respuesta.

Ilustración 33. Ejemplo del tipo de respuesta *operación aleatoria*

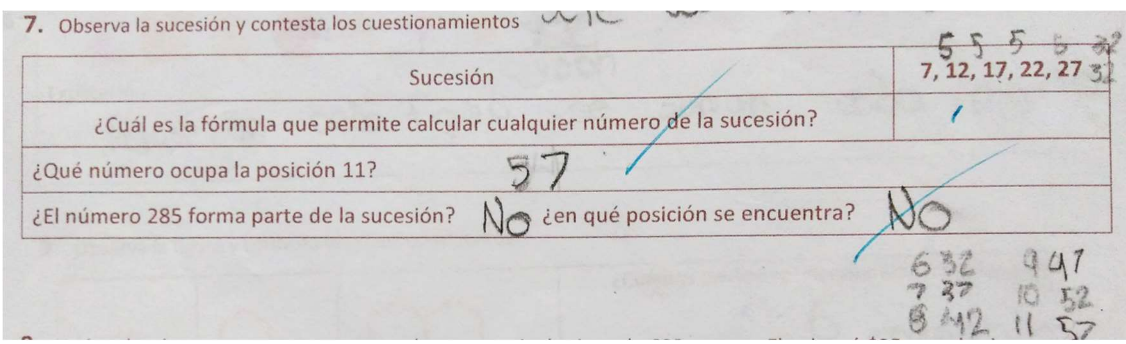

7. Observa la sucesión y contesta los cuestionamientos

Sucesión	7, 12, 17, 22, 27
¿Cuál es la fórmula que permite calcular cualquier número de la sucesión?	Dn ± C
¿Qué número ocupa la posición 11? 57	
¿El número 285 forma parte de la sucesión? 51 ¿en qué posición se encuentra?	289

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 7 del segundo cuestionario.

En relación con las respuestas clasificadas dentro del grado 3, se considera que los alumnos pudieron identificar la diferencia de la sucesión, pero no han trascendido al uso de una operación. En este caso, los alumnos aún se encuentran en el nivel de identificación, puesto a que no discriminan los elementos que continúan la sucesión y requieren de ellos para llegar a una respuesta. Es decir, requieren escribir término a término de la sucesión hasta llegar al que buscan (ver ilustración 34). Además, al desarrollar su estrategia dentro de un mismo registro de representación, se relaciona con el tratamiento. Aunque el patrón o diferencia de la sucesión es clave para la formulación de una expresión algebraica, no llega a construirla.

Ilustración 34. Ejemplo del tipo de respuesta *continuar la sucesión*


7. Observa la sucesión y contesta los cuestionamientos

Sucesión	7, 12, 17, 22, 27 32
¿Cuál es la fórmula que permite calcular cualquier número de la sucesión?	
¿Qué número ocupa la posición 11? 57	
¿El número 285 forma parte de la sucesión? No ¿en qué posición se encuentra?	NO

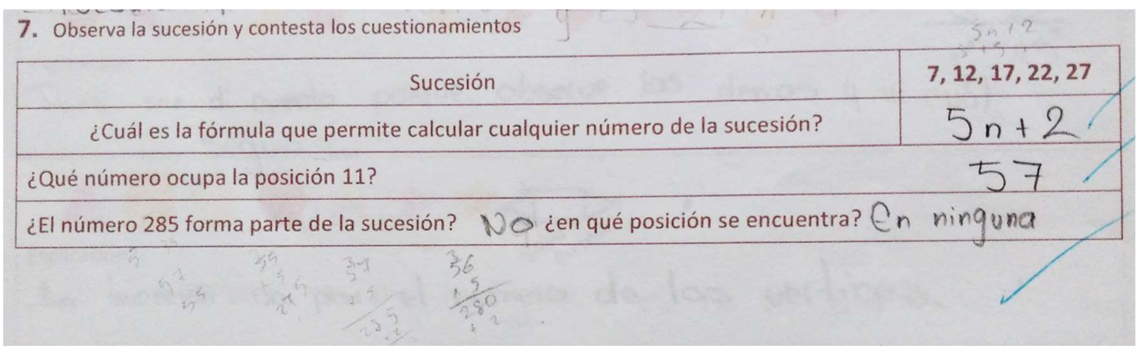
6 32 9 47
7 37 10 52
8 42 11 57

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 7 del segundo cuestionario.

Finalmente, las respuestas que se clasifican en grado 5, son aquellas que formulan y utilizan una expresión algebraica para resolver el planteamiento. A diferencia de otros reactivos, en este se pide explícitamente que se construya una expresión algebraica. A pesar de ello, los siguientes cuestionamientos del reactivo pueden contestarse prescindiendo de ella, como se evidenció en las respuestas anteriores. Aun así, 8 alumnos lograron construir y utilizar la expresión correcta.

En el ejemplo que se muestra en la ilustración 35, se puede ver que la alumna construyó la expresión y operó correctamente para hallar el número que se encuentra en la posición 11. Aunque para lograrlo, primero tuvo que encontrar la diferencia (5), no logró darse cuenta que todos los términos tienen como dígito de las unidades 2 o 7. Por el contrario, la estrategia que utilizó fue aplicar la expresión en diferentes términos para acercarse al número indicado (285), hasta percatarse que no forma parte de la sucesión. En ese sentido, una estrategia pudo haber sido utilizar la expresión encontrada, igualarla con el número indicado y despejar la posición para saber si existe dicho término: $5n + 2 = 285$. De haberlo hecho, la alumna habría llegado al nivel más alto considerado en la clasificación del tipo de respuestas (grado 6, tratamiento de representación.)

Ilustración 35. Ejemplo del tipo de respuesta *uso de expresión algebraica*



7. Observa la sucesión y contesta los cuestionamientos

Sucesión	7, 12, 17, 22, 27
¿Cuál es la fórmula que permite calcular cualquier número de la sucesión?	5n + 2
¿Qué número ocupa la posición 11?	57
¿El número 285 forma parte de la sucesión? No ¿en qué posición se encuentra? En ninguna	

Fuente: respuesta de un alumno en el reactivo 7 del segundo cuestionario.

4.4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON LOS ALUMNOS SELECCIONADOS COMO CASO

4.4.1 Dos premios en un torneo de ajedrez

Los alumnos reciben una serie de actividades relacionadas con el tema de sucesiones, el cual ellos revisaron hace poco. Alma lee el primer planteamiento y yo traté de explicarlo: se busca saber cuál es la mejor opción de premio para el ganador de un torneo de ajedrez, al cual se le ofrecen dos opciones para cobrar su premio.

José comenzó a resolver el problema haciendo anotaciones en su hoja, numeró del 1 al 10 para representar las casillas y a cada número asignó un valor de acuerdo con el planteamiento de la primera opción de premio (en la cual se duplica el valor de cada casilla empezando desde $1): 1-1, 2-2, 3-4, 4-8, 5-16… 10-512. La conclusión del estudiante fue que le conviene la opción “1 porque se le va sumando lo doble cada que aumenta y en la otra empieza [sic] de 500 pero le va sumando 10 nada más”.

El alumno no consideró la necesidad de hacer más cálculos, cuando se le cuestionó por qué no hizo un cálculo similar para la opción de premio no. 2, la respuesta del alumno fue que era lógico que convenía más la opción 1, porque la cantidad de dinero se duplica y llega el momento desde las primeras casillas en las que el dinero que se obtiene con la opción 1 es mucho mayor que la que se obtiene con la opción 2. Para él es simple, porque desde la opción 10 ya se superan los 500 que se agregan para cada casilla (además de la serie de agregados de 10 en 10). Él afirma que en la casilla 11 (de la opción 1) ya se tienen 1,024 que es más del doble de lo de una casilla de la opción 2, después se tiene 2,048; contrario a lo que sucede con la opción 2 en la que solamente se le van agregando 10 para cada nueva casilla, aunque empieza en 500 no es mayor que lo que se recibe en opción 1.

Los cuestionamientos le hacen dudar un poco, por lo que, en otro apartado de su hoja, José aplicó el mismo algoritmo para la segunda opción de premio (en la que se comienza en $500 y por cada casilla se añaden $10): 1-500, 2-510, 3-520, 4-530, 5-540, 6-550. Pero su conclusión no cambió y reafirmó que la opción 1 de premio es la que más conviene al ganador.

Es posible observar que el alumno tuvo la idea intuitiva de la sucesión, en la que se duplican los términos y se llegará a una cantidad mayor que la sucesión en la que se agrega una cantidad constante. En este caso, reconoce que la progresión aritmética tiene un crecimiento menor que la progresión geométrica. Sin embargo, el alumno no hace el intento por demostrarlo de alguna forma. La respuesta del alumno se basa en la estrategia de identificar los primeros 10 términos de la sucesión. A partir de ahí, estima que los términos de la sucesión geométrica serán cada vez más grandes y la suma de ellos será mayor.

Para el caso de Ignacio, hizo la suma de lo que se obtendría al elegir el segundo premio si solamente se tuvieran 10 casillas. Posteriormente, al cuestionarle sobre el argumento de su respuesta, él refirió que por cada una de las casillas (las 64 en total) el ganador ya tendría $500, después hay que sumarle $10 de la segunda casilla, $20 de la tercera, $30 de la cuarta y así sucesivamente. Al estar explicando al investigador, Ignacio se dio cuenta de otra relación: en la casilla 10 del premio 1 se obtiene la cantidad de 512, a pesar de que, al sumar las casillas del 1 al 10 del primer premio, se obtiene una cantidad menor a la que obtuvo al sumar las cantidades de las primeras 10 casillas de la opción de premio 2. Así llegó a la conclusión de que conviene “el premio 1 porque cada cantidad se duplica y se gana más dinero”.

Se cuestionó a Ignacio sobre los motivos del cambio de respuesta, si en la suma del dinero de las casillas de la opción 2 había obtenido una cantidad mayor, a lo que se obtendría en la suma de las mismas casillas con la opción 1. La respuesta del estudiante fue que, si hubiera continuado obteniendo el dinero de las casillas de la opción 1, llegaría a 1,000, luego a 2,000, después 4,000 y así sucesivamente; se ganaría más dinero en menos casillas que en la opción 2.

