

DIFICULTADES DE ALUMNOS DE TELESECUNDARIA AL OBTENER PROPIEDADES ENTRE PUNTOS ALINEADOS EN EL PLANO EUCLIDIANO

DIFFICULTIES OF TELESECUNDARIA STUDENTS WHEN OBTAINING PROPERTIES BETWEEN POINTS ALIGNED ON THE EUCLIDIAN PLANE

Vicente Carrión Miranda, Gabriela Legorreta Velázquez

Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del I.P.N. México.
vcarrión@cinvestav.mx, gabriela.legorreta@cinvestav.mx

Resumen. Se investigan los desempeños y producciones de un grupo de alumnos de primer grado de telesecundaria, basados en realizaciones de actividades que muestran la forma en que abordan diversos conceptos geométricos y los interrelacionan para establecer propiedades que tienen agrupaciones de puntos que se encuentran sobre líneas rectas de un plano. Del análisis de las respuestas de los reactivos incluidos en los instrumentos de investigación se obtuvieron conclusiones surgidas de dificultades, errores y aciertos relacionados con aspectos cognitivos relevantes de la investigación.

Palabras clave: Semejanza de triángulos, proporcionalidad, colinealidad de puntos.

Abstract. The performances and productions of a group of first-grade telesecundaria students are investigated, based on the realization of activities that show the way in which they approach various geometric concepts and interrelate them to establish properties that make a grouping of points on a plane find in a straight lines. From the analysis of the responses of the items included in the research instruments, conclusions were obtained about the difficulties, errors and successes in the actions of the students, related to relevant cognitive aspects of the research.

Key words: Similarity of triangles, Proportionality, Point collinearity.

Introducción

La evolución de las diferentes civilizaciones ha requerido del uso de una variedad de propiedades asociadas al tema de la recta. Múltiples situaciones que diariamente ocurren en actividades sociales y en contenidos tratados en las ciencias se basan en este concepto. Son ejemplos de la física la velocidad, la aceleración, la densidad y la presión; si estos conceptos son constantes. Análogamente, existen conceptos dentro de la misma matemática definidos como cocientes de números reales, o como cocientes de diferencias de números reales. Están estrechamente relacionados con la proporcionalidad directa y con la pendiente de una recta. Lo anterior es razón suficiente para valorar la importancia que tienen la recta y sus propiedades para que, con un tratamiento adecuado, se incluyan en los programas de estudio de secundaria.

Marco Teórico

El enfoque teórico de la investigación se fundamenta en la teoría de Sistemas Semióticos de Representación Duval, R. (1999), de manera general algunos aspectos relevantes de su teoría. Una forma de establecer interrelaciones entre objetos matemáticos es con el uso de signos y representaciones porque no son accesibles por medios tangibles (Duval, 2006). Sin embargo, el interés no sólo son los objetos matemáticos y sus diferentes representaciones, sino los procesos cognitivos presentes en la adquisición del conocimiento matemático de los participantes en las actividades, así que la teoría aporta elementos de tipo didáctico y de

búsqueda en la forma de pensamiento de los alumnos, porque cada registro de representación que el alumno opera propicia emplear diferentes propiedades de otros objetos matemáticos para incrementar su estructura de conocimiento.

Duval, R. (1999), afirma que en las actividades cognitivas se necesitan utilizar sistemas de expresión y representación diferentes al lenguaje natural, variados sistemas de escritura y notaciones simbólicas para los objetos; lenguajes paralelos al lenguaje natural como la escritura algebraica y lógica para expresar las relaciones y las operaciones y, además, figuras geométricas, gráficos cartesianos y diagramas. ¿A qué corresponde el hecho de que existan varios registros de representaciones y cuál es el interés de esta diversidad de registros para el funcionamiento del pensamiento humano? La existencia de varios registros permite cambiar de uno a otro y el cambio favorece efectuar tratamientos de una manera potente. El lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama. Toda representación es cognoscitivamente parcial con referencia a lo que representa y, además, por lo general, en el paso de un registro a otro no son los mismos aspectos de contenido los que son representados. La conceptualización implica una coordinación de representación. Si el registro es elegido correctamente las representaciones de ese registro son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Esto parece justificarse por la estructura misma de la representación.

