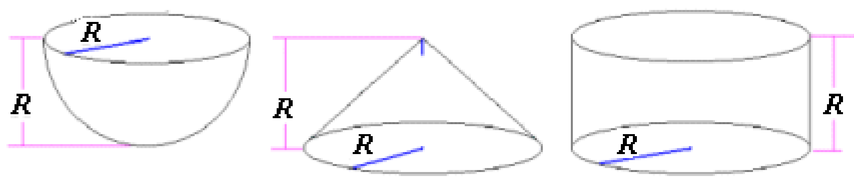
Resumen del volumen de la esfera usando el método empleado por Arquímedes

Por Josué Raúl García Soria Mondragón

Febrero de 2006

Arquímedes ideó un método simple para determinar el volumen de la esfera. Imaginó una semiesfera, un cono y un cilindro juntos. Supuso que la esfera tenía radio ***R*** y tanto el cono como el cilindro con el mismo radio basal ***R***. También supuso que las alturas del cono y el cilindro medían ***R*** como muestra la siguiente figura:

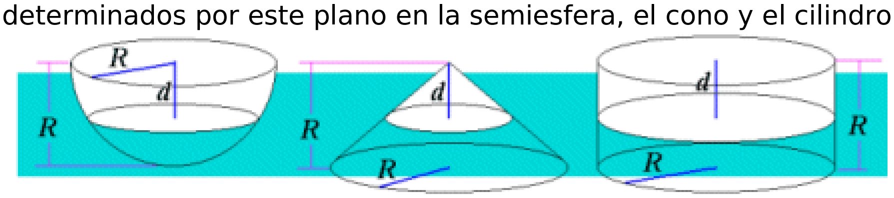


De estas figuras, son conocidos los volúmenes:

- Del cilindro: radio ***R*** y altura ***R***, o sea $\pi \cdot R^2 \cdot R = \pi R^3$

- Del cono: radio ***R*** y altura ***R***, o sea $\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} = \dfrac{1}{3}\pi R^3$

Luego cortó las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro y del cono y a una distancia ***d*** de la parte superior de las figuras. Luego se preguntó cómo serían las secciones determinados por este plano en la semiesfera, el cono y el cilindro:

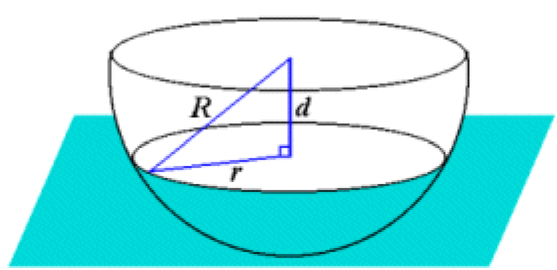


La sección del cilindro

En el cilindro la sección que determina el plano es claramente un círculo de radio ***R*** y su área es: $A_{\text{sección del cilindro}} = \pi R^2$

La sección de la semiesfera

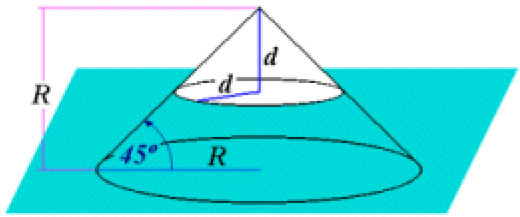
En la semiesfera, la sección circular que determina el plano que corta a la semiesfera, tiene un radio ***r*** (menor a ***R***) que depende de la distancia ***d***. La siguiente figura muestra la situación:



El área del círculo de radio ***r***, es: $A_{\text{sección de la semiesfera}} = \pi r^2$
Además, usando el **Teorema de Pitágoras**, en el triángulo rectángulo de lados ***R*** , ***d*** y ***r*** se cumple que $R^2 = r^2 + d^2$

La sección del cono

El cono que consideró Arquímides, tiene altura y radio basal ***R***; por lo tanto el triángulo formado por dicho radio basal, la altura y la pared del cono es rectángulo e isósceles. Por semejanza de triángulos, el circulo que determina el plano que corta al cono tiene radio ***d***. La siguiente figura lo muestra:



En el cono, la sección que determina el plano, es un círculo de radio ***d*** y su área es:

$$A_{\text{sección del cono}} = \pi \cdot d^2$$

- **Juntando las fórmulas**

Hasta ahora sabemos que: $A_{\text{sección del cilindro}} = \pi R^2$

pero de la semiesfera obtuvimos que: $R^2 = r^2 + d^2$

Si en el área del cilindro reemplazamos ***R²*** por ***r²*** + ***d²*** entonces tendremos que:

$$A_{\text{sección del cilindro}} = \pi R^2 = \pi(r^2 + d^2) = \pi r^2 + \pi d^2 = A_{\text{sección semiesfera}} + A_{\text{sección del cono}}$$

Es decir, la suma de las áreas de las secciones del cono y la semiesfera es igual al área de la sección del cilindro.

Esto ocurre para cualquier valor de ***d,*** por lo tanto, si consideramos las secciones (que forma el plano al cortar las figuras) como rebanadas finas, para cada trío de rebanadas tendríamos que:

$$\text{Rebanada del cilindro} = \text{Rebanada de la semiesfera} + \text{Rebanada del cono}$$

De la relación anterior podríamos suponer entonces que:

$$\text{Volumen del cilindro} = \text{Volumen de la semiesfera} + \text{Volumen del cono}$$

y si reemplazamos en esta relación las fórmulas conocidas del volumen del cono y el cilindro, entonces es posible determinar el volumen de la semiesfera:

$$\pi R^3 = V_{\text{semiesfera}} + \frac{1}{3}\pi R^3$$

Despejando: $V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3}\pi R^3$

Por lo tanto, el volumen de la **esfera** es el doble del de la semiesfera: $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$