En esta situación, Ignacio se dejó guiar en un primer momento por la cantidad inicial de la serie aritmética. Al revisar la forma de proceder, se da cuenta que el patrón de crecimiento de la opción de premio 2 lleva a cantidades mayores en menor número de términos. Incluso, el alumno establece la relación entre las variables y lo denota como una expresión de proporción: obtener mayor cantidad de dinero, con menos casillas del tablero.

Hasta ese momento, José e Ignacio ya tenían su respuesta y la habían reafirmado, pero Brenda y Alma tenían dificultad para obtener una respuesta concreta. En ese momento intervine para tratar de explicar a las alumnas:

- Investigador: ¿cuál es la pregunta del planteamiento?
- José: ¿cuál opción crees que convenga al ganador y por qué?
- Investigador: si a ti te digo —refiriéndose a Alma— que te voy a dar una moneda y en una mano tengo una de $5 y en otra una de $10, ¿cuál te convendría?
- Alma: la de $10.
- Investigador: exacto, porque es más dinero. Vamos a suponer que el ganador solamente obtendrá lo de la primera fila del tablero de ajedrez, ¿cuántas casillas hay en una fila?
- Brenda: ocho.
- Investigador: ocho. En la primera, en el primer premio, ¿cuánto le darían por esa fila?
- José, Ignacio y Brenda: un peso.
- Investigador: por toda la primera fila.
- Ignacio: por toda la fila 128.

En este punto, es notable que los alumnos, acostumbrados al trabajo con la docente y a los ejercicios propuestos, aún consideran que la situación implica una sucesión y no una serie. Al respecto, el único momento en el que la docente hizo la distinción entre sucesión y serie fue en la primera sesión observada (ver apartado 4.1), donde surgió un breve diálogo a partir de la preconcepción de una alumna acerca de lo que implica una sucesión. Sin embargo, no se profundizó en la diferencia, con el planteamiento de un ejercicio o problema en el que los alumnos notaran la diferencia.

El diálogo con los alumnos continúa:

- Investigador: ¿por qué 128? A ver díganme.
- José: yo le digo, es que en cada casilla se le va sumando lo doble: de uno son dos, de dos son cuatro, de cuatro ocho, de ocho dieciséis, de dieciséis treinta y dos, de treinta y dos sesenta y cuatro y de sesenta y cuatro ciento veintiocho.
- Investigador: entonces, su compañero dice que en la primera le van a dar un peso, y ¿en la segunda?
- Alumnos: dos.
- Investigador: entonces, ¿cuánto lleva hasta ahí?

— Alumnos: tres.
— Investigador: ¿si entienden a lo que voy?
— Alma: sí, se van sumando.
— José: se le va sumando su cantidad que ya lleva.
— Investigador: exactamente, se le va sumando la cantidad que ya lleva, 128 solamente es el valor de la casilla número 8.
— Brenda: sí, pero hay que sumarle lo demás.
— Investigador: tengan en cuenta eso a la hora de elegir la opción, para su respuesta.

A pesar de que el objetivo de la investigación no es identificar las concepciones que los alumnos tienen de las sucesiones en relación con las series, se consideró importante saber si el alumno establece la distinción más allá de una definición. Es notorio que los alumnos centran totalmente su atención en lo que se les dice que van a aprender, coartando su creatividad para descubrir el vínculo con otros contenidos. Por ejemplo, la sucesión puede estudiarse como una función, sin embargo, nunca es un ejemplo típico de ella. En el mismo sentido, Sierpinska (1994, p. 38) comenta que un significado nunca será entendido únicamente por la definición, para comprenderlo será necesario su uso. De esta forma, el nulo uso de actividades para que el alumno tuviera oportunidad de diferenciar entre sucesiones y series, lo lleva a cometer la confusión.

Al terminar la explicación, José comenta que está dudando nuevamente de su respuesta, porque parece que pudiera sumarse una cantidad mayor en la opción 1, debido a que en cada una de las casillas ya se tienen 500, aunque en la otra se duplica cada vez.

— José: como que me entró la duda, porque se le van sumando 500, en la primera ya tengo 500, pero con la segunda ya llego a 1,000 y pues de 1,000 aquí tiene otros 530 —refiriéndose a los de la cuarta casilla— y otros 500, 500 y 500…, pero acá también se le va sumando lo doble, cuando ya tenga 1,000 sigue 2,000 y después 4,000.
— Investigador: ¿cómo podríamos hacer para saber cuál es la respuesta?
— José: y si le sumamos diez por sesenta y tres, que es el número que ya contiene de todos más el que te salga del último.
— Investigador: ¿cómo sacas ese?
— José: —duda de su respuesta y se queda pensando un momento— ¿No se puede por eso de las posiciones?

— Investigador: si quieres puedes intentarlo —el investigador, al ver que el alumno trata de recordar, se retira a trabajar con Alma y Brenda, José se queda comentando la situación con Ignacio—.

En esta situación, José continúa en el dilema de la sucesión y la serie. Emplear el procedimiento que sugiere pensando lo llevará al último término de la sucesión definida por la expresión $500 + (n-1)10$. En este caso su respuesta estará siendo la del término 64 de la sucesión. A pesar de que no se espera que el alumno llegue a generalizar en lenguaje algebraico la serie, por lo menos se espera que tenga la noción, la exprese a través de operaciones y sea capaz de dar una respuesta satisfactoria basada en un razonamiento más formal o fundamentado.

— José: es que aquí se va sumando lo doble, en el punto en el que ya tenga un millón, después ya siguen dos millones. Aquí va de 510, 520 y 530…
— Ignacio: pero si es en la 2.
— José: no sé.
— Ignacio: si porque aquí ya tiene 500 y 500 son 1000. Acá lo que tienes —indicando la opción 1 del premio— es 1, luego 2, 4, 8…
— Ignacio: si es la primera, porque acá en la de 500 nomás se va aumentando de 10 y acá en la otra si tienes 500 se multiplica por 2 y son 1,000 y por 2 son 2,000.
— José: por ejemplo, si vas en la 20 y llevas 400,000 ya se duplica y en la otra nomás se va sumando.
— Ignacio: entonces es la primera, ¡ya terminamos!
— Investigador: ¿ya? —se acerca a ellos— a ver explíquenme ¿cuál opción y por qué?
— Ignacio: es en la primera.
— Investigador: ¿en la primera?, ¿por qué?
— Ignacio: porque suponga que aquí en la 10 ya lleva 512, se le suma eso mismo y ya son 1024, 2048, 4000 y así sucesivamente. Y en la otra solamente se le va aumentando casi lo mismo, aquí por ejemplo se le aumentan 570, lo suma y no aumenta lo mismo que en la otra, acá —señalando la opción 1— se va haciendo más grande.
— Investigador: bien, está bien.

A pesar de que el razonamiento de los alumnos es válido y correcto, siguen basando su respuesta en el valor de los términos de las sucesiones, y no en la suma de los mismos. El hecho de que la sucesión de la primera opción de premio los lleva a valores cada vez más grandes, les es suficiente para considerar como más conveniente esa opción. Además, la estrategia de razonamiento continúa en los niveles de operaciones aritméticas y multiplicativas (Butto y Rojano, 2010), sin mostrar una tendencia a la generalización, que lleve a la transición de la aritmética al álgebra.

Después que terminaron de contestar y se revisaron las respuestas de las alumnas, Brenda considera que “está mejor el premio 1 porque es más con la suma de las casillas porque, por ejemplo, 1 + el doble de uno es dos, el doble de dos es cuatro y así sucesivamente, pero si vas aumentando el doble de cada casilla pues al final sale más que el premio 2”. Por su parte, Alma afirma que al ganador del concurso de ajedrez le conviene el premio 1 “porque en la 1ra fila del tablero a cada casilla se le va aumentando el doble a cada casilla y en la primera fila”. Al pedirle que fuera más específica en su argumento, se da el siguiente diálogo:

- Alma: al principio pensamos —ella y Brenda— que se ganaba más en el segundo premio, se supone que aquí —indicando el premio 1— no dejaba más porque vimos que su aumento fue menos, su valor y aquí —subraya el premio 2— fue más, nos guiamos por el 500 y porque aquí dice que se iba aumentando esto —indica el 510 de la segunda casilla, 520 de la tercera y así sucesivamente—. Cuando no lo comprendimos muy bien, porque aquí —en la opción de premio 1— a cada casilla se le va aumentando a dos, luego a cuatro, luego a ocho y así se va a ir sucesivamente hasta que aquí en la 11 casilla me salieron 1024.
- Investigador: entonces, ¿con qué opción se quedan?
- Alma: con la opción 1.

En esta parte de la sesión, con los cuatro alumnos elegidos como caso, fue posible observar que son capaces de identificar una situación que se relaciona con una sucesión. Sin embargo, tuvieron cierta dificultad para distinguir una sucesión de una serie. Esto se explica por la poca oportunidad que tuvieron de explorar en clase las propiedades, semejanzas y diferencias de ambas. Generalmente, las sesiones observadas y las planeadas por la docente, estuvieron centradas en la resolución de situaciones en las que se involucraron únicamente las sucesiones. Específicamente, los alumnos trabajaron con la docente ejercicios en los que el objetivo era la obtención de la expresión.

Al respecto, se considera que el objetivo central no debiera ser que los alumnos lleguen a expresar de manera mecánica la fórmula que define a una sucesión. La idea es que los alumnos comprendan cada elemento y la relación intrínseca de cada expresión. Además, tal como se explicita en el aprendizaje esperado de primer grado de secundaria, se espera que sean capaces de utilizar las expresiones que formulan para analizar las propiedades de una sucesión (SEP, 2017b). Se hace evidente en muchos casos, como en este, que "el modelo cuyo objetivo es solo explicar, dar significado a las nociones matemáticas de ser los objetos adecuados de enseñanza se convierte en un objeto de enseñanza en sí mismo y su conocimiento se evalúa en las pruebas" (Sierpinska, 1994, p. 100). En este caso, la formulación de expresiones que definan a las sucesiones se vuelve el centro de atención del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el escenario planteado, la práctica del docente a encamina al alumno hacia el aprendizaje de símbolos (D'Amore, 2005, p. 25). Acción que relega a segundo plano el aprendizaje conceptual, de propiedades de los objetos matemáticos y sus relaciones. En consecuencia, en los años posteriores de escolarización, el alumno tendrá que reaprender aquello que en teoría había aprendido en secundaria. Esto se debe a que la forma de abordar los contenidos lo llevó a memorizar formas de hacer, sin comprender su funcionamiento y la conexión con otros contenidos. En este caso, el vínculo con las series y las funciones será de vital importancia en el bachillerato, debido al estudio de contenidos de cálculo diferencial e integral.