Las actividades cognitivas fundamentales inherentes a la Semiosis (Duval, 1999) son la presencia de una representación identificable, el tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada y la conversión de una representación correspondiente a la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva el significado de la representación inicial.

Las representaciones semióticas son a la vez conscientes y externas. Las primeras presentan carácter intencional y cumplen una función de objetivación, un descubrimiento por el sujeto mismo de algo que hasta entonces no sospechaba; así, su carácter intencional es el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. Y es como a través de la significación que se hace una aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto. Por otro lado, las representaciones externas cumplen una función de comunicación y, además, cumplen con la función de objetivación y de tratamiento. De este modo los registros de representación son reflexivos y externos, por lo que son intencionales y tienen la función de objetivación, esto conduce a considerar los dos conceptos: Semiosis, aprehensión o producción de una representación semiótica; y Noesis, actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Otro aspecto fundamental que señala es que los distintos registros de representación se diferencian no sólo por su naturaleza de sus significantes sino por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación. Si el registro de representación es elegido correctamente las representaciones de ese registro son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Esto parece justificarse por la estructura misma de la representación (Duval, 1999).

Por ejemplo, en geometría es necesario combinar el uso de al menos dos sistemas de representación, uno para la expresión verbal de propiedades o para la expresión numérica de magnitud y el otro para la visualización. Lo que se llama una figura geométrica siempre asocia representaciones tanto discursivas como visuales.

Existe una separación entre las investigaciones en matemática educativa y la práctica docente. Esto se exhibe como fundamento para establecer la necesidad de que se establezcan relaciones para consolidar una práctica educativa reflexiva en el docente y orientada a tomar decisiones fundamentadas al establecer un proceso dialéctico entre la práctica y la teoría, involucrando a la investigación en matemática educativa. Los profesores tienen la responsabilidad de crear un entorno que lleve a desarrollar en los alumnos la comprensión de los conceptos matemáticos y, también, a formular hipótesis sobre las construcciones conceptuales de los alumnos y sobre las posibles estrategias didácticas para modificar esas construcciones, Malara (2002).

En México la Secretaría de Educación Pública incluye en el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria las siguientes variantes: Secundaria General, Secundaria Técnica y Telesecundaria. La característica esencial de la Telesecundaria es que un profesor, como mediador, se responsabiliza de todas las asignaturas de un grupo de alumnos de un mismo grado escolar (SEP, 2018).

Esta investigación se inició con un análisis sobre el aprendizaje, los recursos y materiales que se ocupan cotidianamente en telesecundaria y la búsqueda de la información necesaria en documentos de investigación relacionados al tema de investigación. Es información relacionada con las formas de enseñanza de dos modelos de telesecundaria el de 1993 y 2006 que permiten comprender las problemáticas, aportaciones y limitantes en los procesos de aprendizaje que se presentan en ambos modelos de telesecundaria.

El proceso que se sigue consta de dos perspectivas, la de docente y la de investigadora en formación en Matemática Educativa. Se pretende enriquecer las actividades de enseñanza en el aula y realizar la indagación de los procesos de aprendizaje de los alumnos, no sólo con la relación de las unidades de estudio, sino con estructuras de conocimiento que posibiliten tratar más contenidos en un tema y con relación entre esas unidades de manera significativa, sin descuidar la comunicación y las interacciones a través de la imagen que es fundamental en telesecundaria.

En la presente investigación es de interés valorar la forma en que reaccionan los alumnos al presentar instrumentos de investigación para que exhiban, las maneras en que proceden al aprender algunas propiedades referentes con puntos alineados y cuáles son sus comportamientos individuales y en pequeños grupos de discusión. Los instrumentos de investigación impresos pretenden relacionar los contenidos matemáticos concernientes con el tema puntos alineados y las herramientas que proporcionan los registros de representación geométrica, algebraica, tabular y gráfica, mediadas por la lengua natural escrita.

