Escuela Normal Superior del Estado de México
Maestría en Educación Matemática
Matemáticas y conocimiento científico y técnico
Por Josué Raúl García Soria Mondragón

Binomio de Newton

Antecedentes históricos

El teorema del binomio descubierto hacia 1664-1665, fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677) secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta el 17 de agosto del mismo año que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fecha el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

Aplicando los métodos de Wallis de interpolación y extrapolación a nuevos problemas, Newton usó los conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita. Así estuvo en condiciones de demostrar que un buen número de series ya existentes eran casos particulares, bien directamente, bien por diferenciación o integración.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí, sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. El análisis mediante las series infinitas parecía posible porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

La importancia de la idea de Newton de representar las funciones como sumas de series infinitas se refleja en el cálculo diferencial e integral. Por ejemplo, al determinar áreas, a menudo integraba una función expresándola primero como una serie y después integrando cada término de la serie.

Un ejemplo de cómo opera

Con el binomio de Newton, es posible calcular $(a+b)^4$ evitándose la multiplicación sucesiva de la base $a+b$, es decir, no es necesario efectuar la multiplicación $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$.

Por ejemplo, para obtener la expansión de, $(a+b)^5$, utilizando el binomio de newton se debe proceder como sigue:

1. Escribir la suma de las potencias de *a* (desde cinco hasta cero) multiplicadas por las potencias de *b* (desde cero hasta cinco), es decir: $a^5b^0+a^4b^1+a^3b^2+a^2b^3+a^1b^4+a^0b^5$. Reemplazando las potencias elevadas a cero por un uno y omitiendo los exponentes uno, la expresión anterior queda: $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.

2. Luego se construye el triángulo de Pascal (a veces llamado de Tartaglia). Es un esquema triangular de números que parte de dos números uno que corresponderán a los coeficientes de a y b respectivamente. La fila siguiente se obtiene sumando los dos números inmediatos a él en la fila precedente y luego se le agrega un uno a cada extremo de la fila. Gráficamente sería:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

3. Finalmente, se debe hacer la relación entre los números del triángulo de Pascal y la suma de las potencias de a y b obtenida en el punto 1. Los coeficientes se asignan en el mismo orden en que aparecen:

$(a+b)^1$	1	1							
$(a+b)^2$	1	2	1						
$(a+b)^3$	1	3	3	1					
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1				
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1			
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1		
$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$(a+b)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Es decir, a $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$ le corresponden los factores de la quinta fila:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a^5 & + & a^4b & + & a^3b^2 & + & a^2b^3 & + & ab^4 & + & b^5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

y con esto tenemos la expansión de $(a+b)^5$, es decir:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Una demostración por el método de inducción[1]

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n. Para $n = 0$ es inmediato.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m b^{n-m}(a+b) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{m+1}b^{n-m} + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m b^{n-m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1}a^m b^{n+1-m} + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m b^{n+1-m} \\
&= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m-1}a^m b^{n+1-m} + \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m}a^m b^{n+1-m} \\
&= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n}\left(\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}\right)a^m b^{n+1-m} \\
&= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{m}a^m b^{n+1-m} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}a^m b^{n+1-m}.
\end{aligned}
$$

[1] Si bien es cierto que una demostración eleva una proposición al carácter de conocimiento que describe la verdad, aquélla no necesariamente indica la génesis de la afirmación. En consecuencia el lector deberá entender que aunque esta demostración es rigurosa, no significa que así la haya obtenido Newton.