4.4.2. Una leyenda sobre el origen del ajedrez

Una actividad que formó parte de la secuencia, fue contar a los alumnos una leyenda del juego del ajedrez, la cual está presente en el libro *El hombre que calculaba* de Malba Tahan. Este relato sirvió como referente para plantear el problema del campeonato del ajedrez.

Posteriormente, se les planteó a los alumnos, la siguiente situación: supón que tú eres un matemático del reino de Iadava, describe cómo harías para calcular la cantidad de granos que hay que pagar a Sessa por el obsequio que dio al rey. El planteamiento no buscaba que los alumnos obtuvieran el número de granos, sino que explicaran el procedimiento que harían. Sin embargo, los cuatro alumnos decidieron hacer los cálculos partiendo del número 1 y duplicándolo esperando llegar hasta el 64. El investigador pidió que se detuvieran, los alumnos iban cerca de la casilla 20 pero aún no iban sumando las cantidades. Al pedirles que describieran de manera verbal el procedimiento que seguirían, los cuatro alumnos dijeron que irían duplicando las cantidades hasta llegar a la casilla 64 y posteriormente sumarían todas las cantidades. Su respuesta se da a pesar de que estaban empezando a obtener cantidades muy grandes, aun cuando no llegaban a un tercio de las casillas.

Se corroboró la tendencia de los alumnos hacia estrategias aritméticas de resolución de problemas. Los alumnos suman o multiplican las cantidades a pesar de que saben que dicha estrategia les demandará mucho tiempo. Incluso, parecen no ser conscientes de que llegará un punto en que tendrán que duplicar cantidades muy grandes y después sumarlas. Ningún alumno hizo el intento de desarrollar una estrategia que fuera más eficiente, o que los llevara a una forma de resolución poco habitual.

Para el siguiente planteamiento, aun considerando la historia del rey Iadava, se pedía que calcularan únicamente los granos que correspondían a la casilla 21 del tablero. La estrategia que siguieron Alma y Brenda fue utilizar un tablero de ajedrez que se les proporcionó y escribir en cada casilla el número que le correspondía hasta llegar al valor de la casilla 21. Alma terminó al último, sumaba cada valor de la casilla consigo mismo en un procedimiento iterado hasta llegar a 1,048,576. Brenda terminó poco antes, pero tuvo un pequeño error en sus cálculos. Aunque Ignacio y José terminaron primero, sus resultados fueron incorrectos. Al revisar en colectivo el trabajo que los alumnos hicieron, se presentó la siguiente situación:

- Alma: es un millón, cuarenta y ocho mil, quinientos setenta y seis.
- Investigador: es correcto. A ver dinos tus números para que ellos vayan revisando.
- Alma: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288.
- Ignacio: ¿24?
- Alma: 524288.
- Ignacio: ahí es donde me equivoqué.
- Alma: 1048576.

Al pedirles que escribieran cómo llegaron al resultado, las respuestas fueron las siguientes:

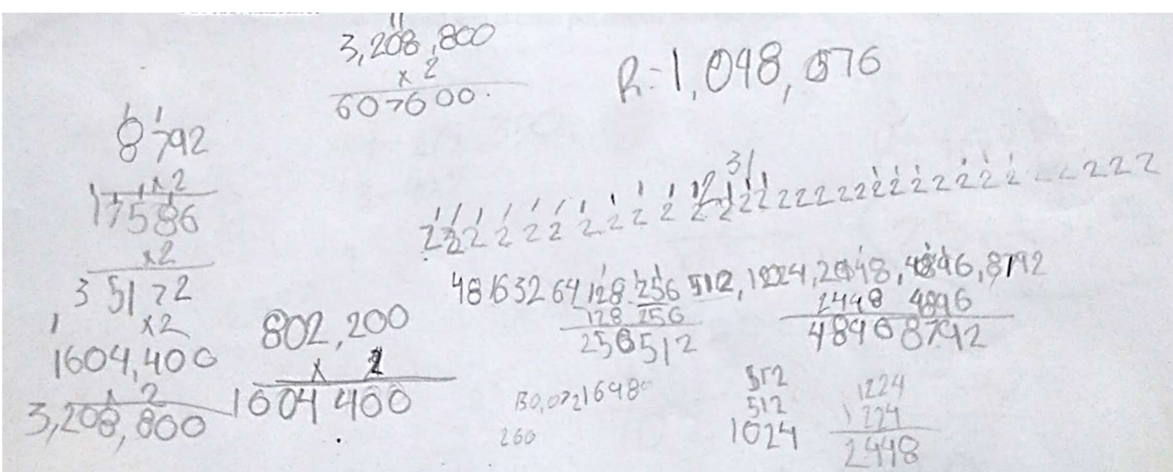
- Alma: yo fui multiplicando × 2 y el resultado lo seguía multiplicando × 2 y así sucesivamente hasta que me saliera 1,048,576
- Brenda: pues fuimos multiplicando por dos cada resultado, por ejemplo, empezamos de 1, 2, 4, 8 etc. así fuimos sacando el resultado de cada casilla.
- Ignacio: duplicando una misma cantidad

$$1 \times 2 = 2$$
$$2 \times 2 = 4$$
$$4 \times 2 = 8$$
$$8 \times 2 = 16$$
$$16 \times 2 = 32$$
$$32 \times 2 = 64$$

— José: lo buscamos por $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ así hasta el 21.

Además, José escribió una serie de operaciones en las que obtenía el producto iterado multiplicado por 2. Cometió un error, en parte derivado de su caligrafía de números, al multiplicar 8192×2, de ahí que el resultado obtenido no fue el correcto. Se puede notar que únicamente escribió el número dos en repetidas ocasiones y marcaba cada número cuando ya lo había multiplicado (ver ilustración 36). En este caso, el alumno relaciona la expresión con la potencia de 2, y se ve en la necesidad de hacer el cálculo a través de duplicar las cantidades cada vez. Sin embargo, al no buscar la generalización, el alumno no relaciona el exponente con la posición. De haberlo hecho, se habría percatado que al restar una unidad a la posición y utilizarla como exponente, habría encontrado como calcular o expresar el número correspondiente a dicha posición en términos de potencias de 2. Incluso si no hubiera hecho la conversión a la expresión 2^{n-1}.

Ilustración 36. Argumento de José a la situación 2 del problema del ajedrez



Fuente: respuesta de José al problema del ajedrez en la secuencia de problemas aplicada al caso.

Brenda da lectura al tercer planteamiento del problema del ajedrez, el cual hace referencia a aplicar la opción del premio 2 del problema del rey Iadava y calcular los granos correspondientes a la casilla 21. Los alumnos comenzaron a hacer nuevamente la sucesión, utilizaron el tablero de ajedrez, por iniciativa propia, para escribir los números, comenzando desde 500, 510, 520 y así sucesivamente hasta llegar a los 700 granos que corresponderían a la casilla número 21.

A pesar de que se trataba de una sucesión aritmética, en la que había que calcular el término que se encuentra en la posición 21, los alumnos se vieron carentes de herramientas para calcular la respuesta. Es decir, a pesar de que en ejercicios anteriores o en clase ellos habían sido capaces de formular una expresión y utilizarla para calcular el enésimo término en una sucesión, en este caso no lo hicieron. Otra forma en la que los alumnos habían resuelto la situación, era multiplicando el valor constante (10) por las veces que se iba a sumar (posición menos uno) y agregarlo a la cantidad inicial (500). Incluso es el método que sugirió José en la situación anterior. Sin embargo, los cuatro alumnos decidieron continuar la sucesión como estrategia de resolución.

Una posible explicación al hecho, es que el alumno ha transitado por la escuela aprendiendo a sobrevivir actuando como se espera que actúe. Es decir, el alumno muchas veces, ante los cuestionamientos del docente, no necesariamente expresa lo que quiere decir, sino que busca un tipo de respuesta que cree que el docente espera escuchar de él. Un ejemplo muy claro de este hecho, es cuando el docente recita una frase, fórmula o definición, y omite palabras para que el alumno la complete (ver diálogo entre docente y alumnos en el apartado 4.1 del presente capítulo). En este caso, el alumno busca una respuesta, pero lo hace pensando más en la palabra que la docente espera, que en aquella que hace que la expresión sea matemáticamente correcta o tenga lógica y coherencia.

Con estas acciones, el alumno limita su creatividad, debido a que cree que lo que él hace no es correcto porque no lo hace como el docente quiere. Así, el alumno se acostumbra a hacer lo que parece estar bien y deja de lado aquellas estrategias que fueron útiles en determinado momento. Sucede lo contrario a los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1948). En este caso, el alumno parece evitar el uso y conexión con contenidos que fueron útiles en determinado momento y centra su atención en lo que en este momento está tratando. Es como si el alumno evitara el obstáculo epistemológico, antes de que el mismo ocurriera.

Es preciso destacar que, de acuerdo con Sierpinska (1994), se puede llegar a la comprensión al superar un obstáculo epistemológico. En este caso, se está limitando tal vía para llegar a la comprensión, puesto que se está evitando el obstáculo, aun cuando este es en muchas ocasiones viable y deseable (Bachelard, 1948). Pero el alumno no es consciente de ello, no sabe que muchas de las cosas que aprendió en determinado momento, traerán consigo dificultades para aprender cosas nuevas. Para él ha funcionado responder como se espera que responda, actuar como se espera que actúe y hacer lo que le indican como le indican; por ese motivo es muy probable que continúe haciéndolo para evitar situaciones que lo pongan en aprietos.

Es por ello que, si el docente desea que sus alumnos comprendan un tema, lo único que puede hacer es poner al alumno en situaciones de comprensión. Para tal cometido, es preciso tener conciencia de en qué consiste un acto de comprensión (Sierpinska, 1994, pp. 44-45).