Metodología

La investigación tiene el propósito de determinar los procesos cognitivos y las formas en que la selección de veinticuatro alumnos de una escuela del tipo telesecundaria aprenden los

conceptos de paralelismo, perpendicularidad, proporcionalidad y semejanza de triángulos para y los interrelacionan para establecer propiedades que hacen que colecciones de puntos alineados en un plano se encuentren en rectas. Se pretende también analizar los mismos procesos y formas mencionados cuando aprenden e interrelacionan los conceptos anteriores, sólo que expresados numérica y simbólicamente. Además, se indagan las maneras en que establecen las equivalencias entre elementos, y sus funciones, de distintas formas de representación. En la investigación se utiliza una metodología de carácter cualitativo.

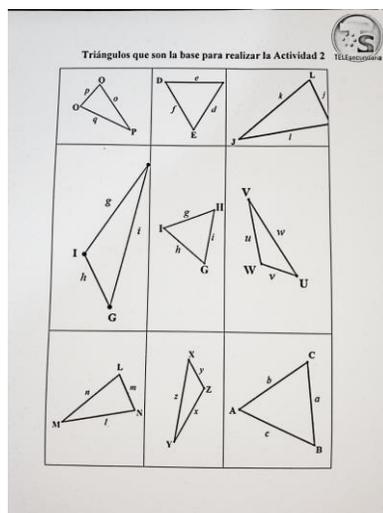
Asimismo, se planearon sesiones de enseñanza en el aula, un ciclo que incluyó un cuestionario de diagnóstico y uno para identificar los aprendizajes adquiridos después de un proceso de enseñanza de conceptos en el desarrollo de la investigación. Se realizó una entrevista con alumno y se hicieron videograbaciones individuales y de grupos pequeños.

Las acciones anteriores condujeron a tener la información siguiente: saber el nivel de conocimientos preliminares de los alumnos conocer la base común de los saberes en los alumnos participantes en la indagación para tomarla en cuenta en el diseño de los instrumentos de investigación; además, analizar los procesos cognitivos y las formas en que aprenden las propiedades de puntos aislados que se encuentran sobre rectas que están sobre un plano, con base en conceptos geométricos asociados a la proporcionalidad.

Las actividades incluidas en la investigación comprenden en dos formas. Con recursos de geometría sintética y empleando coordenadas cartesianas. En el presente reporte de investigación se expone solamente los resultados obtenidos siguiendo lineamientos de la primera de las dos formas de utilizar recursos geométricos.

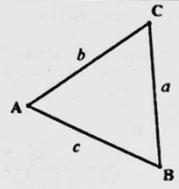
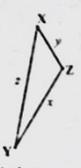
Las actividades se basaron en nueve triángulos de diferentes clases trazados en diferentes posiciones. Los alumnos los clasificaron de acuerdo con la medida de sus lados. Ocupando regla y compás y trazaron todos los triángulos con iguales medidas de sus lados y ángulos. El lado de mayor medida se colocó en forma horizontal, a la manera de base del triángulo. Los ordenaron del más pequeño al de mayor tamaño, de tres en tres, de acuerdo con su semejanza. En cada terna anotaron las clases de triángulos, según la clasificación.

Asignaron letras mayúsculas a los vértices y letras minúsculas a los lados, siguiendo el orden positivo: en forma contraria al movimiento de las manecillas de un reloj.

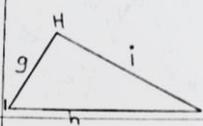
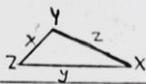
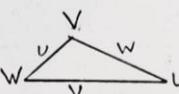


Trazaron los triángulos superpuestos con un vértice común. En una de las actividades recortaron algunos triángulos y los superpusieron y experimentaron tangiblemente la linealidad de puntos, triángulos, la mayoría de los alumnos observó y sintió el vértice en común, que dos lados en cada triángulo coincidían y los alumnos conjeturaron que el tercer lado correspondiente a cada triángulo es paralelo, el paralelismo se descubrió visualmente, así también escribieron que los lados se encontraban en una misma recta.