4.4.3. La limpieza de los cristales de un edificio

En el último planteamiento, la situación que se propone es sobre el costo de la limpieza de los cristales exteriores de un edificio. Las condiciones del problema son: el costo es de $350 por el primer piso y cada piso adicional son $25 pesos más. La pregunta del problema es ¿cuál será el costo por limpiar el piso 27? Los alumnos trabajan en parejas, Ignacio y José dan lectura al problema y comentan los siguiente:

- José: en cada piso se le van sumando 25, del primer piso son 350 pero se le van a ir sumando 25, o sea que el segundo va a ser de…
- Ignacio: 375, el segundo ¿no?
- José: Luego el tercero, ¿cuánto sería? 400 ¿no?
- Ignacio: nomás multiplica 25 por 27 y ya se lo sumamos ¿no? —señalando el 350—.
- José: no…
- Ignacio: sí, porque dice, para limpiar los vidrios del primer piso la empresa… no, no, espera, porque dice, para limpiar los vidrios del primer piso, entonces es 350 por 27 y da el resultado, luego 25 por 27 y ya lo sumamos… y cada piso adicional cuesta más que el anterior.
- José: por eso, se van sumando 25 cada piso.
- Ignacio: 350 por 27.

— José: si es 27 por 25.

— Ignacio: sí, entonces sí es 27 por 25 —comienza a hacer la multiplicación— 675 más 350 —sigue calculando— 1025.

— José: 1025 —afirma después de hacer sus cálculos—. Pero ahora es hasta el piso 35 ¿no?

— Ignacio: 35 por 25 —hace la operación— 875 más 350… son 1225. Entonces ya quedó.

En esta fase del problema, los alumnos analizaron brevemente las condiciones del problema y cuando consideraron que habían comprendido el planteamiento decidieron planear una estrategia. Sin embargo, al releer la pregunta, surge cierta confusión en relación si la diferencia es 25 o 350. Ignacio se confunde al considerar que 350 es el costo que aumenta por cada piso. Esto sucede cuando relee "para limpiar los vidrios del primer piso", debido a que el costo del primer piso es \$350. José le hace énfasis en que el aumento en el costo de la limpieza por cada piso es de \$25. A partir de ese momento, los alumnos establecen su algoritmo y lo aplican para el siguiente cuestionamiento: multiplican el número de piso por la constante (25) y lo agregan al costo del primer piso (350).

En el algoritmo que aplican, los alumnos no parecen ser conscientes de que en el primer cálculo no se debe considerar el costo adicional por piso (\$25). De haber aplicado el proceso que sugiere la docente probablemente se habrían dado cuenta. Vale recordar que, en dicho procedimiento, una vez formulada la expresión algebraica, el siguiente paso era validarla. En este caso, la expresión que engloba las operaciones que los alumnos hicieron es $25n + 350$. La expresión correspondiente con la sucesión de la situación es: $350 + 25(n - 1)$, desarrollando: $350 + 25n - 25$, simplificando: $25n + 325$. Al evaluar la primera posición en la expresión correspondiente con las operaciones de los alumnos, el resultado es 375. Es decir, sobran los 25 adicionales por piso, puesto que en el primer piso no se cobran.

— Investigador: ok dice ¿cuál será el costo por limpiar solo ese piso?, 1025. ¿Cómo le hicieron?

— Ignacio: multiplicamos 25 por 27 y luego ya se lo sumamos a 350.

— José: porque dice que el primer piso cuesta 350 y multiplicamos 27 por 25 porque 25 son los adicionales que te cobra y 27 es el piso.

— Ignacio: y ya 350 se le va aumentando los 25 de acuerdo al piso.

— Investigador: pero esos 350 ¿de qué son?

- José: del primer piso, por eso se los sumamos al último para no empezar de 350 y así. Y el de abajo igual, 25 por 35 y hasta el último le sumamos 350, salió 1225.
- Investigador: ok, eso sería por limpiar ¿qué?
- José: por limpiar el piso 35.
- Investigador: debe ser de todo el edificio.
- José: será lo mismo, ¿no?
- Ignacio: no porque este —refiriéndose al resultado de 1225— nada más es del piso 35.
- José: sí, nomás le sumamos.

Este diálogo muestra dos situaciones: la primera es que los alumnos, a pesar de los cuestionamientos del investigador, así como de la recapitulación de su procedimiento no se percatan que consideraron 25 más en el primer piso; la segunda situación refleja, lo que se mostró en el apartado 4.4.1, que los alumnos confunden las situaciones que implican una serie con aquellas que tratan sobre sucesiones. En el primer caso, los alumnos parecen centrar más la atención en esperar la aprobación o desaprobación de su proceder o del resultado, en lugar de explicar a conciencia cómo llegaron al resultado. En el segundo caso, no fue tan complicado que, por lo menos Ignacio, se percatara que ellos calcularon el costo del piso 35 y no la suma del costo de los 35 pisos del edificio (serie).

El diálogo continuó con la pareja de trabajo de José e Ignacio. El investigador pidió que escribieran la generalización de las operaciones que hicieron.

- Investigador: antes de que contesten eso último, les voy a preguntar ¿habría una forma de escribir esto —las operaciones— como una fórmula?, de forma que me permita calcular el costo de cualquier piso.
- Ignacio: ah es lo de las sucesiones ¿no?
- José: de las sucesiones… pues se le va sumando el mismo número, pero pues multiplicado. Es que el que se va sumando es el 25 —afirma después de un silencio entre ambos— 25, 50, 100, 125…
- Ignacio: ah es la fórmula de la sucesión.
- José: la “c”, la diferencia.
- Ignacio: diferencia por posición, más o menos constante.
- José: ah sí, saca la diferencia es 25, eso por posición, más la constante… es 27 la posición porque está en el piso 27, ah, pero es 1 por si estamos en el piso 1.
- Ignacio: pero la constante ¿cuál es?

— Investigador: ¿qué significa constante?
— Ignacio: el número que se va a multiplicar para encontrar la sucesión.
— José: no eso es lo de diferencia, es lo que hay entre uno y otro.
— Investigador: ¿qué es lo que hay entre uno y otro?
— José: en este caso es 25.
— Investigador: ¿qué es lo que hicieron ustedes con ese 25?
— José: lo multiplicamos por el piso, por el piso que queríamos saber.
— Investigador: sí, si se dan cuenta ustedes ya lo hicieron.
— Ignacio: ah la constante es 350 porque todos los pisos llevan el 350 más lo que fue aumentando de los 25.
— José: entonces la fórmula queda $25n + 325$.

En los comentarios del alumno, es posible observar que Ignacio confunde la diferencia con lo que la docente denomina en la fórmula como constante. Tal confusión, se da porque el alumno no ha logrado la comprensión de lo que representa una sucesión. De manera más específica, puede decirse que existen por lo menos dos factores identificados que influyen en tal confusión, los cuales están directamente relacionados con las acciones que tienen lugar en el aula. Primero se encuentra el hecho de que, en las definiciones de sucesión que se dieron en clase (ver apartado 4.1), los alumnos asocian sucesión con el aumento de un mismo número o cantidad. Esa noción, se relaciona directamente con la idea de constante. Incluso, en la definición considerada en el presente trabajo (Lehmann, 2009, p. 214), se menciona a un número fijo que se aumenta al número anterior. Aunque, tal número es denominado diferencia, no puede desvincularse con la idea de que es una cantidad constante. De esta forma, se produce la confusión entre la constante que, en la expresión dada por la docente, se suma o resta al final y la diferencia de la sucesión que también es una cantidad constante.

En segundo lugar, se presenta la confusión debido a la estructura de algunos ejercicios que se trabajaron en el aula. En varias situaciones, el planteamiento tiene la siguiente forma: dada una sucesión encontrar la fórmula que la define y utilizarla para calcular el término que se encuentra en determinada posición. Y tal como se mostró en el trabajo que desarrolló la docente con los alumnos (ver apartado 4.1), hubo ejercicios en los que el valor de la diferencia (coeficiente) coincide con la constante (término independiente). Algunos ejemplos son: $2n + 2; 5n + 5; n + 1$.

La situación se complica cuando los alumnos se guían con los ejercicios que resuelven con la docente. Al tomar tales ejemplos como modelo, suelen escribir los mismos números que en el ejemplo o copiar la estructura; en este caso pueden llegar a pensar que el valor de la diferencia y la constante es el mismo siempre.

Por otro lado, en el diálogo anterior también pudo observarse la dificultad de la generalización, lo complicado que puede resultar para los alumnos transformar las representaciones. En este caso, los alumnos habían descrito el procedimiento que hicieron para llegar a una respuesta, pero se les dificulta llegar a "traducir" dicha descripción a una expresión del lenguaje algebraico. En este caso, el trabajo que tienen que hacer los alumnos está mediado por la codificación, promovida por el uso de la fórmula (ver ilustración 6). La dificultad de la conversión misma, se ve enaltecida por otra que es intrínseca al proceso, el uso de menos símbolos que objetos o frases (Duval, 2006, p. 146). Por fortuna para los alumnos, en este caso, no se requirió un tratamiento de la expresión, como el que se ostenta en el grado 6 del análisis de las respuestas en los cuestionarios; relacionado con la conversión de representaciones (Duval, 2016) y la síntesis como operación mental superior relacionada con la comprensión (Sierpinska, 1990).

Retomando los diálogos de la sesión, Alma y Brenda comienzan dando lectura al planteamiento del problema, la lectura corre a cargo de Brenda. Discuten un poco para lograr captar lo que el enunciado platea y lo que les cuestiona, posteriormente piensan en la solución:

— Brenda: cada piso adicional cuesta… ah, 25 más que el anterior.
— Alma: veintisiete por veinticinco —comienzan a hacer sus operaciones—. Seiscientos setenta y cinco.
— Brenda: si, a mí también.
— Alma: pero creo que aquí se le suma 350, porque para limpiar el primer piso se cobran $350 y cada piso adicional son los $25.
— Brenda: entonces si se le tiene que sumar ¿no? porque dice que son ¡más que el anterior!
— Alma: salió 1025.
— Brenda: si, ¡ya! —regresa el investigador—.
— Investigador: este 27 por 25 ¿qué representa? —señalando la primera operación—
— Brenda: cuando lo leímos pensamos que este era el costo (25) y luego lo multiplicamos por este piso (27), nos dio 675 y luego le sumamos esto (350) y ya quedo 1025.

— Investigador: ¿están seguras de su resultado?

— Alma: mejor vamos a comprobarlo —el investigador se retira—.

— Brenda: —utilizando el tablero de ajedrez— supongamos que este es un edificio, ¿cuántos pisos tiene?

— Alma: ocho, a ver —traza un polígono marcando 27 casillas— ya quedó, supongamos que es el edificio. —mientras Brenda hace cálculos— ya capté, ya capté… mira, ¿cuánto cobraron? —pregunta por el primer piso—.

— Brenda: son 350.

— Alma: ya está mira, son 350 —escribe el número en la primera casilla de las que marcó y continúa la sucesión, apoyada por Brenda, hasta llenar las casillas que marco— 375, 400, 425, 450, 475, 500, 525, 550, 575, 600, 625, 650, 675, 700,725, 750, 775, 800, 825, 850, 875, 900, 925, 950, 975, 1000.

— Brenda: nos salió 1000 —señalando la operación que mostraron al investigador— pero más 25… ah, es que yo le había sumado 25 —señalando que en la primera casilla había considerado 375 en lugar de 350—.

Las alumnas, al igual que sucedió con sus compañeros, consideraron en un principio la diferencia desde la posición inicial (0). Es decir, estaban multiplicando 25 por el piso cuyo costo de limpieza buscaban calcular. En ese caso, estaban considerando el costo de $375 para el primer piso y no $350 como indica el enunciado. La estrategia que siguieron, para comprobar su procedimiento y asegurar que su resultado era correcto, fue seguir la sucesión. Al llegar a un resultado con una diferencia de 25 por debajo de lo estimado en un principio, cayeron en cuenta que habían considerado $25 de más para el primer piso, siendo que estos solamente eran cobrados a partir del segundo piso.

Luego que se percataron de la cantidad que consideraron de más, una vez que corrigieron y estuvieron seguras de su respuesta, les cuestioné acerca de una expresión algebraica que definiera la sucesión. A pesar de que el objetivo no era llevar a los alumnos a mecanizar, o que demostraran si podían formular la expresión algebraica que define al enésimo término de una sucesión, se consideró importante ver cómo reflejaban el trabajo en clase después de pasado un tiempo. La consigna entonces fue, que escribieran una expresión algebraica o fórmula que les permitiera calcular el costo de cualquier piso. Después de explicar a las alumnas lo que tenían que hacer y una vez que se consideró que lo habían comprendido, se dio el siguiente diálogo:

- Brenda: —después de pensar un momento— 350… es que no sé, si se sumara este —señalando la representación del piso 1— quedaría la fórmula: más veinticinco por piso —anota $350 + 25 \times piso$—.
- Alma: es así, esto (27) lo multiplicamos por esto (25) y le sumamos 350.
- Brenda: al final le restamos 1 —hace referencia a 1 tanto de 25 que suma por cada piso—.
- Alma: si quedaría como dices.
- Brenda: ¿qué hicimos? Veintisiete por veinticinco, le quitamos veinticinco y queda.
- Alma: ¡ya quedó! —la expresión que escribieron fue $(27 \times 25) + 350 - 25 = 1000$—.
- Investigador: —recién se acerca— ok, algunas veces no va a ser 27.
- Alma: puede ser 35.
- Investigador: sí, si quisieran saber del último piso, o puede ser cualquier otro de los pisos. Entonces, ¿cómo podemos representar un número que algunas veces tiene un valor y para otras situaciones otro valor?
- Brenda: con una letra.
- Investigador: ¿qué va a representar esa letra?
- Alma y Brenda: el número de piso.
- Investigador: ok, ¿cómo quedaría entonces su expresión? —se retira—.
- Alma: listo —escribió $(M \times 25) + 350 - 25$—.

Este diálogo refleja que, en un primer momento, Brenda llegó a la generalización expresada en forma sincopada (Malisani, 1999). Ella describe en una expresión lo que realizó en un primer momento, antes de restar 25 que consideraron de más. En la discusión, Alma sugiere el mismo procedimiento, pero considerando el valor del piso que plantea en la situación anterior. Es decir, Alma busca construir la expresión para el piso 27 y no como una expresión general para cualquier número de piso. Alma y Brenda retoman la expresión que escribió Brenda en un primer momento y la reescriben como una expresión aritmética en la que restan los 25 que aumentaron al costo por limpiar el primer piso.

Es a partir de los cuestionamientos que se les plantean, en los que se hace énfasis en la variable en su sentido general, que las alumnas logran representar el valor de la posición con una literal. Alma y Brenda son conscientes de que el número de piso no será el mismo para diferentes situaciones, en las que los costos son diferentes. Por ello, si desean calcular el costo de un piso tendrán que utilizar el número del piso, sustituirlo en la expresión y simplificar. Saben también que, para un costo distinto, necesariamente el número de piso será otro. Recuerdan entonces la sugerencia de la docente de representar las cantidades desconocidas, o que cambian su valor, con una letra. De esta forma llegan a la expresión $(M \times 25) + 350 - 25$.

Esta última expresión que escriben, como la que define los términos de la sucesión de la situación planteada, pone de manifiesto la complejidad de la conversión de representaciones. Al respecto, Duval (2006) afirma que en aquellas situaciones de conversión que se alejan de una codificación, se tornan complejas por el uso de menor cantidad de símbolos y por el tratamiento que hay que dar a las representaciones, una vez convertidas (Duval, 2006, p. 147). En este sentido, la situación deja de ser congruente cuando los alumnos hacen el tratamiento de la expresión algebraica, resultado de una conversión desde una expresión en lenguaje natural. Aunque parece demasiado sencillo, para los alumnos resulta complicado reescribir y simplificar la expresión $(M \times 25) + 350 - 25$ como $25M + 325$.

Ilustración 37. Conversión del enunciado de un problema en contexto, a una expresión algebraica

Conversión

El costo por la limpieza del piso 27 se calcula al multiplicar los $25 adicionales por el piso, se suman los $350 del primer piso y se restan 25 que no se cobran en el primer piso.

$$(M \times 25) + 350 - 25$$

Tratamiento

El producto del costo adicional por piso con la incógnita del piso se puede reescribir de manera más simple. La diferencia se puede resolver para simplificar la expresión.

$$25M + 325$$

Fuente: elaboración propia a partir de los planteamientos sobre las conversiones congruentes y no congruentes (Duval, 2006), así como de la respuesta de dos alumnas a la situación 3 de la secuencia de problemas de sucesiones.

El formato en el que las alumnas construyeron la expresión, la cual convirtieron a partir de lo que hicieron para responder el cuestionamiento, tiene mucho sentido con su proceder. Es decir, la expresión convertida tiene relación directa con los procedimientos que hicieron para llegar a los \$1000, que cuesta la limpieza del piso 27. Sin embargo, a partir de esa expresión, el número 325 que resulta de la diferencia escrita, no hace mucho sentido puesto que no apareció en las operaciones que ellas resolvieron. La expresión $25M$, que ellas escribieron como $(M \times 25)$, requiere conocimiento de escritura algebraica. Además, implica reconocer que el 25 como coeficiente, significa que la diferencia de la sucesión se suma tantas veces indica el valor del piso a calcular. Se considera que, si los alumnos dominaran dichos conocimientos, no tendrían mayor problema al resolver situaciones relacionadas con sucesiones aritméticas. En consecuencia, el tránsito entre la aritmética y el álgebra sería mucho más simple para ellos.

Por otra parte, en relación con el tipo de respuestas que los alumnos dieron, derivado de la clasificación empleada en los cuestionarios, se considera que los alumnos logran la conversión de representaciones (Duval, 2016) y la generalización como operación mental relacionada con la comprensión (Sierpinska, 1990). Sin embargo, ambas se dan como una especie de codificación, en la que se sigue un camino determinado, promovido por un algoritmo determinado y aprendido en clase. De esta forma, cuando el alumno se enfrenta a situaciones distintas a las revisadas cotidianamente, se encuentra en un conflicto y no puede aplicar los conocimientos adquiridos. Por tal motivo, se considera correcto afirmar que los alumnos se encuentran en una fase de transición, entre el tratamiento y la conversión de representaciones, así como entre la discriminación y la generalización.

El predominio del tratamiento de representaciones se evidencia cuando los alumnos, acostumbrados al uso de un solo registro de representación, resuelven operaciones a través de métodos aritméticos. Es decir, el proceso que generalmente siguen los alumnos es comprender la situación, aislar los datos, operar con ellos y dar una respuesta. Tales acciones siempre se dan actuando dentro de un mismo registro, haciendo uso cuando mucho de representaciones auxiliares, pero sin hacer una transformación de representaciones. Tal como se evidenció en el análisis de los cuestionarios, y en la secuencia que resolvieron los alumnos seleccionados, la mayoría de las respuestas son del grado 4. En este tipo de respuestas, los alumnos hacen operaciones aditivas y multiplicativas para dar una respuesta, pero siempre actuando en un registro de representación; a pesar de hacer procedimientos similares a los que harían cuando hacen la conversión de representaciones.

En el mismo sentido, la generalización se mira cercana a los procedimientos de los alumnos, sin embargo, no llega a considerarse consolidada en el tema de sucesiones. En relación con la identificación y la discriminación, no parecen tener mayor problema, salvo la confusión que existe entre situaciones que implican una sucesión y aquellas que implican una serie. A pesar de que los alumnos, en algunas situaciones limitan su estrategia a una parte especifica de los planteamientos, procuran extender sus métodos de resolución hacia problemas similares.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

PRESENTACIÓN

En este capítulo, perfilando el cierre de la investigación, se presentan los aspectos más relevantes derivados del estudio que se llevó a cabo. Se hace una breve recapitulación del trabajo y los elementos destacables del proceso. Dichos elementos permiten elaborar afirmaciones concluyentes que dan cuenta de los objetivos trazados y responden al planteamiento inicial que motivó la investigación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el apartado 4.1, se describió el trabajo de la docente con los alumnos, en torno al tema de sucesiones aritméticas. Esto fue posible, a partir de la observación asistemática que se desarrolló en el aula de matemáticas de primer grado. En este ejercicio, se tuvo oportunidad de dialogar con los alumnos, ahondar en sus ideas y en su percepción sobre las actividades que propuso la docente.