Continuación de la actividad 1

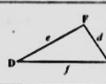
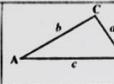
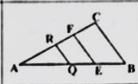
Medidas de los lados de los triángulos		
 <p>$\triangle LMN$</p> <p>$l = 3.6 \text{ cm}$ $m = 1.9 \text{ cm}$ $n = 3.6 \text{ cm}$</p> <p>Clase de triángulo: Triángulo isósceles</p>	 <p>$\triangle ABC$</p> <p>$a = 4 \text{ cm}$ $b = 4 \text{ cm}$ $c = 4 \text{ cm}$</p> <p>Clase de triángulo: Triángulo equilátero</p>	 <p>$\triangle XYZ$</p> <p>$x = 2.5 \text{ cm}$ $y = 1.3 \text{ cm}$ $z = 3.3 \text{ cm}$</p> <p>Clase de triángulo: Triángulo Escaleno</p>

Continuación de la actividad 2

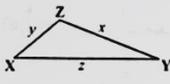
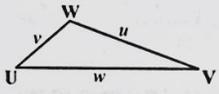
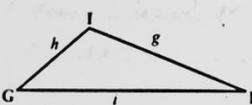
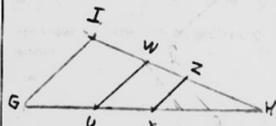
Notación simbólica	Triángulos escalenos	Medidas de los lados
$\triangle GHI$		$g = 3.3 \text{ cm}$ $h = 4.8 \text{ cm}$ $i = 5.2 \text{ cm}$
$\triangle XYZ$		$x = 2.7 \text{ cm}$ $y = 3.9 \text{ cm}$ $z = 3 \text{ cm}$
$\triangle UVW$		$u = 2 \text{ cm}$ $v = 4.9 \text{ cm}$ $w = 3.5 \text{ cm}$

ACTIVIDAD 3

1. En la Actividad 2 dibujaste los triángulos y los ordenaste de acuerdo con las medidas de sus lados, del menor al mayor. La Actividad 3 consiste, primeramente, en dibujar el triángulo de mayor tamaño. Sobre este triángulo coloca los otros dos de tal manera que los vértices de la izquierda coincidan. Dibuja la figura de modo que quede como la que se presenta en el siguiente ejemplo, donde se hace ver la posición de los triángulos superpuestos.

Ejemplo			
Triángulos ordenados de menor a mayor			Triángulos superpuestos
			

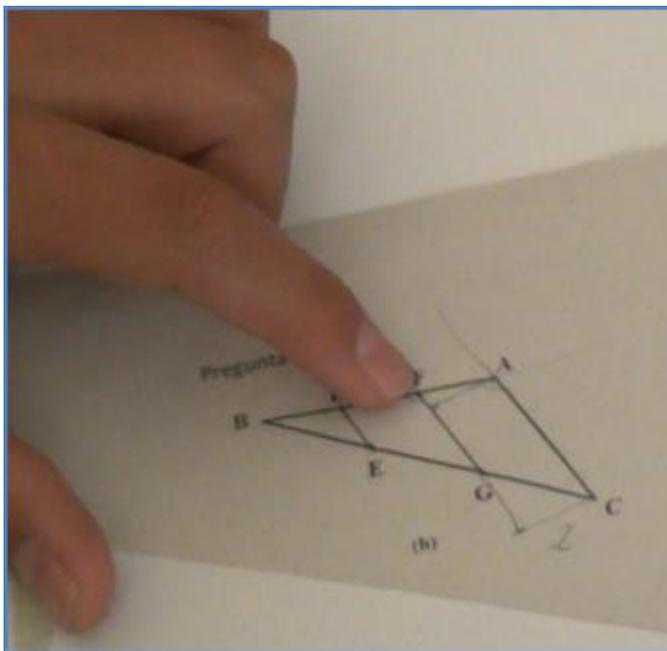
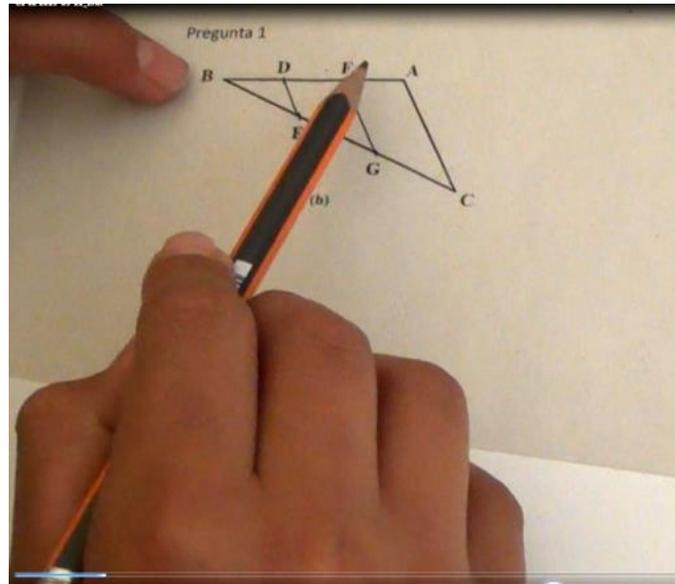
Siguiendo las instrucciones indicadas en el párrafo anterior completa la tabla siguiente.