A partir de ese trabajo, se percibió la importancia que tienen las representaciones auxiliares para que los alumnos reconocieran patrones sencillos. En algunas actividades planteadas en clase, en las que se involucraban patrones de color o crecimiento en cantidad de elementos en una figura, los alumnos reconocen fácilmente aquellos términos que continúan una sucesión. Debido a la habilidad que los alumnos mostraron, no se profundizó en el trabajo con figuras. En contraste, se optó por utilizar las figuras para representar patrones de crecimiento en cantidad de elementos. Es decir, las sucesiones figurativas se convirtieron en representaciones auxiliares de sucesiones de números. Por tal motivo, el alumno reduce su uso a contar los elementos de cada término en la sucesión y escribir una sucesión de números.

Este fue el primer paso hacia la construcción de un algoritmo, el cual fue utilizado para que el alumno pasara de una sucesión aritmética, a la formulación de una expresión algebraica que la defina; se concluye con el uso de dicha expresión para el cálculo de algunos términos pertenecientes a la sucesión. A pesar de ello, se reconoce que la docente logra poner a los alumnos en situación de identificar el objeto de estudio. En este caso, se vale de situaciones similares a las que los alumnos revisaron desde los primeros grados de escolarización. Los alumnos buscan los patrones, a partir de los cuales puedan encontrar los términos subsecuentes en una sucesión, no importando si se trata de sucesiones aritméticas o geométricas, continuas o alternas.

El segundo momento clave de las clases observadas se da en la misma sesión, cuando la docente promueve que los alumnos vinculen la obtención de los términos de la sucesión, a la posición de los mismos. En un primer momento, esta situación saca de balance a los alumnos, puesto que para ellos es más simple obtenerla a partir del término anterior. En este caso, se valen de operaciones aditivas para resolver la situación. No es hasta que se acostumbran al uso de operaciones multiplicativas, que logran hacer sus procedimientos más eficientes.

A partir de ese momento, la docente promueve el uso de una expresión ($Dn \pm c$), para que los alumnos puedan sustituir sus componentes, por los valores que obtienen de una sucesión aritmética. De esta forma, los alumnos formulan una expresión algebraica que les permiten calcular cualquier término de una sucesión aritmética.

En ese sentido, considerando que las representaciones semióticas están mejor identificadas por el registro al que pertenecen, se observó que las representaciones cuyo uso se promueve en el aula pertenecen a los registros de lenguaje natural y lenguaje algebraico. A partir de las representaciones de estos dos registros, se buscó que el alumno lograra hacer la conversión. Sin embargo, el trabajo del alumno se ve reducido a una codificación, en la que cada elemento identificado del primer registro tiene una correspondencia directa con una representación en el registro de llegada. Para el alumno, el número que encontraba como diferencia entre términos representa el valor de la literal D. Al sustituirlo y evaluarlo en los primeros términos, se podría encontrar el valor de c.

Aunado a lo anterior, el objeto matemático al que se busca llegar es opacado por el medio, a través del cual se puede llegar a conocer dicho objeto. En este caso, la búsqueda de patrones, la generalización de expresiones y el análisis de las propiedades de las sucesiones, se ven disminuidas por el aprendizaje de fórmulas. La memorización de la fórmula general para encontrar la fórmula de una sucesión aritmética, se vuelve el centro de las actividades del aula, de la práctica docente y las acciones del alumno.

De todo ello, se puede afirmar que en el aula observada existe el uso de únicamente dos registros de representación, entre los cuales el tratamiento es amplio pero la conversión se limita a una codificación. A pesar de que los registros de representación para las sucesiones aritméticas no son muy variados, el vínculo con otros contenidos ofrece oportunidades de aprendizaje transversal. Tal es el caso de las funciones. Al relacionar las sucesiones con las funciones, se abre la posibilidad de ampliar el uso del registro del lenguaje algebraico, así como el uso del registro gráfico de representación de funciones. Tal como lo plantea Duval (1993, 2006, 2016), de esta manera se puede promover que los alumnos logren la comprensión en matemáticas, al establecer relaciones entre al menos dos registros de representación semiótica. Esto se logra a través de la transformación de representaciones, del tratamiento y sobre todo de la conversión.

La conversión, considerada como un salto cognitivo (Duval, 2006), implica que la misma no pueda ser reducida a una simple codificación. Por lo mismo, se considera que el uso que se da a los registros empleados en clase, limita la comprensión del estudiante, porque se aplica como una codificación. Si bien, la actividad suscita la ejercitación y aproximación a ciertas propiedades del lenguaje algebraico, no promueve la comprensión de las relaciones existentes entre formas aritméticas de resolver una situación y el razonamiento algebraico (generalización del proceso).

En el mismo sentido, el trabajo desarrollado por los estudiantes mostró que emulan la actividad docente en clase. Utilizan ejercicios anteriores como guía, incluso se hacen uso de los mismos valores para la construcción de expresiones algebraicas. Gran parte de los alumnos, logran recordar la fórmula que se les fue dada para obtener expresiones generales, que definen a una sucesión aritmética, aunque la mayoría de ellos no la aplica de manera satisfactoria. Pasado un tiempo, los alumnos olvidan la forma en la que resolvían situaciones que implican una sucesión aritmética. En este escenario, recurren a métodos más familiares como el uso de operaciones aditivas y multiplicativas, así como a procedimientos más sencillos como continuar una sucesión.

De esta forma, se encontró que los alumnos resuelven ejercicios de sucesiones aritméticas a través de la fórmula general para obtener la fórmula de una sucesión aritmética. Lo hacen siempre y cuando el ejercicio propuesto tenga una estructura similar con aquellos planteados en clase. La situación cambia cuando se varían dos factores: a) el tiempo que ha transcurrido desde que se trabajó con dicho contenido; b) el contexto o la estructura de las situaciones propuestas. En el primer caso, es notorio que, a un par de meses de trabajar el contenido en clase con la docente, los alumnos olvidaron los procedimientos enseñados por la docente. Algunos de los esfuerzos realizados por los alumnos, tienen que ver más con recordar la fórmula proporcionada por la docente ($Dn \pm c$), que en recordar las relaciones entre las variables de una sucesión.

Por otra parte, tanto en la aplicación del primer instrumento como en el desarrollo de la secuencia con los 4 alumnos seleccionados, se hizo patente el hecho de que, al plantear las sucesiones en un contexto determinado, los alumnos tienen dificultad para relacionar los contenidos aprendidos. De acuerdo con Duval (2016), este tipo de dificultad se relaciona directamente con las limitaciones que el alumno encuentra para hacer la conversión de representaciones. Es decir, la imposibilidad o dificultad del alumno, para hacer conversión de representaciones entre registros semióticos, es muestra de que no ha podido vincular el conocimiento adquirido con aquello que está por aprender. En consecuencia, existe una limitante en la comprensión y en el aprendizaje de las matemáticas.

Al presentarse los dos factores mencionados, los alumnos ven reducidas sus estrategias y se miran en dificultades de hacer la devolución de una situación adidáctica (Brousseau, 1997). Sus herramientas se reducen a utilizar operaciones aditivas, multiplicativas y el uso de las mismas representaciones, para responder a cuestionamientos en los que las sucesiones aritméticas son eje central. En otros casos, en los que recuerda el trabajo de las sesiones pasadas, emulan el trabajo de la docente en el uso de una fórmula y la sustitución de sus elementos a través de una codificación. Si lograron identificar que la situación implica una sucesión, e interpretaron de manera correcta el planteamiento, suelen dar una respuesta correcta.

En suma, el nivel de comprensión mostrado por los alumnos los pone en una situación de tránsito entre los procedimientos aritméticos y el razonamiento algebraico. Es decir, los alumnos logran identificar situaciones que tienen que ver con las sucesiones aritméticas, en su mayoría discriminan aquellas situaciones que no tienen una relación directa con el contenido. Sin embargo, a pesar de que logran expresar en lenguaje natural algunas generalizaciones de sus procedimientos, no llegan a transitar entre diferentes registros de representación. Lo cual es requisito esencial para adentrarse en el estudio del álgebra.

En relación con la comprensión de las sucesiones, de acuerdo con las operaciones mentales involucradas en la comprensión propuestas por Sierpinska (1990), las cuales pueden ser concebidas como niveles, los alumnos se encuentran en una fase de ingreso a la generalización. Es decir, en la resolución de actividades en las que las sucesiones aritméticas son el eje principal, los alumnos logran identificar la situación. Además, en la mayoría de los casos logran hacer una discriminación inter-situación (distinguir una sucesión aritmética de otro tipo de sucesiones o de las mismas series) e intra-situación (dentro de una misma situación discrimina procedimientos eficientes de aquellos que no lo son). Pueden expresar generalizaciones de manera verbal, incluso demostrarlos mediante operaciones, sin embargo, tiene dificultades para expresarlos en lenguaje algebraico.

El nivel de identificación, está directamente relacionado con la habilidad de encontrar patrones y regularidades, la cual se vio fortalecida desde los primeros años de escolarización y durante todo el trayecto en la escuela primaria. Prácticamente, la totalidad de los alumnos logran dicho nivel sin problema alguno. En cuanto a la discriminación, aunque no lo enuncian, identifican cuando se trata de una sucesión aritmética por el tipo de patrón que la define. Únicamente se llega a presentar confusión al resolver situaciones que tienen que ver con series aritméticas, tratándolas de resolver como sucesiones aritméticas. Una vez identifican que la situación tiene relación directa con las sucesiones aritméticas, excluyen procedimientos aditivos y utilizan procedimientos multiplicativos al resolver la situación; utilizan el patrón para multiplicar por la posición y así hallar una respuesta.

En cuanto a este último punto, existe una conexión directa con las primeras ideas de generalización. Los alumnos llegan a expresar a través de operaciones la estructura de una generalización como la que les compartió la docente. Lo hacen incluso una vez que parecen haber olvidado la fórmula proporcionada y el modo en que se resolvían dichas situaciones. Por este motivo, se considera que los alumnos están dando los primeros pasos hacia las generalizaciones propias del álgebra y la generalización como nivel de comprensión. Sin embargo, hace falta el tránsito entre registros de representación, es decir, la conversión de representaciones semióticas de un registro a otro. En este punto es donde las principales teorías empleadas tienen un punto de encuentro. En suma, el trabajo desarrollado en la investigación permite hacer algunas afirmaciones concluyentes:

- Las actividades que se llevaron a cabo en el aula observada, promueven el uso limitado de representaciones. Esto se debe a que no se establecen conexiones con otros contenidos y, en consecuencia, no se pueden variar los registros de representación empleados.