Triángulos escalenos	
Triángulos ordenados de menor a mayor	
	
Triángulos superpuestos	
	

A continuación, se muestra parte de la entrevista a Daniel.

Inv. ¿Qué figura es?,
¿Cómo está formada?, ¿Para qué te ha servido?

Dani. Bueno, pues este es un triángulo escaleno porque nos damos cuenta de que este lado es diferente a éste, no tiene las mismas medidas, todos sus lados son desiguales.

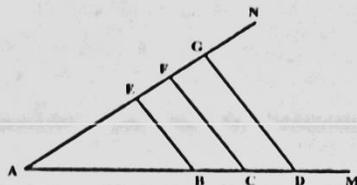


Dani. Otra es que tenemos tres triángulos sobrepuestos aquí encontramos el triángulo... a ver..., esta así, encontramos el triángulo más pequeño, BED, el mediano es BGF y el más grande es FCA y nos damos cuenta de que estos tres triángulos tienen la misma medida, pero en ángulos, éste, éste es correspondiente a este y a este, si tuviéramos una recta así y así tenemos ángulos correspondientes en estas tres paralelas de aquí, estas son paralelas...

Los puntos están alineados en dos de los lados y en los terceros lados correspondientes son paralelos: Todo fue relacionado con el lenguaje natural escrito para poderlo comunicar. Observaron que para que los vértices de uno de los lados correspondientes de todos los triángulos se encuentran alineados. Son los vértices opuestos al vértice común de lados correspondientes de los triángulos.

ACTIVIDAD 9

1. En la siguiente figura los segmentos BE, CF y DG son paralelos. Encuentra las longitudes de los segmentos de recta que enseguida se piden.



AD = <u>5.7</u> cm.	AC = <u>4.7</u> cm.	AB = <u>3.6</u> cm.
AG = <u>4.1</u> cm.	AF = <u>3.7</u> cm.	AE = <u>2.8</u> cm.
FG = <u>0.9</u> cm.	CD = <u>1.1</u> cm.	EF = <u>0.9</u> cm.
BC = <u>1.1</u> cm.	EG = <u>1.8</u> cm.	BD = <u>2.2</u> cm.

2. A partir de las medidas de los lados de los triángulos de la tabla anterior encuentra numéricamente las razones expresadas en forma simbólica.

$$\frac{FG}{AG} = \frac{0.9}{4.1} = \boxed{0.2} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{1.1}{5.7} = \boxed{0.7} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{1.1}{4.7} = \boxed{0.2}$$

$$\frac{EF}{AF} = \frac{0.9}{3.7} = \boxed{0.2} \quad \frac{EG}{AE} = \frac{1.8}{2.8} = \boxed{0.6} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{2.2}{3.6} = \boxed{0.6}$$

3. ¿Qué relaciones encuentras en las razones numéricas que has obtenido en el punto (2)?

que unas son constantes de proporcionalidad y unas se acercan a ser proporcionales por los cocientes