- Las transformaciones son limitadas en las actividades de un tema crucial como las sucesiones aritméticas. En el caso del tratamiento, los alumnos no trascienden lo habitual al resolver problemas: tratan de entender el planteamiento, aíslan datos y buscan una respuesta lógica en la operación de los mismos. En el caso de la conversión de representaciones, esta se limita a una codificación, desarrollando ejercicios con estructura idéntica y siguiendo una serie de pasos para obtener y usar una expresión general en lenguaje algebraico.
- El uso de las representaciones que hacen los alumnos, es el mismo que el de la docente; los alumnos emulan el trabajo de la docente y resuelven las situaciones relacionadas con las sucesiones aritméticas como se hicieron en clase. Al variar el contexto de las situaciones propuestas, el alumno tiene dificultades para dar una respuesta satisfactoria, haciendo uso de las herramientas propuestas por la docente.
- El nivel de comprensión de los alumnos, en relación con el tema de sucesiones es limitado. Ellos logran identificar y discriminar los planteamientos, aunque una cantidad considerable confunde sucesiones con series. Aquellos que logran discriminar situaciones tiende a una generalización dentro de registros de representación que les son familiares (lenguaje común), sin embargo, no logran hacer una conversión de representaciones a otro registro (lenguaje algebraico).

Se considera que el objetivo trazado para el desarrollo de la investigación fue logrado. Esto se da al describir la comprensión que logran los estudiantes a partir del uso y transformación de representaciones. Así mismo, se revisa el trabajo docente, los alumnos y el vínculo entre los mismos. A partir de ese análisis, se establecen los registros empleados y las transformaciones que se dan entre los mismos para dar una respuesta a la pregunta que generó la investigación. En suma, se da cuenta de la comprensión de las sucesiones aritméticas, que logran los estudiantes de primer grado de secundaria que conformaron el caso.

FUENTES DE CONSULTA

BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Segunda ed.). (M. Sandoval Pineda, Trad.) México: Trillas.

Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: Siglo veintiuno editores.

Baldor, A. (2005). Capítulo XXVII PROGRESIONES. En A. Baldor, *Álgebra* (págs. 490-507). México: Grupo Editorial Patria.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990.* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield, Edits., N. Balacheff, M. Cooper , R. Sutherland, y V. Warfield, Trads.) Klower Academic Publishers.

Bunge, M. (1995). *La ciencia. Su método y su filosofía.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Sudamericana.

Camarena, P. (2015). La educación matemática en el siglo XXI: conclusiones del presente y futuro. En X. Martínez Ruiz, y P. Camarena Gallardo (Edits.), *La educación matemática en el siglo XXI* (págs. 319-341). México: Instituto Politécnico Nacional.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: COMARES.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique.

D'Amore, B. (2005). *Bases Filosóficas, Pedagógicas, Epistemológicas y Conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Barcelona: Editorial Reverté.

De la Peña, J. A. (1999). La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas. *Universidad de México*(578-579), 12-18.

Durán, R. (1999). Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria (Tesis de maestria). México: CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval, y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas* (págs. 61-94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Eco, U. (1988). *Segno.* Barcelona: Editorial Labor.

Freudenthal, H. (1983). Major problems of mathematics education. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, y M. Suydam (Edits.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (págs. 1-7). Berkeley, California: Birkhäuser.

García Martínez, A., Escarbajal Frutos, A., y Escarbajal De Haro, A. (2007). Capítulo I: La cultura. En A. García Martínez, A. Escarbajal Frutos, y A. Escarbajal De Haro, *La interculturalidad. Desafío para la educación* (págs. 19-42). Madrid: Gykinson.

Gardner, H. (2000). *The disciplined mind. Beyond facts and standardized tests, the K-12 education that every child deserves.* Nueva York: Penguin Books.

Giroux, H. A. (1992). Ideología, Cultura y Escolarización. En H. A. Giroux, *Teoría y Resistencia en Educación* (págs. 157-212). México: Siglo XXI.

Godino, J., Castro, W. F., Aké, L. P., y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 483-511.

Gracián, E., Corbalán, F., y Navarro, J. (2019). *La magia de las matemáticas: Un viaje fascinante al universo de los números.* Madrid: RBA Bolsillo.

Hernández, G. (2011). Descripción del paradigma psicogenético y sus aplicaciones e implicaciones educativas. En G. Hernández Rojas, *Paradigmas en psicología de la educación* (págs. 169-209). México: Paidós.

Hidalgo, J. L. (1992). *Investigación educativa. Una estrategia constructivista.* México: Paradigmas ediciones.

Ifrah, G. (2008). *Historia universal de las cifras.* Madrid: Espasa.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2016). *PLANEA: Una nueva generación de pruebas*. México: Autor.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2019). *Informe de resultados PLANEA 2017. El aprendizaje de los alumnos de tercero desecundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas.* México: Autor.

Issacs, N. (1967). *Nueva luz sobre la idea de número en el niño.* Argentina: Paidós.

Kline, M. (1998). *El fracaso de la matemática moderna porque Juanito no sabe sumar* (decimoctava ed.). Madrid: Siglo veintiuno editores.

Kristeva, J. (1988). *El lenguaje, ese desconocido.* (M. Antoranz, Trad.) Madrid: Fundamentos.

Lehmann, C. H. (2009). Progresiones. En C. H. Lehmann, *Álgebra* (págs. 213-232). México: Limusa.

Masami, I., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases.* Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA, 4*(3), 232-247.

Meece, J. L. (2001). *Desarrollo del niño y del adolescente. Compendio para educadores.* México: McGraw-Hill.

Mendizábal, N. (2006). Los componentes del diseño flexible en la investigación cualitativa. En I. Vasilachis de Gialdino (coord.), *Estrategias de investigación cualitativa* (págs. 65-105). Barcelona: Gedisa.

Montesinos, J. L. (2000). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiótica.* Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Edits.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (págs. 189-223). Melbourne: Kluwer Academic Publishers.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Granada, España: Ediciones Aljibe.

Sáenz-Ludlow, A. (2016). Metafora y diagramas numéricos en la actividad aritmética de un grupo de estudiantes de cuarto grado. En R. Duval, y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (págs. 127-156). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Santiago, P., McGregor, I., Nusche, D., Ravela, P., y Toledo, D. (2012). *Revisiones de la OCDE sobre la Evaluación en Educación.* México: OCDE.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Saussure, F. (1989). *Curso de lingüistica general.* México: Alianza Editorial.

S**ecretaría de Educación Pública.** (1993). *ACUERDO número 182 por el que se establecen los programas de estudio para la educación secundaria.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2004). *Manual de Estilos de Aprendizaje.* México: Autor.

S**ecretaría de Educación Pública**. (2006). *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación Básica.* México: Autor.

S**ecretaría de Educación Pública**. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Cuarto grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011e). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Segundo grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011f). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Sexto grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011g). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011h). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2017a). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2017b). *Matemáticas. Educación secundaria. Plan y Programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: Autor.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Bristol: The Falmer Press.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., y Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 7-40.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico Romero, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Editorial Horsori.

Stewart, I. (2012). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (págs. 7-13). National Council of Teachers of Mathematics.

Walker, R. (1997). *Métodos de investigación para el profesorado.* Madrid: Ediciones Morata.

ELECTRÓNICAS

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(3), 55-86. doi:10.24844/EM

Cortez, R. A. (2017). "Un minuto para matemáticas". Una experiencia de diversión, aprendizaje y divulgación al explorar patrones numéricos. *Educación Matemática, 29*(3), 225-243. doi:10.24844/EM2903.08

De la Fuente Pérez, J. A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor* (Tesis doctoral). Bellaterra, Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. Obtenido de https://ddd.uab.cat /record/173975

Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques*, 43-67. Obtenido de http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/revue_x/fic/3/3x4.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. Obtenido de https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique /vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168. Obtenido de http://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=61

Elías, M. E. (2015). La cultura escolar: Aproximación a un concepto complejo. *Revista Electrónica Educare, 19*(2), 285-301. doi:dx.doi.org/10.15359/ree.19-2.16

Encyclopedia Britannica. (2006). *Encyclopedia Britannica.* Obtenido de Britannica.com: https://www.britannica.com/science/Indian-mathematics

Godino, J. (2003). *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática.* Granada: Universidad de Granada. Obtenido de https://www.ugr.es/ ~jgodino/fundamentos_teoricos/fundamentos_tem.pdf

González Trujillo, E. S. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctiva basada en el planteamiento y la resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de Repositorio Institucional de la UN: http://www.bdigital.unal.edu.co/8062/1/erikasofiagonzaleztrujillo.2012.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2018). *INEE*. Obtenido de ¿Qué es PISA?: https://www.inee.edu.mx/index.php/136-proyectos-y-servicios/pisa/1959-quees-pisa

Kaput, J. J. (2000). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum. 1-20. Dartmouth, Massachusetts: Centro Nacional para Mejorar el Aprendizaje y el Logro de los Estudiantes en Matemáticas y Ciencias. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE*(13), 105-132. Obtenido de http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Márquez, A. (2017). A 15 años de PISA: resultados y polémicas. *Perfiles Educativos, XXXIX*(156), 3-15. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13250923001

Olazábal Carpio, A. M. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto* (Tesis de maestría). Obtenido de Repositorio Dspace: http://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/1429/Tmaestriaciencias.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019a). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). PISA 2018 - Resultados.* Autor. Obtenido de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

O**rganisation for Economic Co-operation and Development**. (2019b). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do.* Paris: OECD Publishing. doi:10.1787/5f07c754-en

Palarea Medina, M. D. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números, 40*, 3-28. Obtenido de http://mdc.ulpgc.es/cdm/ref/collection/numeros/id/343

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática*, 111-133. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40532665005

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Edits.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 1-20). Jaén: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/2012seiem.pdf

S**ánchez Cerón**, M., y del Sagrario Corte Cruz, F. M. (2013). Las evaluaciones estandarizadas: sus efectos en tres países latinoamericanos. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, XLIII*(1), 97-127. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27026416001

S**ánchez Puentes**, R. (1993). Didáctica de la problematización en el campo científico de la educación. *Perfiles educativos*(61), 64-78. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=132/13206108

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving,. *Journal of Education, 196*(2), 1-38. doi:10.1177/002205741619600202

Secretaría de Educación Pública. (2016). Los fines de la educación en el siglo XXI. México: Autor. Obtenido de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/114503/Los_Fines_de_la_Educacio_n_en_el_Siglo_XXI.PDF

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics, 10*(3), 24-36. Obtenido de https://flm-journal.org/Articles/43489F40454C8B2E06F334CC13CCA8.pdf

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5-34. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

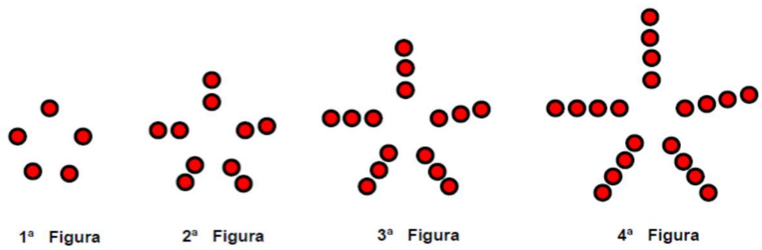
ANEXOS

ANEXO 1. PRIMER CUESTIONARIO DE SUCESIONES

Matemáticas I

Instrucciones: contesta lo que se te cuestiona en cada situación. Evita dejar preguntas sin contestar. Puedes ocupar el reverso de la hoja si lo consideras necesario.

1. Si la siguiente sucesión continúa aumentando, ¿cuántas bolitas habrá en la figura 11ª?



2. Observa la siguiente sucesión de números

11	15	19	23	…	323	327	331	335	…

¿Qué número está 25 posiciones delante del último número que está escrito?

3. Una nadadora entrenó todos los días durante tres semanas. El primer día nadó 20 minutos, y cada día nadaba 5 minutos más que el día anterior. ¿Cuánto tiempo nadó el último día? ¿Y a lo largo de las tres semanas?

4. Las edades de 7 personas suman 378 años en total. Si de menor a mayor aumentan la misma cantidad de años entre cada persona y la menor tiene 18 años, ¿cuál es la edad de las otras seis personas?

5. La distancia entre mi coche y el primer poste de una fila es de 7.25 metros, y la distancia entre el coche y el quinto poste es de 21.25 metros. Sabiendo que la distancia entre postes es la misma, ¿cuántos postes hay entre mi coche y un poste situado a 49.25 metros de él?

ANEXO 2. SEGUNDO CUESTIONARIO DE SUCESIONES

Nombre del alumno: ______________________ Fecha: ____________

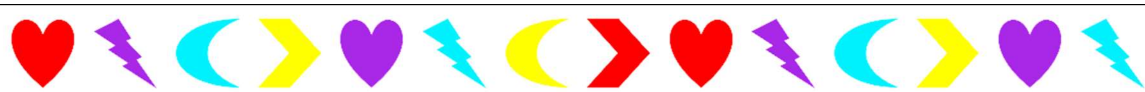
Instrucciones: contesta lo que se te cuestiona en cada situación.

1. Elige 4 de los siguientes números y represéntalos utilizando sumas repetidas del mismo sumando hasta que completes la cantidad que representa dicho número

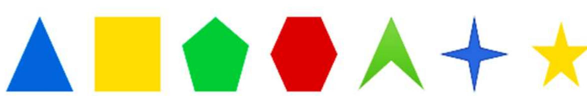
Por ejemplo: Número 18=3+3+3+3+3+3

75	**27**	**42**	**39**	**38**	**22**	**93**	**36**	**54**	**55**

2. En cada uno de los siguientes conjuntos de objetos dibuja la figura que sigue en los espacios disponibles. Para cada caso explica brevemente cómo supiste cuáles eran las figuras que continuaban. En caso de no contar con colores, anota debajo de la figura el color que debe tener si lo consideras necesario.

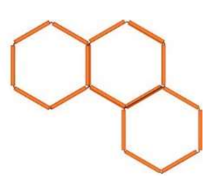


Explicación:

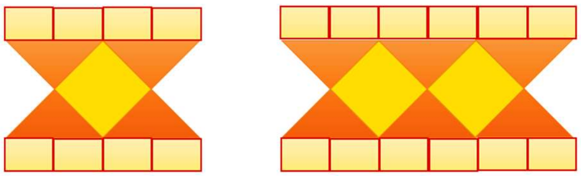


Explicación:

3. Observa la figura y contesta los cuestionamientos

			¿Cuántos palillos se necesitarán para la figura 6? ¿Cuántos palillos se agregan por cada nueva figura?
Figura 1	Figura 2	Figura 3	

4. Benito trabaja arreglando su jardín. Él quiere poner un sendero con losas en forma de rombo, losas en forma de triángulo y ladrillos. Dependiendo del largo del sendero será el número de losas y ladrillos que utilizará.



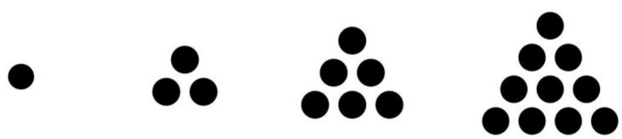
Si el sendero llevará 3 losas en forma de rombo, ¿cuántas losas en forma de triángulo y cuántos ladrillos utilizará?

¿Es posible formar un sendero con 24 ladrillos y 5 losas en forma de rombo?, ¿cuántas losas en forma de triángulo necesitará?

5. Encuentra los términos faltantes de la siguiente sucesión y explica cómo hiciste para hallarlos

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Número	1	3	9		81		

6. En la siguiente tabla anota los números que continúan la sucesión, anota brevemente cómo encontraste el resultado.

Números	Sucesión de figuras					
Triangulares						
Sucesión numérica	1	3	6	10		

7. Observa la sucesión y contesta los cuestionamientos

Sucesión	**7, 12, 17, 22, 27**
¿Cuál es la fórmula que permite calcular cualquier número de la sucesión?	
¿Qué número ocupa la posición 11?	
¿El número 285 forma parte de la sucesión? ¿en qué posición se encuentra?	

ANEXO 3. SECUENCIA DE PROBLEMAS APLICADOS A 4 ESTUDIANTES

Campeonato de ajedrez

En un campeonato de ajedrez aquel que resulte ser el ganador tiene la opción para elegir entre dos premios:

- Premio 1: recibir un peso por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos pesos por la segunda, cuatro pesos por la tercera, ocho pesos por la cuarta y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas del tablero.
- Premio 2: recibir 500 pesos por la primera casilla, 510 por la segunda, 520 por la tercera y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas del tablero.

¿Cuál opción crees que convenga al ganador y por qué?

Una historia sobre el ajedrez

Existe una leyenda sobre el juego del ajedrez, que cuenta la historia de un rey de la India llamado Iadava el cual cayó en una profunda tristeza al perder a su hijo en la guerra. Sessa, un ciudadano de un poblado lejano al reino se enteró de la desgracia ocurrida al soberano y pensó inventar un juego para distraerlo de sus penas y traerle de nuevo un poco de alegría. El inventor llegó al reino con el juego, debido a la curiosidad del rey, se le permitió a Sessa pasar y explicar al soberano y su corte las reglas del juego, así como las piezas que lo componen. Pronto el rey aprendió las reglas y logró derrotar en el juego a varios cortesanos.

En una partida, la jugada desarrollada trajo a la memoria del rey la batalla en la que perdió a su hijo. Esto lo hizo reconocer que algunas veces el sacrificio es necesario para llegar a la paz y la libertad del pueblo. Exclamó su alegría por la reflexión que le había dejado el juego. Decidió recompensar a Sessa por sacarle de su melancolía, pero éste se limitó a asegurar que para él era la suficiente la alegría del rey y que no existía pago mejor que eso. Pero el Iadava le insistió en elegir una recompensa digna de su regalo. Para no caer en descortesía y desobediencia al rey Sessa aceptó pedir por recompensa granos de trigo: un grano por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente hasta la casilla número 64. El rey y echó a reír por la poca ambición del joven, pero fiel a su palabra, ordenó que se le entregara inmediatamente la cantidad de granos que pedía.

Unas horas más tarde, los matemáticos del reino acudieron con el rey para informarle que, aunque tuvieran todos los granos y tierras de cultivo del reino entero, no alcanzaría un siglo para producir la cantidad de grano solicitada. El rey quedó pasmado ante la imposibilidad de cumplir su palabra. Sessa después de dar una lección al rey y retractarse de su petición, debido a su sabiduría, fue nombrado primer ministro del reino.

1 Supón que tú eres un matemático del reino de Iadava, describe cómo harías para calcular la cantidad de granos que hay que pagar a Sessa por el obsequio que dio al rey.

2 Si la dinámica hubiera sido diferente y el premio que recibiera Sessa fueran solo los granos correspondientes a una casilla elegida al azar, ¿cuántos granos habría de recibir si solamente recibiera los que corresponden con la casilla número 31? Considera que la primera casilla equivale a un grano, la segunda a dos granos, la tercera a cuatro granos, la cuarta a ocho granos y así sucesivamente.

3 Si se aplicara la dinámica del premio 2 del problema inicial, en la que se recibe 500 por la primera casilla, 510 por la segunda, 520 por la tercera y así sucesivamente, y la aplicáramos al dilema de Sessa ¿Cuántos granos habría de recibir si solamente se le entregaran los que corresponden con la casilla número 31?

Limpieza de cristales

Una empresa dedicada a la limpieza va a limpiar los cristales exteriores de un edificio, el costo depende del piso que se limpie. Para limpiar los vidrios del primer piso la empresa cobra $350, y cada piso adicional cuesta $25 más que el anterior. Si en el edificio urge que se limpien los cristales de la sala de juntas ubicada en el piso 27 ¿cuál será el costo por limpiar solo ese piso?

Si el edificio tiene 35 pisos, ¿cuál será el costo de la limpieza de los cristales exteriores?