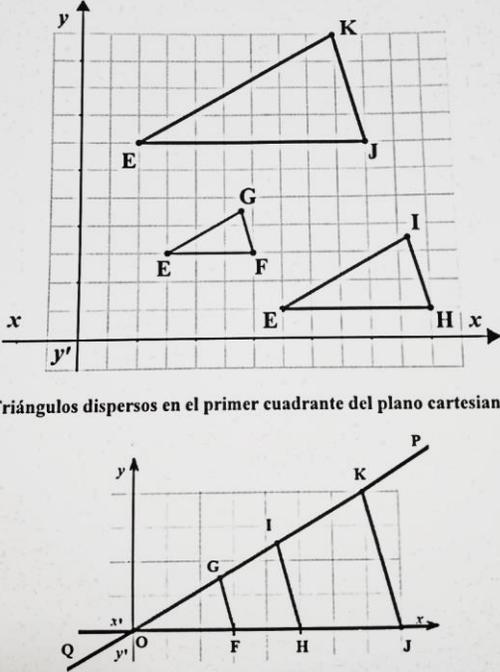
Con otra actividad, una vez que ya superpusieron los triángulos, utilizaron el registro aritmético, midieron cada uno de los lados y encontraron las razones de proporcionalidad.

Con el uso del sistema de coordenadas cartesianas se usan triángulos rectángulos porque es más propicio el triángulo rectángulo por tener un ángulo recto. Procedieron a utilizar los triángulos superpuestos, con un vértice común, con lados paralelos y lados que se comparten en un segmento de recta. Se les preguntó sobre las coordenadas de puntos alineados y los segmentos que son paralelos, se utilizó el registro simbólico ahora en el plano cartesiano.



ACTIVIDAD 10

1. Se presentan dos esquemas en el primer cuadrante del plano cartesiano donde presenta a tres triángulos isósceles cada uno. El primer esquema contiene a triángulos separados y posicionados en el cuadrante I y el segundo esquema presenta a esos mismos triángulos superpuestos comprendidos entre dos rectas.



Triángulos dispersos en el primer cuadrante del plano cartesiano

Triángulos superpuestos en el primer cuadrante del plano cartesiano

Resultados

Ocho participantes tuvieron bajo desempeño en las actividades académicas por sus inasistencias constantes porque no asisten regularmente a clases. El 33.3% de los alumnos contestaron correctamente los contenidos del cuestionario preliminar. El 29.1% dieron respuestas aproximadas basados en propiedades de triángulos; por ejemplo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180° , la suma de las medidas de dos lados es mayor o igual que la medida del tercero. El 37.5% contestó de manera incorrecta, con respuestas ajenas a lo solicitado. Al encontrar las relaciones existentes entre los ángulos formados por dos rectas paralelas intersecadas por una transversal el 33.3% contesta correctamente la mayoría los reactivos propuestos; el 25% los contesta en forma aproximada; y el 41.6% presenta confusión. Al obtener propiedades sobre proporcionalidad entre los lados de cada triángulo, el 41.6% mostró conocimiento correcto del tema, mientras que el 33.3% tuvieron errores aritméticos. En general, un poco más de la mitad de los alumnos encontró que la semejanza de triángulos se relaciona directamente con el paralelismo de los lados, con la alineación de puntos en el plano y con la igualdad de razones entre las longitudes de los lados.

Conclusiones

Los resultados de las respuestas para las actividades manifestaron que les hace falta información sobre los conceptos preliminares necesarios para responder los reactivos de las actividades. Existe heterogeneidad en la interpretación de los conceptos matemáticos. Aunque no se observó la comunicación esperada en pocos alumnos, porque les cuesta trabajo interrelacionar con compañeros en el trabajo colaborativo, en la mayoría se produjo cierta homogenización en la interpretación de los conceptos. Esto se debió al intercambio de ideas al trabajar colaborativamente en grupos pequeños.

Con relación a la pregunta siguiente: ¿cuáles son las causas inmediatas que originan que los alumnos cometan errores al establecer propiedades de colinealidad de puntos con apoyo en colecciones de triángulos semejantes, utilizando la proporcionalidad? se observó que los errores aritméticos se debieron a que no interpretaron correctamente el teorema de Tales; esto es, no relacionaron adecuada y correctamente este teorema con el concepto de proporcionalidad.

Referencias

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar el registro de representación Duval, R. (2006) Localización: *Gaceta de la Real Sociedad Matemática española*, ISSN 1138-8927, Vol. 9, N° 1, 2006, págs. 143-168.
- Malara, N. A., & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 553– 580). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- SEP (2018). *Matemáticas Primer grado. Telesecundaria, 2018*. Ciudad de México. Secretaría de Educación Pública. <https://telesecundaria.sep.gob.mx/>. Consultada septiembre 2018.